II

Georg Cantor

[1]Debo agradecer por el acceso a materiales no impresos, especiales y muy dispersos sobre la vida de Cantor (a quien no conocí personalmente), entre muchas otras personas, a la hija de Cantor, la Señora Gertrud Vahlen en Halle. En vista de la importancia de Cantor tanto en la matemática como más alla de sus fronteras se aprovechó el material accesible tanto como fue posible a pesar de la falta de uniformidad tanto temporal como conceptual de éste.

Estoy muy agradecido por su enorme apoyo en el procesamiento de gran parte de las publicaciones de Cantor al Señor Pleßner-Gießen.

Las cifras arábigas y romanas entre corchetes refieren al índice al final de publicaciones de Cantor y a materiales sobre su vida y obra.

Georg Cantor
von Abraham Fraenkel

Jahresbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung **XXXIX**(1930), 189-266.

II.1 Desarrollo y Personalidad

Georg Ferdinand Ludwig Philipp[1] Cantor, el creador de la teoría de conjuntos, nació el 19 de febrero de 1845 según el calendario antiguo (3 de marzo según el calendario actual) en Petersburgo. Su padre Georg Woldemar Cantor era originario de Kopenhagen, Dinamarca; el padre tenía en Petersburgo, a donde se mudó de joven, un comercio que manejaba bajo su nombre y en ocasiones con la razón "Cantor y Compañía". Siendo un hombre de negocios capaz y exitoso logró una buena posición y dejó tras su muerte (1863) una considerable herencia; al parecer gozaba de gran prestigio tanto en Petersburgo como en Alemania.

A causa de una dolencia pulmonar se trasladó con su familia a Alemania en 1856 y pronto fijó su residencia en Frankfurt a. M., donde vivió retirado de los negocios. La madre, María (nacida Böhm), que sobrevivió a su esposo 33 años, provenía de una familia con inquietudes artísticas, que seguramente influyó en la mentalidad del hijo. El abuelo Ludwig Böhm fue director de orquesta, cuyo hermano Josef[2] que vivió en Viena fue maestro del celebre violinista Joachim; también el hermano de María Cantor fue músico; su hermana Annette tuvo una hija (Olga), que fue pintora (caricaturista) y maestra en la escuela de arte de München. Entre los hermanos de Georg Cantor también se encuentran habilidades artísticas: su hermano Constantin (muerto en el cuerpo de caballería) fue un talentoso pianista, su hermana Sophie Nobiling (nacida Cantor) que aun vive en Berlín está especialmente dotada para el dibujo.

El talentoso joven, que visitó la escuela elemental en Petersburgo, mostró a edad temprana el fuerte deseo de emprender el estudio de las matemáticas. Su padre no estaba de acuerdo, pues consideraba la ingeniería una profesión más rentable; el hijo se sometió al principio y se traslada a Darmstadt en la pascua de 1859, después de asistir provisionlamente a la escuela secundaria en Wiesbaden así como a escuelas privadas en Frankfurt a.M., para visitar la escuela real provincial del gran Duque, en la que también el Latín erá parte del estudio, para poder asistir después a los cursos de la escuela superior de oficios del gran Duque (posteriormente se llamaría escuela superior técnica). Una idea clara de la forma en la que el padre dirigía la educación del hijo, así como de las esperanzas depositadas en él la proporciona una carta enviada por el padre con motivo de su confirmación en Pentecostés de 1860; en ella se escribe:

"Querido Georg: quiera el todopoderoso, creador de todo lo terreno y padre de todo lo viviente, que este día tenga una bendita influencia en toda tu vida futura; ojalá que mantengas por siempre las virtuosas intenciones que hasta ahora, sin ninguna duda, has mantenido... La forma de vida futura y el destino del hombre están profundamente escondidas en la oscuridad. Y es bueno que así sea.

[1]Según su fé de bautizo (en [VII] Louis Philippe).

[2]Es decir, un tio, no hermano de María Cantor (como se afirma en [IX], p. 556).

Nadie sabe por anticipado que situaciones dificiles inimaginables o relaciones laborales le ocurriran, con que adversidades y dificultades imprevistas se enfrentará en las diversas etapas de la vida.

...Con que frecuencia los hombres empeñosos, una vez que han conocido la vida real, se rinden a la primera contrariedad seria después de oponer una débil resistencia. Desanimados se retraen totalmente, y en el mejor de los casos se convierten en los así llamados genios incomprendidos... Así terminan no pocos jovenes, que aparentemente tienen prometedoras cualidades intelectuales y físicas y que en su juventud sus perspectivas son de lo más prometedoras debido a su capacidad y relaciones familiares.

Pero a ellos les falta el núcleo de donde proviene todo. Ahora ¡mi querido hijo!– créeme, tu más fiel, sincero y experimentado amigo– este núcleo que debe vivir en nosotros es: ¡un auténtico espiritu religioso! éste se nos presenta mediante una sincera y humilde veneración a dios de la que se origina una confianza indestructible y victoriosa en dios, y que nos mantiene durante toda nuestra vida en contacto con nuestro padre celestial.

...Pero para enfrentar también el resto de tormentos y dificultades inevitables, que en nuestros fervorosos afanes por el éxito y la buena suerte promueven abierta o secretamente enemigos de nuestro propio oficio o profesión, para sobreponernos también a esto exitosamente, correponde en primer sitio la adquisición y apropiación de la mayor cantidad y diversidad posible de conocimientos y habilidades técnicas. Estos son hoy en día una necesidad imprescindible, cuando el hombre ambicioso y diligente no quiere ser desplazado por sus enemigos y verse en segundo o tercer plano.

Para obtener conocimientos fundamentales y diversos tanto científicos como prácticos, para la adquisición completa de lenguas extranjeras e ilustración, para la formación multifacética del espíritu, incluso en algunas disciplinas humanistas–y con esto prepararte dignamente para esas batallas– para ello esta el segundo periodo de tu vida, que recién inicias, la juventud. Pero lo que el hombre desaprovecha o por despilfarro anticipado de sus fuerzas, su salud y tiempo, en este periodo, por así decirlo, echa a perder, no se puede recuperar o restituir, está perdido para siempre–al igual que la inocencia que se pierde una sola vez, queda por siempre irremediablemente perdida.

Termino con las palabras: tu padre o más aún tus padres y el resto de familiares tanto en Alemania como en Rusia y Dinamarca tienen los ojos puestos en tí al ser el mayor y eperan que no seas menos que un Theodor Schaeffer[1] *y, quiera Dios, seas después también un espíritu refulgente en el horizonte de la ingeniería.*

¡Que dios te de fuerza, salud, fortaleza de caracter y su mejor bendición! Pero para ello no te apartes de su camino. Amén!

*T*u Padre..."

Se incluyen aquí una generosa parte de esta valiosa carta, no solamente para caracterizar ampliamente la forma de ver la vida del padre de Cantor y las esperanzas puestas en el hijo mayor, sino también porque en esta carta, que Cantor conservó en vida, contiene temas que serían importantes en su vida posterior. La advertencia sobre mantener a distancia e imponerse a los adversarios la necesitó Cantor en las situaciones dificiles; quizá se deba agradecer en parte a las eneñanzas paternas, que este espiritú creador no haya sido prematuramente derrotado y que la posteridad no se viera privada de su obra. En

[1]Aparentemente un Maestro en el internado en el que estudio Cantor.

relación a la carta recién presentada y su fuerte impacto religioso en la educación, cuyos efectos reconoceremos aun en etapas posteriores, no es menos característica otra carta que el padre envió a su hijo el 18 de agosto de 1862 desde Rigi-Kaltbad con motivo de su último examen en la escuela de oficios y en la que se escribe:...*"¡Dios te bendiga y te de suerte en el examen de hoy. Amén!– En situciones críticas de la vida una profunda y feliz confianza en dios y una sentida oración para el dador de todo lo bueno al principiar el dia de trabajo proporciona solidez, ánimo y confianza Y con ello dios ordena ¡con frescura, placer y serenidad al trabajo!..."*

El hijo se educó en las creencias evangélico-luteranas, a las que el padre (al menos desde 1845) pertenecía. No obstante, en las futuras creencias e intereses de Cantor será reconocible junto a su religiosidad una especial relación con el catolicismo, que el poseía por su madre católica.

En su certificado de estudios (septiembre de 1860) de la escuela real de Darmstadt en el que en todas las materias así como en aplicación y conducta obtuvó buenas notas, se escribe respecto a Matemáticas: "Su aplicación y empeño son ejemplares; sus conocimientos en las matemáticas elementales incluyendo trigonometría son muy buenos; su rendimiento es digno de elogio". La nota en geometría de representación dice: "Aplicado, rendimiento y atención excelentes". Por su rendimiento en la escuela superior de oficios, en la que asistió tanto a las secciones superiores como a las elementales durante un año, obtuvo en agosto de 1862 la observación: "Él se mostró como un estudiante muy dotado y aplicado." Cantor se sometió a una prueba de madurez (que comprende también lenguaje) en el otoño de 1862 para estudiar ciencias naturales en la que en la mayoría de las materias recibió como nota "Muy bien", "se reconoce con madurez No. 1 para el estudio de las ciencias naturales."

Finalmente la gran inclinación a las matemáticas, que animaba a Cantor, no permaneción indiferente a su padre. Su respeto para la ciencia se reconoce mediante una carta que envió a su hijo el 19 de octubre de 1861 a Darmstadt: *"...Naturalmente me alegro también de que los nuevos cursos superiores reaniman tu interes por las ciencias. ¡Cuidado y mantenimiento del amor a la ciencia, como las Vesalinas cuidaron el fuego santo, cuya lampara incandescente nunca debe apagarse! La eterna y nunca extinguible luz de la ciencia es un fuego más santo y puro aun, que aquel. Si el hombre cuida esta luz según su capacidad individual, entonces habrá cumplido con su deber.."* El hijo pudo agradecer a su padre por la aprobación de sus planes en la siguiente carta, fechada en Darmstadt el 25 de mayo de 1862 y que es la carta de Cantor más antigua que aún se conserva: *¡Mi querido papá! Ya puedes imaginarte cuánto me ha alegrado tu carta; ella determina mi futuro. Los últimos días transcurrieron para mi en medio de dudas e incertidumbre; no podía llegar a ninguna determinación. Inclinación y obligación se oponian continuamente. Ahora estoy feliz, cuando veo que no te aflige que yo siga mis deseos. Espero te alegraras por mi, querido padre, pues mi alma, mi Yo entero vive en mi profesión; lo que el hombre quiere y puede, y para lo que una voz interior desconocida y misteriosa lo conduce, él lo logra!..."*

En el otoño de 1862 emprende Cantor estudios en Zürich; en las cartas enviadas hacia allá por su padre, se observa que éste no está menos preocupado por la formación musical de su hijo que, por ejemplo, por la introducción de un sistema estricto y planes diarios, sobre lo que él escribe: "...este es para un futuro sabio, como me parece– no como sé, algo indispensable..." Después del primer semestre Cantor tuvo que abandonar Zürich como consecuencia de la muerte de su padre a principios de 1863. A partir del otoño de este año estudia Matemáticas, Física y Filosofía en Berlín, donde la trinidad Kummer, Weierstraß, Kronecker atraían los mejores talentos y estimulaben a los oyentes (entonces todavía pocos) en diversas direcciones. Sólo el semestre de verano de 1866 lo paso en Göttingen. La mayor influencia en sus intereses científicos la ejerció Weierstraß. Es remarcable y al mismo tiempo característico de la amplitud de horizontes de Weierstraß, su criterio libre de prejuicios y premonitorio; él tuvo un gran respeto por su estudiante que conservó invariable a pesar de momentaneos ofuscamientos durante su vida, y una temprana y comprensiva recepción de sus modernas ideas.[1] Según la información de Lampe,[2] Cantor convivió en su epoca de Berlín a parte de con la comunidad matemática, con un círculo estrecho de colegas, que se reunían semanalmente en la cantina Rähmel; además de algunos invitados ocasionales este círculo comprendía a Henoch (posteriormente editor de los *Fortschritte*), Lampe, Mertens, Max Simon, y Thomé, entre los que especialmente este último fue muy cercano a Cantor. También se contaba entre sus compañeros de estudio a H. A. Schwarz, dos años mayor, quien a diferencia de su maestro Weierstraß, manifestó una viva desconfianza hacia las ideas de Cantor.[3]

El 14 de diciembre de 1867 se doctora Cantor en la Universidad de Berlín con un estudio serio *D*isquisitiones arithmeticae así como con la Teoría de números de Legend, un trabajo caracterizado por los jurados como "disertatio docta et ingeniosa" [1], dedicada a sus hermanos y a sus tutores Eduard Flersheim y Bernhard Horkheimer; en la prueba oral obtuvo "magna cum laude". Frente a sus colegas ya doctorados Simon, Henoch y Lampe Cantor defendió las tesis: I. In arithmetica methodi mere arithmeticae analyticis longe praestant. II. Num spatii ac temporis realitas absoluta sit, propter ipsam controversiae naturam dijudicari non potest. III. In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi. La segunda tesis atestigua los estudios filosóficos iniciados ya seriamente en la universidad, mientras que la tercera es característica de los objetivos matemáticos de Cantor. Para la teoría de conjuntos misma los resultados logrados por él no son tan importantes como lo revolucionaria forma de establecer los problemas, que tendría gran influencia en su propio trabajo posterior.

Parece ser que Cantor impartió clases un corto periodo de tiempo en Berlín en una escuela para señoritas; en cualquier caso en 1868, después de aprobar el examen gubernamental, se hace miembro del seminario de Schellbach para maestros de matemáticas.

La tesis de habilitación [5], en base a la cual se establece Cantor en Halle en 1869 como Privatdozent, pertenece al igual que algunos pequeños trabajos de los años 1868-72 a su primer área de trabajo, la aritmética, a la que él posteriormente sólo regresó esporádicamente. No obstante, esta dedicación a la teoría de números propuesta principalmente por Kroenecker no fue un asunto casual, sino que la pureza y belleza de esta disciplina lo cautivó; esto se muestra además de en la ya mencionada primera tesis doctoral, en la tercera que defendió en su habilitación: "Numeros integros simili modo atque corpora coelestia totum quoddam legibus et relationibus compositum efficere."

Heine, que entonces trabajaba como Profesor Ordinarius en Halle, reconoció inmediatamente en qué forma afortunada Cantor reunía una extraordinaria fantasia y una perspicacia poco común (véase [VI]). Fue de importancia decisiva que él motivará a su joven colega, tan pronto como llego a Halle, a ocuparse de la teoría de series trigonométricas (véase [6], p. 130, nota de pie de página). El empeño con el que Cantor se volcó a este trabajo no sólo propició una serie de éxitos sustanciales, sino que lo condujo a la teoría de conjuntos de puntos y simultáneamente a los números ordinales transfinitos, como lo muestra el trabajo aparecido en 1872 [10]. Este contiene, por un lado las primeras nociones básicas de la teoría de conjuntos de puntos, a saber, la noción de conjunto derivado, de la que Cantor originó ya en 1870 la

[1] Véase también las páginas 16 y siguientes. Del intercambio epistolar (claramente no muy numeroso), entre 1876 y 1891 entre Cantor y Weierstraß, no he logrado acceder más que a la carta que Cantor mismo publicó en [35].

[2] Véase Engel en estos Jahresbericht **20**(1911), p. 265.

[3] Recuerdos personales del seminario matemático de Berlín 1912-13.

idea de los números transfinitos (véanse las expresiones de Cantor [16,II], p. 358 nota de pie de página, así como la nota de pie de página en la p. 32 de [V]); por otro lado se encuentra ahí mismo el resultado que, después de la teoría de conjuntos, ha hecho inmortal el nombre de Cantor: su teoría de los números irracionales como sucesiones fundamentales.[1] También encontramos en este trabajo el reconocimiento de la necesidad, en la fundamentación de la geometría, de utilizar un axioma, que hoy nos es conocido como el de axioma de Cantor; al mismo tiempo en forma independiente, aparece el escrito de Dedekind "Continuidad y números irracionales", al que Cantor se dedicó intensiva y repetidamente (incluso en correspondencia con Dedekind). Por cierto, Cantor se quejó ya en 1873, en una carta a Dedekind, del uso que en el siguiente volumen de los Annales hizo F. Klein del axioma de Cantor y Dedekind "en la escabrosa e indeterminada versión de la nueva geometría" sin mencionar a ninguno de los autores.[2]

En esta epoca, alrededor de 1871, comienza (quizá con el recién mencionado trabajo) a transformarse la vida de Cantor del hasta ahora desarrollo normal en la de un talentoso erudito; en un segundo periodo, que comprende los años 1871-1884, ocurre el mayor esfuerzo coronado con éxito del genial investigador.

Primero, los años 1872-74 traen dos sucesos significativos para la vida privada de Cantor. En uno de sus viajes a Suiza, que en sus años mozos no parecen haber sido pocos, en 1872 en Gersau concoce por casualidad a Dedekind. Esto condujo además de a frecuentes encuentros personales, mayormente en Harzburg, a un posterior intercambio epistolar [II], del que se han conservado numerosas cartas de los años 1873-79 y de 1899. A pesar de que el contenido matemático de estas cartas es muy limitado, dan una buena idea de la forma de trabajo y del estado de ánimo de Cantor en esa epoca y de la diferencia de ambas personalidades, que no obstante permanecieron unidas por una resistente amistad y mutua estimación. De allí se origina, parafraseando a Ostwald, Cantor como el "romántico", mientras que Dedekind es el "clásico"; esta diferencia, que también se encuentra en el ritmo de las cartas de Cantor (que se precipitan en tormentas y apremios científicos) en oposición a Dedekind que siempre con la misma puntualidad contesta, así como la nominal diferencia de edades perceptible al inicio de la correspondencia (Dedekind era 14 años mayor), permite reconocer con toda claridad a Cantor más bien como el que cuestiona y propone. Como él expresa en una de sus primeras cartas: *"necesidad, de conversar con Usted de asuntos científicos y tatarlos personalmente más cercanamente"*, denota una repetuosa y enorme gratitud que esta relación trae para Cantor, así como por las *"muchas motivaciones y abundantes enseñanzas"*, que él recibió de los *"escritos clásicos"* de Dedekind (carta del 31 de agosto de 1899). De hecho, más de lo que es aparente en las cartas, las marcadas diferencias en la construcción de las primeras y tardías publicaciones de Cantor en teoría de conjuntos muestran la profunda influencia de la forma de pensar de Dedekind, más abstracta y lógica, que tiende a una sistematización más acabada, en oposición al estilo más constructivo y de un empuje más desordenado del joven Cantor–una característica que corresponde a las actuales tendencias en la investigación básica; por ello en el mundo matemático actual se juzgará en forma muy distinta, si se debe ver este desarrollo en Cantor como un progreso o como una cierta reducción del contenido matemático.

[1]La introducción de los números irracionales por Heine en su *E*lemente der Funktionlehre Journal f. Math. **74**(1872), págs. 172-188, se basa totalmente en las ideas de Cantor; véase la introducción al trabajo de Heine, así como [28,I], p. 90.

[2]Para describir una naturaleza tan obstinada y temperamental como la de Cantor no se puede empezar por inhibir sus frecuentes cum ira et studio observaciones generales. Donde se den tales expresiones, hoy no es difícil, en vista del desarrollo histórico, distinguir entre la efemérides y subjetividad de lo juzgado imparcialmente.

En la epoca mencionada Cantor conoció a su futura esposa Vally Guttmann, que vivía en Berlín huerfana con tres hermanos (dos de los cuales eran banqueros, uno dirigió posteriormente el Hospital de Moabit en Berlín). Después de que él fue nombrado Profesor Extraordinarius en Halle en 1872, a principios de 1874 se comprometen, y en el verano se casan; en el viaje de luna de miel la joven pareja se encuentra con Dedekind en Interlaken. La pareja tuvo cuatro hijas y dos hijos, de los cuales tres hijas y un hijo aún viven; no hay habilidades matemáticas especiales en ninguno de los hijos. Desde el nacimiento de los hijos Cantor suele pasar las vacaciones en Harz, en cuyos bosques le agradaba caminar, siendo él una amante de la naturaleza.

Los años 70 traen para Cantor diversos éxitos: además de obtener en 1869 la categoría de miembro regular de la Sociedad de Ciencias Naturales de Halle, es elegido como miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de Göttingen en 1878– aparentemente la única academia alemana o Universidad fuera de Halle que honró públicamente los méritos de Cantor– adicionalmente recibe un nombramiento rechazado por él a la Academia en Münster en 1878 y la obtención de una plaza de Profesor Ordinarius recién creada en Halle en 1879. Sin embargo, ya en esos años se hicieron sentir algunas situaciones que empañaron su vida en el decenio siguiente. En 1874 aparece en la revista Crelles, a cuya redacción pertenecía Kronecker, el trabajo [13], en el que, se puede decir hoy, se encuentra el nacimiento de la teoría de conjuntos pues en éste por primera vez, se demuestra la existencia de dos conjuntos infinitos no equivalentes; es decir, dos cardinalidades transfinitas distintas entre sí; este resultado fue inesperado para Cantor, él se había esforzado en encontrar una aplicación de los números naturales sobre el continuo [IV].[1] Tan sólo el siguiente trabajo [14], en el que se demuestra, sorpresivamente incluso para él mismo, la aplicabilidad de los continuos de distintas dimensiones entre sí, propuesto el 12 de julio de 1877, permaneció en la redacción del Crelles sin publicar más alla del tiempo normal a despecho de la impaciencia de Cantor y a pesar de que, según información de Cantor [IV], Weierstraß intercedió por el trabajo. En noviembre se quejó Cantor amargamente con Dedekind, que la impresión se retrasaba *"en una forma poco clara y mal intencionada"* y, contrario a lo prometido por la redacción, se debía posponer para un trabajo más adecuado posterior; es claro que la razón estaba en lo paradójico, para aquellos tiempos, del resultado (véase la historia del origen de este trabajo en pág. 39). Por suerte, Dedekind logró detener a su amigo en su intención de revocar el artículo y publicarlo como una separata especial en Vieweg; también para el Crelle terminaron pronto las dificultades y el trabajo apareció oportunamente. Sin embargo, esta fue la última publicación de Cantor en el Crelle; todo el episodio, que al inicio se tomó con demasiada importancia por Cantor, parece deberse a la posición contraria de Kronecker a las ideas de Cantor, de la que se debió originar la crisis del año 1884 (véase la carta de Cantor a Mittag-Leffler del 25 de enero de 1884). Finalmente su nombramiento como Profesor Ordinarius en Halle le alegro sólo hasta cierto punto, pues el anhelaba otra ciudad y un círculo de influencia mayor; ya en 1874 expresó [IIs]: *"hasta ahora, durante las vacaciones, no permanezco aquí mucho tiempo pues en cierta medida lo único que me ata a Halle desde hace cinco años es la profesión universitaria alguna vez elegida"*. Su suposición, de que la no obtención de una posición fuera de Halle se debía a una opinión desfavorable sobre su trabajo de algunos colegas influyentes, parece ser muy razonable dado el prestigio indisputable que tenía entonces Kronecker. Así, tampoco fue exitosa una solicitud de Cantor al ministerio sobre una

[1] Véase también una carta de Cantor a Jourdain del 28 de febrero de 1906, véase Archiv d. Math. u. Phys. **22**(1914), p. 12.– La opinión de Schoenflies (Mengenbericht del 1900, p. 50 abajo), de que la innumerabilidad del continuo se puede encontrar ya en el libro de Bolzano "Paradoxien" (al inicio del §49), no puede ser compartida en vista de la poca claridad en las nociones allí utilizadas.

posición en Berlín en el año 1883, con la que no contaba mucho con obtenerla, más bien quería entrar en confrontación con Schwarz y Kronecker y provocó un fuerte efecto contrario en Kronecker.

Una observación sorpresiva, poco conocida y difícil de encontrar de Cantor parece demostrar que él ya a principios de los años 70 tenia una idea clara de la trascendencia de sus ideas y de la creciente oposición a ellas; y esto en una epoca en la que apenas se encaminaba hacia el infinito actual debido a sus investigaciones sobre series trigonométricas, y en la que su primer trabajo, estrictamente hablando, sobre teoría de conjuntos [13] no se había hecho público. Su intención de dar una conferencia en la sociedad de ciencias naturales de Halle, cuyo tema necesariamente debía ser accesible a un amplio público, lo encaminó al cálculo de probabilidades, al que se había dedicado desde algunos años antes (carta a Dedekind del 11 de septiembre de 1873); con este plan en mente, preguntó a Dedekind sobre una conferencia que éste había impartido antes en un tema similar. En su conferencia del 6 de diciembre de 1873 [12] refiere Cantor (pág. 36) relativo al francés de Meré (siglo XVII), que desafió la autoridad de Blaise Pascal entre los matemáticos en un problema del cálculo de probabilidades: *"el caballero de Meré puede, según creo, ponerse como ejemplo y advetencia a los opositores en las ciencias exactas, los cuales se pueden encontrar en todos lados y en cualquier epoca, porque es fácil hallarlos, allí donde intentan herir mortalmente a la ciencia, cuando ésta trata de encontrar una nueva rama, más hermosa, si esto es posible, y más fructífera que las originales– como lo era el cálculo de probabilidades a los ojos del caballero de Meré."*–. Adicionalmente se debe observar que Cantor en sus cartas a Mittag-Leffler hablaba regularmente de Kronecker bajo el seudónimo de El Sr. de Meré.

En cambio, Weierstraß mostró amplia comprensión, para aquel tiempo, por los esfuerzos de Cantor. Al igual que el interés mostrado en la epoca estudiantil de Cantor, cuando éste describió una enumeración de los números racionales en el seminario de Weierstraß, también entendió, depués de cortos titubeos iniciales, la noción de numerabilidad que le presentó Cantor a fines de 1873, y hace uso de la numerabilidad de los números algebraicos en una cuestión de la teoría de funciones de variable real.[1] De la misma manera, fue a propuesta de Weierstraß, que Cantor mismo uso la noción de numerabilidad en análisis (véase abajo, Parte III, pág. 47), mientras que Weierstraß se dedicó a la teoría de funciones reales en 1885 debido a la teoría de la medida de Cantor en [23].[2]

El comienzo de los años 80 trajo consigo las creaciones más notables de Cantor, entonces sus geniales ideas sobrepasarón cualquier frontera imaginable, pero también ocurrió la crisis más difícil de su vida que tendría consecuencias en el resto de sus días.

El trabajo [16] que apareción en seis partes en los años 1879-1884 pertenece a fenómenos en la historia, donde una idea absolutamente nueva que se opone totalmente a la forma de pensar del pasado y del presente, y que es capaz de generar una nueva epoca en el pensamiento, se impone y cristaliza con intrepidez y novedad. En 1870 concibe Cantor por primera vez la idea de los números transfinitos; en 1873 reconoce el significado de la noción de enumerabilidad y el abismo entre ella y el continuo; apenas entonces se decide a presentar a sus contemporaneos sus ideas conciente de sus repercusiones.[3] Este

[1]Véase la carta de Weierstraß a P. du Bois-Reymond del 15 de diciembre de 1874 (*Acta Mathematica* **39**(1924), p. 206) y la carta de Cantor a Jourdain del 29 de marzo de 1905 ([V], p. 48).

[2]Véase la carta de Weierstraß a Sonia Kowalewsky del 16 de mayo de 1885 (*Acta Math.* **39**(1924), págs. 195 y siguientes.

[3]Por ejemplo, él habla: *"de las áreas, influenciadas por la teoría de variedades o con las que tiene un contacto más estrecho, como por ejemplo la teoria moderna de funciones por un lado y con la Lógica y la teoría del conocimiento, por el otro"* ([16 V], p. 562.)

trabajo, al menos su quinta parte, que también apareció en forma independiente (véase [27]), pertenece no sólo al ámbito de las matemáticas y la filosofía, sino que es significativo para la historia de la ciencia y del pensamiento humano; sin duda se mostrará incluso para opiniones fuera de estos contextos como un trabajo completo y valioso. La redacción de los Mathematischen Annalen llevo a cabo una temeraria decisión, pero al mismo tiempo se ganaron eterno reconocimiento al abrir las páginas de su revista a estas ideas, que en aquel entonces escandalizaban al mundo matemático y filosófico y tuvieron que librar una cruenta lucha durante un decenio más para lograr su reconocimiento. Posteriormente reseñaremos el contenido total del trabajo (págs. 40 y siguientes), pero vale la pena citar algunos pasajes de la quinta parte (fechada en octubre de 1882); por un lado son de especial interés para un círculo más vasto que el puramente de teoría de conjuntos, por otro, permite percibir la severa lucha efectuada en esa epoca entre el investigador y el hombre y que contribuyó, al menos en parte, a sacudir su salud:

La presentación que hasta ahora tenemos de nuestras investigaciones en la teoría de variedades [1] *ha llegado a un punto en el que su posterior desarrollo depende de una generalización de la noción de número más alla de su significado actual, y de hecho, esta extensión se plantea en una dirección en la que hasta donde yo sé, nadie lo ha intentado.*

La dependencia, en que me veo, de esta generalización de la noción de número, es tan grande, que sin ella me sería literalmente imposible llevar a cabo el menor avance en la teoría de conjuntos; sirva como rectificación en esta situación o disculpa, de ser necesario, que he introducido ideas completamente nuevas en mis consideraciones. Pues se trata de una generalización, respectivamente extensión, de los números reales enteros, más alla del infinito; tan atrevido como esto pueda parecer, puedo, no obstante, manifestar no sólo esperanza sino el más firme convencimiento de que esta extensión será vista con el tiempo como totalmente natural, simple y adecuada. De ninguna manera me es ajeno que con esta empresa me coloco en cierta oposición a las ideas actuales sobre el infinito matemático y a los puntos de vista que ahora se sostienen sobre la esencia de la magnitud numérica...

...Los números reales enteros infinitos, que definiré a continuación y a los que he sido conducido desde hace muchos años, sin que haya logrado concientemente considerarlos como números concretos con un significado real[2]*, no tienen relación alguna con la primera de las dos formas, la de impropia-infinita, por el contrario tienen el mismo carácter de certidumbre que el que posee el punto infinitamente alejado en la teoría de funciones analíticas; así, ellos pertenecen a las formas y posibilidades de lo propio-infinito.–Mientra que el punto al infinito del plano complejo es único respecto al resto de los puntos del plano complejo, no tenemos un único número entero infinito, si no una sucesión infinita de tales números, totalmente distinguibles entre sí y que están en una relación númerica bien definida entre sí y respecto a los números enteros finitos. Estas relaciones no son las que se podrían generalizar de las correspondientes entre números finitos; de hecho, lo último se manifiesta con frecuencia solamente en los distintos tamaños y formas de lo impropio-infinito...*

...Es bien sabido que en la edad media se encuentra continuamente entre los escolásticos el "infinitum actu non datur" como una afirmación inviolable originada en Aristoteles. Pero cuando se consideran las razones que Aristoteles tenía contra la existencia real del infinito (sirva como muestra su "Metafísica", Libro XI, Cap. 10), entonces el motivo principal se reduce a una suposición, que involucra un petitio principii*, a saber, a la hipótesis de que sólo habría números finitos, de donde él infiere, que él sólo conoce enumeraciones de conjuntos finitos. Yo creo que antes he demostrado, y se manifestará más claramente en lo sucesivo en este trabajo, que pueden tomarse enumeraciones tan concretas tanto en conjuntos finitos como en conjuntos infinitos, suponiendo que se puede prescribir una ley en los conjuntos, mediante la cual se convierten en conjuntos* bien ordenados*. Que sin una de tales sucesiones de los elementos de un conjunto no se puede lograr una enumeración de él, está en la naturaleza de la noción de* enumeración*; incluso para conjuntos finitos se puede efectuar una enumeración sólo mediante una cierta colocación sucesiva de los elementos enumerados, pero aquí se presenta la índole particular de los conjuntos finitos, el que el resultado de la enumeración, la cantidad, es independiente de la ordenación que se tiene; en cambio, entre los conjuntos infinitos, como hemos visto, no ocurre*

[1] Con estas palabras denoto una noción muy amplia, que hasta ahora he tratado de representar sólo en la forma especial de una teoría de conjuntos geométrica o aritmética. Por una variedad o conjunto entiendo, en general, cualquier totalidad que se puede pensar como un un ente, es decir, cada escencia de elementos determinados que conforman un todo de acuerdo a una regla, y creo definir aquí algo que está relacionado con la ειδος o ιδέα platónica, así como también con lo que Platón en sus diálogos llama "Philebos o el mayor Bien" μιχτόυ. Él utiliza esto en contraposición a ἄπειρον, es decir, no acotado, no determinado, que yo llamo irreal-infinito, así como a πέρας, es decir, la frontera, y aclara que es una "mezcla" ordenada de los dos últimos. Que estos conceptos son de origen pitagórico, lo expresa el mismo Platón; véase A. Boeckh, *Philoalos des Pythagoreers Leheren*, Berlín, 1819.

[2] Hasta ahora los llamé "símbolos determinados de infinito"...

en general tal independencia, sino que la cantidad de elementos de un conjunto infinito es un número entero infinito también determinado por la ordenación misma; aquí y sólo aquí radica la diferencia esencial, dada por la naturaleza misma y por lo tanto inamovible, entre el infinito y lo finito; pero nunca más se negará la existencia del infinito a causa de esta diferencia, por el contrario lo finito también se mantendrá; si se quita una, se debe quitar también la otra; ¿a donde llegariamos por este camino?...

Llegue casi contra mis deseos en forma lógica y en el transcurso de muchos años de esfuerzos e intentos científicos a la idea de no considerar lo infinitamente grande simplemente en la forma de lo creciente sin límite o, en la forma estrechamente relacionada de convergencia de series infinitas, introducida ya en el siglo XVII, sino representarlo mediante la forma del infinito matemático acabado mediante números, en contraposición a valiosas tradiciones para mi, y también por ello no creo que existan razones que no haya considerado...

Tan diferentes como son las enseñanzas de estos escritores [Locke, Descartes, Spinoza, Leibniz], coinciden sin embargo en la posición sobre lo finito e infinito, en el punto en que a la noción de número corresponde la finitud del mismo, y que por otro lado, el infinito verdadero o absoluto, que está en Dios, no permite ninguna determinación. En lo que a esto último respecta, coincido totalmente, no puede ser de otra forma, porque la afirmación "omnis determinatio est negatio" está fuera de duda para mi; por el contrario, veo en primera fila, como he dicho antes en la discusión de las razones aristotélicas contra el "infinitum actu", un petitio principii, que aclara ciertas contradicciones presentes en todos estos autores y, también en Spinoza y Leibniz. La suposición de que aparte de lo absoluto, inalcanzable mediante alguna especificación, y de lo finito, no puede haber algo mas, aun si esto no es finito pero si definible mediante números, lo que yo llamo infinito propio, no la encuentro adecuada e incluso está, según mi opinión, en contradicción con ciertas afirmaciones de los dos últimos filósofos. Lo que yo afirmo y que creo haber demostrado en este trabajo y otros intentos previos, es que existe un Transfinitum *(también llamado* Suprainfinitum*) después del infinito, es decir, una jerarquía no acotada de ciertos estratos, que por su naturaleza no son finitos, sino infintos, pero que al igual que el finto se pueden determinar mediante ciertos números bien definidos y distintos entre sí. Por lo tanto, con las magnitudes finitas no se ha cerrado el dominio de las magnitudes definidas, y las fronteras de nuestro conocimiento se pueden extender en forma correspondiente, sin que para ello sea necesario violentar nuestra naturaleza. En lugar de las afirmaciones aristotélico-escolásticas mencionadas en §4 propongo otra: Omnia seu infinita* definita *sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt...*

Si el considerar infinitamente grande, cerrado *propicia dificultades entre sí y con comparaciones con números finitos o entre sí y con los números enteros asociados con los números fintos mediante prescripciones fijas, éstas estarían relacionadas con la percepción de que los nuevos números en muchos aspectos tienen el carácter de los originales, pero que en muchas otras facetas tienen una naturaleza singular, que con frecuencia trae consigo que distintas características se condensan en un mismo número, mismas que en los número finitos no aparecen juntas, sino separadas. Si se encuentra en alguno de los párrafos previos de los lugares citados el razonamiento de que, de existir un número entero infinito, éste debe ser tanto par como impar y que estas propiedades no pueden coexistir juntas, entonces no existe tal número.*

Tácitamente se supone aquí que propiedades entre los números, que son ajenas entre sí, también los son entre los nuevos, y se concluye la imposibilidad de la existencia de números infintos. ¿Para quién no es aparente la falacia? ¿No está entonces asociada cualquier generalización o extensión de una noción con una renuncia a particularidades, aunque sea impensable sin una de ellas? ¿No se ha considerado en los tiempos modernos como uno de los mayores progresos, importante para el desarrollo del análisis, la idea de introducir las magnitudes complejas, sin ver inconveniente, el que ellas no se puedan llamar negativas o positivas? Y ahora es un paso similar que me atrevo a dar; tal vez será incluso más fácil para la mayoría seguirme, de lo que fue pasar de los números reales a los complejos; pues los nuevos números enteros tienen a pesar de todo, como cantidades, la misma realidad que los originales, aunque se distinguen firme y sustancialmente de estos, mientras que la introducción de las magnitudes complejas ha presentado tantas dificultades que sólo ha sido posible representarlos geométricamente a través de puntos o rectas en un plano después de mucho esfuerzo..

...A causa de esta posición especial, que la distingue [a la matemática] de las otras ciencias y de una explicación para el tipo sencillo e informal de dedicación que ella propicia, merece especialmente el nombre de matemática libre*, una denominación que yo, si tuviése la elección, preferiría en lugar del ya usual mátematica "pura".*

La matemática es en su desarrollo totalmente libre y por supuesto sólo atada a la consideración de que sus conceptos son consistentes en sí mismos y con relaciones fijas dadas por definición con conceptos ya existentes, previamente dados y acreditados.[1] *En particular, para la introducción de nuevos números sólo está obligada a dar definiciones de ellos, por las cuales obtienen certidumbre y, en estas circunstanicas, una cierta relación con los números viejos que*

[1]El proceder para la formación correcta de conceptos es, según mi opinión, en general el mismo; se introduce una cosa sin propiedades, que de origen no es más que un nombre o un símbolo A, y se da a ella ordenadamente, distintas, tal vez infinitas propiedades comprensibles, cuyo significado es conocido por ideas ya presentes, y que no se contradicen entre sí; así se determinan las relaciones de A con los conceptos ya presentes y con nociones asociadas; si ya se terminó con esto, entonces están dadas las condiciones para generar el concepto A, que dormía en nosotros y aparece listo en el Ser, provisto por la realidad subjetiva, que se puede exigir en los conceptos; constatar su significado

en caso dado permite distinguirlos entre sí. Tan pronto un número satisface todas estas condiciones, se puede y se le debe considerar en la matemática como real y existente. En este punto vislumbro la razón dada en §4, de porque se deben considerar como existentes a los números racionales, irracionales y complejos, tanto como a los números enteros positivos finitos.

No es necesario, creo, en estas afirmaciones temer algún peligro para la ciencia, como ocurre en muchos casos; por un lado, las condiciones descritas, entre las cuales bastaría con emplear la libertad de la formación de números, son tales que imponen un margen de acción estrecho; si no que además cada concepto matemático trae consigo el correctivo necesario; de no ser fructífero o no tener sentido, se muestra inmediatamente su inutilidad, por lo que se eliminará debido a su falta de éxito. Por el contrario, me parece que cada inhibición superflua de los impulsos científicos trae consigo un peligro mucho mayor y peor aún, porque de la esencia de la ciencia no se puede obtener ninguna justificación para ello; pues la esencia de la matemática *está precisamente en su* libertad.

Si esta cualidad de la matemática no la hubiese obtenido de las razones mencionadas, entonces me hubiesen conducido a las mismas opiniones la evolución misma de la ciencia, como la percibimos en nuestro siglo.

Si Gauß, Cauchy, Abel, Jacobi, Dirichlet, Weierstraß, Hermite y Riemann hubiesen estado obligados a que sus nuevas ideas estuviesen sometidas a un control metafísico, no gozariamos, por cierto, de la magnífica estructura de la nueva teoría de funciones, que, aun cuando fue bosquejada y elaborada sin motivos fugaces o pasajeros, no obstante revela ya ahora en sus aplicaciones a la mecánica, astronomía y a la física matemática, como era de esperarse, su significado; no hubiésemos visto este explosivo crecimiento en la teoría de las ecuaciones diferenciales debido a Fuchs, Poincaré y muchos otros, si esta mágnifica fuerza hubiése sido detenida por influencias extrañas; y si Kummer no se hubiése tomado la fructifera libertad de introducir los así llamados números "ideales" en la teoría de los números, ahora no tendríamos la posibilidad de maravillarnos de los extraordinarios trabajos aritméticos y algebraicos de Kronecker y Dedekind...

El concepto de "continuo" ha desempeñado en todas las partes del desarrollo de la ciencia no sólo un importante papel, sino que ha generado las mayores controversias y las más acres disputas. Esto se debe quizá a que la idea que encontramos en su fundamento, al aparecer entre los descontentos tomó un contenido distinto porque no se trasmitió a ellos la definición completa del concepto; pero también puede ser, y es lo que me parece más probable, que la idea del continuo se generó ya entre los griegos, quienes primero la concibieron, con la claridad y plenitud necesarias, para eliminar la posibilidad de opiniones distintas entre sus sucesores. Así, vemos que Leukipp, Democrito y Aristóteles consideraban al continuo como algo compuesto que consiste en ex partibus sine fine divisibilibus, *mientras que Epícuro y Lucrecio pensaban que se componía de sus átomos como cosas finitas, de donde surgió una gran controversia entre los filósofos, entre los cuales algunos siguieron a Aristóteles y otros a Epícuro; otros en cambio, establecieron, para mantenerse alejados de esta discusión, junto con Thomas de Aquino, que el continuo no se componía de de una cantidad finita o infinita de partes, sino que no tenia partes; esta última opinión me parece menos una aclaración que el reconocimiento tácito de que no se había llegado al fondo del asunto y es preferible apartarse de la cuestión. Aquí vemos el origen medioevo-escolástico de las apreciaciones que aún hoy en día encuentran defensores mediante las cuales se deduce que el continuo es una noción indivisible o también, como otros expresan, una idea puramente abstracta para la que difícilmente se puede dar una conceptualización; cada intento aritmético de desentrañar este* misterio *será visto como una usurpación inadmisible y rechazada con ahinco; las naturalezas mojigatas llegan por ello a la conclusión de que el "continuo" no es una* noción lógico-matemática, *sino más bien un dogma religioso.*

No es mi intención reavivar esta discusión, y este espacio me parecería muy reducido para tal controversia; sólo me veo obligado a desarrollar la noción del continuo lo más brevemente posible y considerando solamente la teoría matemática de conjuntos, tan objetiva y lógicamente como yo la concibo y como la necesito para la teoría de variedades. Esta adaptación no es fácil para mi, pues entre los matemáticos, en cuya autoridad me gustaría apoyarme, ninguno se ha dedicado al continuo en el sentido exacto que sería necesario aquí...

Primero debo aclarar que, según mi opinión, no me parece adecuado apelar a la noción de tiempo o a la intuición temporal *para el debate sobre la noción de continuo, muy anterior y más general...*

Del mismo modo, estoy convencido de que con la así llamada forma intuitiva del espacio *no se llega a ninguna parte, al tratar de lograr una explicación sobre el* continuo, *pues sólo con ayuda de una noción de continuo ya lista, el espacio y las imágenes representadas en él se logra obtener un contenido, con el cual se pueden convertir en objetos de investigación matemática objetivos, exactos y no de simples consideraciones estéticas, o de perspicacias filosóficas o de comparaciones inexactas.*

Con lo anterior sólo me resta tratar de proponer, con ayuda de la noción de número real dada en §9, una noción de continuo de puntos puramente aritmética, tan general como sea posible...

En la mounstrosa tensión, asociada con la concepción de tan arrolladoras ideas y su posicionamiento frente a la oposición de los investigadores de la epoca, aparecen como momentos epecialmente delicados dos dificultades especiales: el círculo originado por el problema del continuo y el agravamiento de la

transitorio es un asunto de la metafísica.

confrontación con Kronecker. Acerca de ambos estamos bien informados por la carta, editada por Schoenflies, de Cantor a Mittag-Leffler del año 1884 (véase [III]), que marcó un cambio decisivo en la vida de Cantor.

Cuando al comienzo del año 1884 el trabajo [16] estaba listo, se continuó la investigación de la partición de los conjuntos infinitos en dos–en numerables y en equivalentes al continuo lineal– descubierta ya en [13] y destacada en [14], donde principalmente los conjuntos "perfectos" se mostraron como pertenecientes a la segunda clase. Por otro lado, Cantor había introducido los números ordinales de la segunda clase (como símbolos de la multiplicidad de los conjuntos derivados), igualmente basándose en los conjuntos de puntos, utilizando procesos límite similares a la generación de los números irracionales mediante sucesiones fundamentales. Con esto aparece como extraordinariamente plausible la hipótesis, que él de hecho afirma poder demostrar al final de su trabajo [16VI] mediante los teoremas disponibles en ese momento, de que la segunda clase misma tendría la cardinalidad del continuo; la demostración de esta hipótesis habría significado una magistral conclusión para sus resultados. No obstante, permanecieron sin éxito sus intentos de demostrarla, tanto entonces como en el verano y otoño de 1884, cuando intentó aproximarse al problema con nuevos métodos ([III], págs. 16 y siguientes)[1]; incluso en noviembre retira su hipótesis en favor de una supuesta demostración de que al continuo no le corresponde ningún álef como cardinalidad–para luego contradecir esta idea días después. Así siguieron a los vanos esfuerzos el desánimo, el desinterés y la resignación; en otoño de 1884, es decir, después de la crisis de salud que en breve trataremos, se manifiesta un de abandono de la matemática. Se quiere apartar de ella totalmente y pondera una petición al ministerio, de cambiar sus actividades docentes de matemáticas a filosofía.[2] Especialmente en esa epoca emprende con especial ahinco, claramente asociado con sus problemas de salud, la tarea de probar que sería Francis Bacon el verdadero autor de los dramas de Shakespeare[3]; que él efectúa esta tarea también con devoción y tenacidad, lo atestiguan entre otros sus escritos [36] y [37]; después de su carta a Dedekind del 28 de julio de 1899, dejó en paz esta cuestión, que él en su periodo depresivo expuso incluso en sus clases y seminarios, sólo por falta de tiempo y dinero, pero su interés en ella lo acompañó durante toda su vida. Con este estado de animo, de resignación matemática se explica sólo parcialmente que en ese tiempo él haya expresado a Mittag-Leffler (véase págs. 31 y siguientes): el habría "emprendido el penoso y poco gratificante pero prometodor negocio de investigar los conjuntos de puntos" principalmente para utilizar los resultados "en la ciencia natural de los organismos", para los que los principios mecánicos disponibles hasta ahora no son suficientes, y a lo que él se ha dedicado desde hace 14 años.

Para tomar esta decisión de abandonar la matemática, que Cantor intenta desmentir en el transcurso del año 1885 con investigación en matemática pura, es probablemente más fuerte la desilusión sufrida por Cantor por la recepción de sus trabajos en el mundo matemático y filosófico que el fracaso con el problema del continuo. El investigador, entonces de 40 años, que apareció a la luz pública con sus

[1]Un intento de P. Tannereys de probar la hiótesis en el verano de 1884, se basó en una premisa falsa (*Bulletin de la Societé Math. de France* **12**(1884), págs. 90-96.

[2]De hecho, Cantor realizó ocasionalemnte ciertas incursiones filosóficas, por ejemplo sobre Leibniz, para, mediante comparación con sus ideas, explicar su propia teoría del infinito actual. Él acentuó que, como Profesor Ordinarius de la Facultad de Filosofía, tenía el derecho a impartir clases sobre sánscrito.

[3]"Francis Bacon, él y sólo él pudo haber sido el autor de estas obras maestras; pues es uno y sólo uno el genio que nos sale al paso, por un lado en los dramas, y por otro en los "ensayos de moral" y el resto de obras de Bacon..." se dice en una carta de Cantor a Mittag-Leffler del 17 de diciembre de 1884, en la que aparentemente se trata por primera vez este asunto.

nuevas ideas 10 años antes, albergaba el natural deseo de reconocimiento a su trabajo entre sus colegas y de influir en los nuevos científicos. Pero esto le fue negado por completo. Sólo en forma limitada para satisfacer sus deseos sirvió a Cantor la amistad de Mittag-Leffler, que perduró hasta el final y tan fuertemente cimentada que permitió ciertas diferencias (en parte reales, en parte sólo sospechadas) en los años 1884-85. Cuando Mittag-Leffler, en 1881 llegó a la recién fundada Universidad de Estocolmo y tomó parte en la fundación del *Acta Mathematica*, no invitó a Cantor, a servirse de la nueva revista para publicar, sino que motivó la traducción al francés de los trabajos [9], [10], [13], [14] y sobre todo de una gran parte de [161–V] y los publicó en el Volumen 2 del *Acta*. Estó significó para Cantor moralmente mucho, el respaldo por parte del novel investigador, y la posibilidad de fortalecer considerablemente sus relaciones con Weierstrass y con los círculos matemáticos parisinos, en un tiempo en el que el Crelles Jounal estaba cerrado para él y en el que la dominante influencia de los matemáticos berlineses (al parecer también de los de Göttingen) actuaba públicamente contra él. No se debe menospreciar otro efecto indirecto de esta asociación con Mittag-Leffler; además de los trabajos de Bendixon y Phragméns sobre conjuntos de puntos que empezaron a aparecer en 1883, por decirlo así en paralelo al trabajo de Cantor, en los volumenes del Acta de 1883-84 aparecen una serie de importantes *aplicaciones* de las nociones de la teoría de conjuntos y de los resultados de Cantor a problemas de la teoría de funciones (y geométricos), concebidos por Mittag-leffler mismo y por las nacientes estrellas en el firmamento matemático Poincaré y Scheefer. El trabajo de Poincaré, que utilizó la teoría de conjuntos de puntos en su investigación sobre la estructura de los dominios de existencia de funciones automorfas, paso primero inadvertido para Cantor, hasta que finalmente se convenció, en un viaje a París a comienzos de 1884, que Poincare conocía y apreciaba su trabajo.[1] Cantor puso muchas esperanzas en el efecto del trabajo de Mittag-Leffler que utilizaba la fuerza y el significado de las ideas de Cantor en un punto neurálgico de los intereses de entonces, el campo de la teoría de funciones de Weierstrass a saber, a la cuestión sobre la posible generación de funciones analíticas en puntos de singularidad dados de antemano. Tan profunda era su aflicción, que fue contraproducente la publicación del trabajo, principalmente por la fuerte posición de Kronecker en París.

Los filósofos tomaron con tantas dudas como los matemáticos los progresos de Cantor; la primera exposición detallada y comprensiva por parte de los filósofos (Ballauf, Wundt[2], Laas, H. Cohen) en la que también se encuentran indicaciones a los insuficientes avances de Cantor, se origina en B. Kerry.[3] Termina con la advertencia significativa de que la filosofía, que "antes podía considerarse el tratado de continuos en su relación con sus posibles constituyentes discretos" parece en las investigaciones de las variedades, otra vez "haber oiginado una nueva disciplina", en la que la ciencia que le dio vida debe seguir confianda, pero cuya propia existencia no se debe desaprovechar. Al mismo tiempo dió el matemático P. Tannery, él mismo dedicado a las ideas de Cantor, una introducción a las ideas teorico-conjuntistas destinada a filśofos y orientada a los problemas[4] filosóficos, de la que aparentemente Cantor no tuvo

[1] Según el testimonio de Mittag-Leffler (*Acta Mathematica* **50**(1928), p.26) Poincaré tradujo al francés para el *Acta* el trabajo fundamental [16].

[2] A cuyas objeciones así como a las de la escuela de Herbart (véase *Ztschr. f. exakte Philosophie 12*) se refiere también Cantor mismo al final de [26] y en [28 I]; en la última obra (págs. 99 y siguientes y 253-256) también sobre la reseña de Ballauf.

[3] "Über Georg Cantor Mannichfaltigkeitsuntersuchungen", *Vierteljahrsschrift f. wiss. Philosophie* **9**(1885), págs. 191-232.

[4] "Le concept scientifique du continu: Zénon d'Élée et Georg Cantor." *Reveu Philosophique de la France et de l'Étranger* **20**(1885), págs. 385-410.

noticia.

En primera fila, el punto de vista de rechazo no de los filósofos sino de la gran mayoría de sus colegas más cercanos, afectó a Cantor, en especial la posición de Kronecker. Aquí se encuentra el origen de la crisis de 1884. Hasta cerca de 1880 parece que la relación entre Kronecker y Cantor, a pesar de la posición de rechazo que desde un principio asumió el primero, a diferencia de Weierstraß, respecto de los intereses teorico-conjuntistas de su ex-alumno, era extraordinariamente buena; por ejemplo, ocurrió una visita de Cantor a Kronecker en el otoño de 1879. Pero en dos puntos importantes del trabajo escrito en 1882 [16 V], se aboga contra el carácter único de los números naturales y por la irrestricta libertad de la creación matemática (lo segundo se dió antes pág. 19), ambos se dirigen claramente contra Kronecker. Toda la amargura y rencor contra Kronecker, cuya influencia se extendía más alla de las fronteras alemanas, se dejan sentir en las cartas [III] del año 1884, de las que tan sólo a Mittag-Leffler existen 52, cargadas de incontrolable vehemencia. Con la colera se mezcla la preocupación, una publicación prevista para el *Acta Mathematica* (que por cierto no se publico allí) de un trabajo de Kronecker pretendía no sólo inflingirle más daño publicamente, sino también distanciarse del fiel y devoto amigo; esta exposición del pensamiento cientifico de Kronecker debía mostrar en particular que: "los resultados de la teoría moderna de funciones y de la teoría de conjuntos no tienen importancia real". Incluso en Hermite, y al parecer en Weierstraß, que junto con Kronecker eran entonces los personajes principales en la Matemática, resultó en ocasiones exitosa la influencia de Kronecker contra Cantor. Pero no por mucho tiempo; más bien ambos se volvieron afectuosos amigos de Cantor y admiradores de su trabajo, en respuesta a las manifestaciones de Poincare contra Hermite en el Congreso Internacional de Matemáticas en Roma 1908.[1] Entre tanto, ocurre un colapso en Cantor, seguramente no debido exclusivamente a la discordia, pero sí al menos agravado y desencadenado por ella– a comienzos de 1884, (posiblemente presente tiempo atras) una enfermedad síquica (una sicosis circular), dolencia que desde entonces se repitió ocasionalmente hasta su muerte y que varias veces lo obligó a visitar una clínica para enfermedades nerviosas. La siguiente consecuencia fue una depresión que demeritaba a sus ojos su trabajo, y agrandaba su parte de culpa en las desavenencias y lo indujo a un acercamiento a Kronecker. Esta acción conciliadora, escrita y oral, produjo de hecho una relación satisfactoria, vista desde fuera, entre ambos investigadores, pero que no cambió nada en las posiciones diametralmente opuestas ni en la tenaz posición que Kronecker adoptó hasta su muerte contra las ideas de Cantor.

Evidentemente terminó con el año 1884 el segundo más importante y fructifero periodo en la obra de Cantor; comienza un nuevo pasaje, de aproximadamente 13 años como el previo, en el que la capacidad creadora de Cantor no disminuye, pero que debido a las situaciones mencionadas y el consecuente cambio en sus intereses, concreta obras de inferior calidad a las del segundo periodo. Por otro lado, las ideas de Cantor comienzan a imponerse paulatinamente entre sus contemporaneos.

Al comienzo de 1885 la crisis síquica de Cantor ha pasdo casi por completo, y se renueva la confianza en el valor de sus resultados. Ahora se empiezan a aplicar cada vez más sus ideas por otros (en 1885, primero por Harnack, Lerch, Phragmén). Incluso desde el punto de vista docente, se empieza a adoptar el punto de vista teorico-conjuntista: el Maestro del Gimnasio estatal en Halle, Fr. Meyer, que estaba en contacto personal con Cantor, publica en 1885 la segunda edición de sus "Elemente der Arithmetik und Algebra", indudablemente influidos por las investigaciones sobre el transfinito, y especialmente introduce la noción de número en términos de la teoría de conjuntos. El que este libro escrito para uso escolar,

[1]Véase las cartas de Cantor a W. H. Young del año 1908 (véase *Proc. of the London Math. Soc.*(2) **24**(1926), págs. 422 y siguientes) y a Jourdain del año 1905 ([V], p. 48).

de alto nivel científico logró su cometido, es de dudarse, a pesar de que Meyer en la práctica, según la opinión de muchos, era una extraordinario Docente. Cantor mismo publica el siguiente año una serie de trabajos, donde prevalece, respecto a los nuevos logros, la exposición y defensa de lo hasta ahora ganado, particularmente la discusión en el campo filosófico; en el plano matemático reaparecen cada vez con más frecuencia el interés de Cantor en los conjuntos de puntos seguido de la generalización de la *noción de número* (véase [IV] así como [28I], p. 117). En aquel tiempo ocurre una extensa correspondencia con matemáticos, filósofos, teólogos y otros estudioso, en la que Cantor expone con más detalle su punto de vista sobre el infinito actual y toma providencias contra su mal uso. También encuentra tiempo en esos años para ampliar sus ya asombrosos conocimiento de la vieja literatura filosófica y teológica sobre el problema del infinito.

Junto con otras consideraciones, pero principalmente por su conflicto con Kronecker, Cantor se convence de que sería conveniente para la defensa de la libertad e independencia cientifica de los individuos dentro de la comunidad matemática (a saber, los jovenes investigadores), y como protección contra influencias desmedidas, organizar una asociación de los matemáticos alemanes. Esta idea la defiende sin cansancio tanto por escrito como oralmente durante los años 80. Así, se atribuye a Cantor, después de que en los años 70 esfuerzos similares fracasaron lamentablemente, dar el paso decisivo para la *fundación de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung*[1], con la que desde un principio se comprometió con alma y corazón, y cuya necesidad para la libertad científica y el desarrollo multifacético e irrestricto de nuestra ciencia nunca se canso de subrayar. Tanto en el “llamamiento de Heidelberg” de 1889, que con motivo de la 62 asamblea de la Academia alemana de Ciencias Naturales y Medicina se emite la primera convocatoria a los colegas, así como también en las “resoluciones de Bremen”, el siguiente año, de la sección matemática-astronómica de la asoción de ciencias naturales, mediante las cuales se constituyó la Unión, encontramos entre los firmantes a Cantor; desde la fundación (18 de septiembre de 1890) fue el presidente y coeditor de los primeros dos volumenes de los “Jahresbericht”, y cuando él, en otoño de 1893 debido a motivos de salud, debió renunciar a la presidencia, se destaca en el agradecimiento de la unión, que Cantor fue el que “dió el primer impulso para la fundación de la unión y mediante su decidida y activa participación en este plan consiguió su realización .”[2] Dejando a un lado las desavenencias personales, pide a Kronecker dar la conferencia inaugural del primer congreso de la Unión en Halle (otoño de 1891)[3]; la carta de Kronecker dirigida a Cantor, en la que expresa que la muerte de su esposa le impide aceptar la invitación, y la que se pronuncia por una nueva reunión, se publíca casi totalmente en el primer volumen de estos *Jaheresbericht* (págs. 23 y siguientes). En ocasión de este primer congreso de nuestra unión presenta Cantor también la conocida conferencia [30], que demuestra en forma elemental la existencia de una cantidad infinita de cardinalidades transfinitas.– Si bien el ambicioso plan de Cantor de pasar del congreso internacional de los matemáticos a una organización mundial no se realizó, si trabajó él decidida y exitosamente para materializar el congreso internacional de Matemáticas.

[1]Véase, entre otros, las Memorias del tercer congreso internacional de Matemáticas en Heidelberg 1904 (Leipzig 1905), p. 35; además W. Lorey, *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts (IMUK-Abh. III 9; Leipzig y Berlín 1916), p. 215.*

[2]Estos *Jahresbericht*1(1892), págs. 3-7, y 3(1894), p. 8.

[3]Ni esta petición, ni el tratamiento de Kronecker en la carta que mencionaremos deben conducirnos a creer que la relación entre ambos personajes ya no era la de antes; véase la carta de Cantor a Mittag-Leffler del 5 de septiembre de 1891 ([III], p.13).

Los siguientes años traen consigo la conclusión de las publicaciones matemáticas de Cantor con la aparición del trabajo doble [32] en 1895-97. Ellos presentan sistemáticamente la parte principal de sus resultados sobre la teoría general de conjuntos y están escritos en un espíritu esencialmente distinto– podría decirse: presentados en forma clásica– al de los trabajos anteriores.[1]

Con esto se cierra la tercera y propiamente última etapa creadora en la vida del entonces quincuagenario; en el siguiente periodo, que continua sin interrupción hasta su muerte, se establece el reconocimiento y admiración general en el mundo matemático por el trabajo de Cantor.

En el año 1897, en el que aparece el último trabajo de Cantor, tiene lugar el primer congreso internacional de matemáticas en Zürich. El reconocimiento mostrado a Cantor fue general; además de una ponencia de Hadamard, en la que involucra las nociones de la teoría de conjuntos como ya conocidas e indispensables herramientas, tuvo lugar la conferencia de Hurwitz en la primera sesión general “Sobre el desarrollo de la teoría general de las funciones analíticas en nuestro tiempo” en la que se indica como las ideas de Cantor (incluidos los controversiales números transfinitos) han dado un renovado impulso a la teoría de funciones. Por encima de todo, los tres amigos y principales lideres de entonces Hilbert, Hurwitz y Minkowski fueron los primeros en reconocer la originalidad de Cantor y el significado de su teoría de conjuntos y que trataron de hacerla valer “en una epoca en la que en los círculos matemáticos más influyentes, el nombre de Cantor era mal visto y se tenían a los números transfinitos de Cantor por una quimiera dañina”.[2] No sólo el significado de estos hombres, sino su contacto especial con los estrictos métodos formales, en los cuales ha contribuido la teoría de números, ayudaron a destruir algunos prejuicios contra los razonamientos de Cantor.

Cantor, cuya satisfacción por el reconocimiento en Zürich era grande, hablo en aquel año a un circulo reducido de matemáticos alemanes, en ocasión del congreso de Braunschweig de nuestra Unión, en forma no oficial sobre el origen y los resultados principales de su teoría [IV]. El primer trabajo relacionado con la teoría de conjuntos[3] elaborado por otra mano ocurre en Francia: la tesis de Couturat “L'infini mathématique” (1896) con un apéndice muy detallado dedicado a las ideas de Cantor; la tesis de Baire “Sur les fonctions des variables réelles” (1899); pero sobre todo “Lecons sur le théorie des fonctions” de Borel[4], que en gran parte es un libro de texto de teoría de conjuntos y entre otras cosas publica por

[1]Según un comentario de Cantor del año 1897, de acuerdo a [IV], él habría enviado para publicación en 1885 la primera parte de este trabajo al *Acta Mathematica*, donde su aceptación se demoró porque “el trabajo se anticipó 100 años”. A ello se contrapone, primero, la carta a Mittag-Leffler del 29 de septiembre de 1885 ([III], p. 15), pero sobre todo la nota de pie de página en [28 I], p. 117, donde se trata de las expresiones formuladas en [28I], págs. 117-125 y 265-270, así como en [28II], págs. 240-265, que están dedicadas fundamentalmente a los tipos ordinales. La contradicción se desprende, pues claramente [32] representa la continuación de [28] según el plan original y por ello Cantor lo confunde con el trabajo [28] realmente enviado al *Acta*; que las razones mencionadas no concuerden totalmente con la verdad, y el proceder de Cantor haya sido tan tortuoso, se deben a que el primer pliego del trabajo ya se había enviado a imprenta para el *Acta*, cuando se “considero la oportunidad” de retirarlo.

[2]Véase el *Gedächtnisrede auf Minkowski* (*Göttinger Nachrichten* 1909); Minkowski *Gesammelte Aghandlungen*, Vol. I), donde además se encuentra una observación pertinente de una conferencia de Minkowski sobre el infinito actual en la naturaleza. En ambas obras se reflexiona sobra la oposición de Kronecker a las ideas de Cantor. Véase además [VI], p. 274.

[3]Véase también la nota sobre la historia de la teoría de conjuntos de Vivanti en *Bibliotheca Mathematica*, N. F. **6**(1892), pásg. 9-25. Los primeros libros de texto, sobre uso de las nociones teórico-conjuntistas en el análisis, son los de Dini “Grundlagen für eine Theorie der Functionen...” (a saber, en la edición alemana de 1892 lograda por Lüroth y Schepp) y la segunda edición del “Cours d'analyse” (1893).

[4]Véanse también sus trabajos en la *Reveu Philosophique* 1899 y 1900, que se vuelven a publicar en la segunda

primera vez una demostración (primera irrefutable) debida a un alumno de Cantor, Felix Bernstein, del teorema de equivalencia. Con este texto muy utilizado, y el trabajo de Schoenfliess de 1899 publicado en el marco de estos *Jahresbericht* sobre “el desarrollo de la teoría de conjuntos de puntos” se marca el momento victorioso definitivo de la teoría de conjuntos que se encamina al desarrollo normal de una disciplina matemática, con los mismos derechos que el resto e inclusive logra rápidamente una posición privilegiada. Si bien el primer libro de texto realmente sobre teoría de conjuntos (de la pareja Young, 1906) apareció en Inglaterra, y tal publicación en Alemania se hizo esperar hasta la obra de Hausdorff (1914) (por cierto, un clásico), a un observador retrospectivo le pareceran injustas[1] o quiza fuera de toda medida las amargas palabras con las que Cantor se quejó con W. H. Young en 1908 (véase lugar citado pág. 210) respecto de que en Alemania, a diferencia de Inglaterra, no se le conocía. En la práctica, por ejemplo, muchos años antes del cambio de siglo, el plan de la *Enzyklöpedie der Mathematischen Wissenschaften*, sobre todo debido a la perspicacia de Felix Klein[2] contemplaba un artículo (aparecido en 1898) de Schoenfliess sobre la teoría de conjuntos, y de hecho, no como una subdiciplina de la Geometría en el Volumen III, sino dentro del primer artículo del Volumen I, en las áreas fundamentales de la Aritmética.

El año 1899, en el que la pareja Cantor festejó en Harz sus bodas de plata en el feliz círculo familiar, aumentando por dos yernos, nos presenta a Cantor dedicado con toda energía a las matemáticas; en el intercambio epistolar con Dedekind, se afana desesperadamente en fundamentar la comparación de cardinalidades así como el buen orden, debido principalmente al problema del continuo. No obstante, no logra algún éxito o una publicación significativa. Tampoco en lo sucesivo renuncia concientemente a la producción matemática. Así, en 1903 imparte la plática “Observaciones sobre la Teoría de Conjuntos” en el congreso de nuestra Unión en 1903 en Kassel, que no se publica y en la que principalmente entra en disputa con ciertas objeciones de filósofos franceses[3]; con Philipp E. B. Jourdain entra en un copioso intercambio científico epistolar durante 1905; incluso en 1908 promete a Young proponer para publicación su siguiente trabajo a la *London Mathematical Society*. Qué tanto ocupó a Cantor en lo sucesivo el problema del continuo, que Hilbert ha resaltado como el primero de sus “Problemas Matemáticos” en el congreso internacional de matemáticas de París (1900), lo ha reseñado claramente Schoenfliess ([VIII] y [IX]). En el congreso internacional en Heidelberg (1904) Cantor fue sorprendido por los resultados de la ponencia de Julius König, en la que se se afirma que la cardinalidad del continuo no es un álef; él había estado luchando incansablemente y rebosante de energía contra esta afirmación, pero pronto se mostró (en otro lema posteriormente utilizado) la legitimidad de su expresión: “el no tendría nada contra el rey (König), sino sólo contra su ministro”. Tardía pero decisivamente llegaron ese año los reconocimientos

edición del libro mencionado. Si bien en el texto de Borel el nombre de Cantor sólo se menciona superficialmente y sus resultados se exponen en forma totalmente distinta a como se hizo en su origen, Borel se defiende en la introducción de los trabajos mencionados de la sospecha, de que en ellos habría una subestimación de Cantor.

[1]Así y todo nos parece ahora curioso que en el *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, que desde 1892 consiguio como experto a Vivanti para teoría de conjuntos, reseñaba los trabajos de teoría de conjuntos hasta 1904– en tanto no fuesen asociados a la geometría–en el apartado “Filosofía” y entonces los traslado al subapartado entre Filosofía y Pedagogía (sólo hasta después de la guerra bajo la redacción de Lichtenstein se volvieron autónomos).

[2]Klein, que en sus clases sobre cuestiones de la Geometría elemental en el semestre de verano de 1894, desarrolló nociones y demostraciones propios de la teoría de conjuntos– por primera vez en un curso fuera de Halle– propuso en 1895 a Lorey como tema para su examen estatal el tema: Sobre la Teoría de Conjuntos de Georg Cantor y su significado para una rigurosa fundamentación del Análisis.

[3]Estos *Jahresbericht* **12**(1903), p. 519 y **20**(1911), p. 251 nota de pie de página.

científicos y también homenajes[1] en el extranjero: su elección como miembro honorario de la London Mathematical Society (1901) y la Sociedad Matemática de Cracovia así como miembro correspondiente del R. Instituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti (Venezia), el otorgamiento de Dr. math. honoris causa por la Universidad Christiania (1902), la medalla Sylvester por la Royal Society (1904), y el Doctorado honorario por la Universidad St. Andrews (1911).

Mientras tanto, su estado nervioso en esos años lo obliga nuevamente a interrumpir su actividad docente; en 1905 fue liberado de sus obligaciones oficiales, en 1913 renuncia definitivamente al magisterio. Para su septuagesimo aniversario, que debería celebrarse internacionalmente, acuden algunos matemáticos alemanes a Halle a pesar de la guerra para tributarle un homenaje (véase el ensayo [VI]); se mandó hacer su busto en marmol, mismo que se encuentra desde 1928 en las escaleras de la Universidad de Halle. Su aniversario de oro como doctor no pudo celebrarse públicamente a causa de sus estado de salud; el 6 de enero de 1918 fallece en la clínica siquiátrica de Halle.

La actividad docente de más de 40 años de Cantor en la Universidad de Halle se distinguió en gran medida por la severidad y aspereza de la defensa de sus ideas. Sus clases eran, según los relatos de sus estudiantes, claras y ordenadas, vívidas y estimulantes (al menos en los periodos de buena salud, que cuando no la tenía obligaba a interrumpir las clases por lapsos largos o cortos). A la preparación de las clases no le dedicaba mucho tiempo, por lo que podía ocurrir que la exposición de los temas que le interesaban, de la que algunos estudiantes hablaban como de un gran deleite estético, se privilegiaban frente a la repetición de otras materias; a estas últimas pertenecía, entre otras, la teoría de funciones, que en el Halle de entonces estaba claramente en las sombras.[2] Por el contrario, mostró gran interés, por ejemplo, por la teoría de grupos. Sobre sus descubrimientos en teoría de conjuntos impartió cátedra ocasionalmente. El que el número de sus alumnos era pequeño, con frecuencia entre uno y tres, se debía a la baja población matemática en Halle, que sólo hasta este siglo comenzó a aumentar; esto hace comprensible su interés por cambiarse a otra Universidad.[3] En total formó naturalmente a muchos pasantes, pero dió lugar a muy pocas tesis doctorales,[4] y motivó sólo pocos investigadores talentosos.[5] Estó puede deberse, en parte, a que Cantor de inmediato realizaba sus ideas por lo que no tenía una gran provisión de problemas a trabajar, por lo que tampoco dejó una gran herencia científica. Así mismo, la absoluta entrega a las ideas, que le ocupaban, era poco apropiada para atraer jovenes talentos.

En su relación con sus alumnos fue un afectuoso y leal amigo; su casa ofrecía a ellos y a estudiantes de otras áreas una atmósfera agradable llena de música y un fresco y juvenil ambiente, del que su querida esposa erá una parte esencial. Para hacer un servicio a sus alumnos o sólo darles un gusto, ningún esfuerzo era demasiado para él, incluso a edad avanzada; en particular, respecto a los jovenes

[1]Del año 1896 data su elección como directivo de la sección de Matemáticas y Astronomía de Academia Leopoldina-Carolina alemana de ciencias naturales en Halle, de la que había sido miembro desde 1889.

[2]La falta de cuidado y familiaridad con los temas que le eran ajenos debilitó a Cantor respecto a los matemáticos de sus epoca.

[3]La propensión a faltar a clase la mostró con frecuencia, y fue correspondida por los alumnos que faltaban también a clase, lo que motivó que se dirigiera a las butacas del salón: “para nuestro gran pesar nos vemos privados hoy de alumnos”, –acción que no permaneció sin consecuencias disciplinarias.

[4]Los doctorantes en matemáticas (no pocos) de aquel tiempo en Halle provenían principalmente de Berlín, y llegaban con sus tesis lista y sólo para una corta estancia en Halle.

[5]F. Bernstein, que se promovión en Göttingen (con un trabajo sobre teoría de conjuntos), ya se mencionó. Entre los estudiantes a los que Cantor influyó persistentemente por su fuerte personalidad y sus trabajo, pertenece el Profesor de Achen E. Jürgens; véase estos *Jahresbericht* **17**(1908), p. 165.

Privatdozent era extraordinariamente benevolo, y pronto se generalizó la consigna, que para un problema grande o pequeño cualquiera encontraba en Cantor un oido dispuesto o un amistoso consejo.

Por lo que respecta a la *personalidad* de Cantor en general, todos los que lo conocieron hablan sobre su naturaleza ingeniosa, ocurrente y original, que fácilmente explotaba y estaba permanentemente lleno de lúcidas ocurrencias; con un incansable temperamento, que junto a su imponente y gran figura lo hacía irresistible en sus participaciones en reuniones matemáticas, ya fuera tarde en la noche o temprano por la mañana dejaba fluir sus ideas (sobre sus intereses matemáticos o sus multifacéticas ocupaciones fuera de las matemáticas); de limpio carácter, leal con sus amigos, servicial cuando era necesario, amable en el trato; de paso, era típica su distracción como cualquier sabio. En las discusiones científicas verbales era él el más participativo; no era una de sus habilidades comprender de inmediato ideas nuevas de otros. Se dedicaba a todas sus ideas con el mismo entusiasmo e intensidad; quizá más de lo exigido por el sentido común y junto a la genial intuición y la inmensa energía, con la que él imponia sus ideas, por sobre cualquier obstaculo o inhibición fueron los instrumento a los que debemos agradecer la creación de la teoría de conjuntos. Tal inconmovible tenacidad correspondía a su profundo convencimiento de la verdad, de la validez de sus ideas; “ojalá que *sus* chapucerias”, así escribía el 26 de enero de 1884 a Mittag-leffler en realación a la exigencia de Kronecker, de que sus trabajos se considerarán para el *Acta Mathematica* con la misma imparcialidad que los de Cantor, “contra la *imparcialidad*, gran benevolencia, y consideración, *reivindico parcialidad*, pero no hacia mi persona, sino parcialidad por la *verdad* que es *eterna* y que con soverano desprecio observa a los intrigantes, que se imaginan que pueden arrememter contra ella mediante sus miserables garabatos”. Y unos meses después: “...aquí se trata en *cierto sentido* de una *cuestión de poder, la cual nunca se puede decidir mediante persuasión*; se preguntará, que ideas son más poderosas, más amplias y más fructífera, las de Kronecker o las mias; solo el éxito decidirá a la larga nuestra lucha”[1] Es claro que con la misma tenecidad y obstinación se asió al problema de Shakespeare-Bacon, a pesar de los esfuerzos de sus amigos matemáticos de apartarlo de esto.

El convencimiento de la magnitud e importancia de sus propia obra no lo volvió arrogante o vanidoso, como otros científicos excepcionales. Esto lo demuestra tanto su comportamiento amistoso con Dedekind y Mittag-Leffler como otras evidencias. Así, envía junto con su foto en 1905, a deseo expreso de Mittag-Leffler al *Acta*, las palabras: “hubiése preferido que no publique mi foto, pues creo que es un honor demasiado grande para mí.” En el prólogo del volumen especial [21] sobre sus trabajos más importantes adiciona a la indicación, de que tantas opiniones se han presentado en la historía sobre el infinito, la siguiente frase, en vista de la rareza de la publicación:“muy lejos estoy de creer que en un asunto tan amplio, complicado y enredado, como lo es el infinito, yo estaría en posibilidad de decir la última palabra; pero ya que, después de largos años de investigación al respecto, he llegado ha determinadas convicciones que no se han tambaleado en el transcurso de mis estudios, sino por el contrario, se han vuelto mas firmes, creo que tengo cierta obligación en ordernarlas y darlas a conocer”.

Cuando Cantor alaba el sentido de libertad e independencia en las matemáticas y se esfuerza por promoverlo, no lo hace sólo pro domo; que él era más exigente en esto respecto a otros, lo demuestra como intercedió por Bendixson, cuya carta a Cantor en mayo de 1883, se adaptó y publicó a iniciativa de Cantor en el Volumen 2 del *Acta*, en la que él agradece a Mittag-Leffler “su noble comportamiento

[1] Véase también [26], p. 228; “Quizá soy el primero en la historia, que sostiene este punto de vista [la afirmación del infinito actual en concreto y en abstracto] con total certeza y con todas sus consecuencias, pero algo tengo por seguro, que no seré el último que lo defienda”.

respecto al Sr. Bendixson".[1] No menos significativa es la posición de Cantor respecto a su más grande antecesor en lo referente a la conceptualización del infinito actual, Bernard Bolzano: el reconoce el mérito del "sagaz filósofo y matemático", en él que ve al "defensor más decidido" del infinito-propio, aunque sin dejar a un lado sus flaquezas. La noble y retraida forma de polemizar, no disminuida a pesar del quebranto de sus derechos, que con frecuencia se encuentra en las publicaciones de Cantor[1], no debe interpretarse, por la gran seguridad en sí mismo que a Cantor animaba en los años 80, como un síntoma de temor, sino como un desahogo de una limpia y discreta convicción interna. Sólo cuando le parece que se impone el dogmatismo o la unilateralidad, se dispara su irrefrenada exasperación que en ocasiones traspasa las fronteras matemáticas.

Precisamente en un investigador, que se ve impulsado, casi contra su voluntad, por la fuerza de sus ideas, es de remarcarse que no menosprecia la necesidad de la presentación y la terminología. Así escribe el 31 de enero de 1884 a Mittag-Leffler: "...siempre me alegro, cuando Usted alaba el estilo y la economía de la presentación, pues a ello dedico algo de esfuerzo, y cuando tengo éxito, es mi propia obra...". En la carta del 20 de octubre de 1884, que en escencia contiene el trabajo [25], Cantor menciona que antes se ha aconsejado con Scheefer sobre la nueva notación que introdujo, "con cuya elección he sido extraordinariamente cuidadoso, pues parto de la opinión de que para el desarrollo y difusión de una teoría no es poco lo que influye una acertada nomenclatura". En la terminología, en su mayor parte, adecuada[1] así como en el sistemático desarrollo de las ideas, en lo vivaz, no dogmático y que evita cualquier complicación innecesaria (aún ahora son recomendables para el principiante los trabajos originales de Cantor, que proximamente se publicarán reunidos) se encuentra eminentemente una aparición poco frecuente en nuestra ciencia.

Los intereses filosóficos de Cantor así como su, en parte relacionada, visión matemática-general y su relación con la religión merecen una descripción más detallada. A saber, los trabajos originados en los años 80 [16V] y [26]-[28] contienen una asombrosa familiaridad de Cantor con la *literatura filosófica* de entonces, de hecho, no sólo con amplias partes de los escritos contemporáneos y antiguos, sino también con los clásicos filosóficos del siglo anterior y especialmente, lo que es notable, con los teólogos-filósofos de la escolástica y con Aristóteles. Un estudio tan profundo, basado generalmente en las fuentes originales, pero también en literatura posterior, de los defensores de la atomística griega antigua y sus opositores, de Platón y Aristóteles, de Augustín y otros religiosos, de Boëthius, Tomás de Aquino y muchos otros escolásticos, de Nicolás Cusanus y Giordano Bruno, de Descartes, Spinoza, Locke, Leibniz, Kant y Fries, no suele aparecer en un investigador, cuya área de trabajo no es la filosofía, incluso hace 50 años, para una época en que la filosofía no se desaprovechaba, como sucede hoy con frecuencia, que se arrincona moribunda como una disciplina en una facultad "filosófica" surgida de una de "ciencias naturales". Cantor entra en contacto científico intenso en Halle con sus jovenes colegas, habilitados en filosofía, Edmund Husserl y Hermann Schwarz. Por el contrario se oponía a las corrientes lógicas (Schröder, Frege, etc.). Como acertadamente ha observado Felix Klein[2], no es ningúna casualidad que

[1] Véase también la nota de pie de página de Mittag-Leffler al inició del trabajo [23] de Cantor así como la forma en que Cantor en [16VII] valora el mérito de Bendixson.

[1] Especialmente característico a este respecto es la reseña de Cantor del trabajo de Hermann Cohens "Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte" en *Deutschen Literaturzeitung*5(1884), 266-268.

[1] A las excepciones pertenece la expresión " Menge (Conjunto)", que no representa lo mismo que "ensemble" o "set". La palabara originalmete preferida por Cantor "Mannigfaltigkeit (Variedad)", compresiblemente, no se impuso.

[2] Vorlesung über die Entwiclung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Parte I (Berlín 1926), p. 52. Las siguientes

Cantor asistió a la escuela de los escolásticos; más que en cualquier otra área de las matemáticas, donde mayormente ocurren construcciones sintácticas y más aun los cálculos, los razonamientos de la teoría de conjuntos abstracta son similares en general, pero también similares en la sutileza y en su proceso analítico como lo son la Lógica y la Teología a la escolástica; ésta es la enseñanza matemática del infinito actual, en ocasiones similar a la temeridad, y no digamos a la audacia, como por otra parte la escolástica al igual que la matemática tienen a la inferencia como un ideal del rigor. Por ningún motivo era la filosofía para Cantor un área extraña, con la que tenía que tratar para sus objetivos matemáticos, sino que existía para él (como en un cierto sentido distinto lo es par los lógicos de hoy y de antes) una "fusión" entre ambas disciplinas. Que tan importante era la presencia de mutuo *conocimiento* de él y sus lectores, lo demuestra la observación en el prólogo al escrito [21], en el que afirma haber escrito esencialmente para dos tipos de lectores: "para filósofos, que han seguido el desarrollo de la temática hasta el presente, y para matemáticos compenetrados con las publicaciones más significativas de la filosofía tanto modernas como antiguas". Una generación después ha presentado tristemente un tal círculo de lectores reducido.

Con detalles de significado filosófico vale la pena mencionar la observación sobre la *formación de nociones* en [16V], págs. 589-590; aquí se encuentra, en oposición a la opinión "substancial" de Aristóteles, un proceso más funcional en el sentido que se ha generalizado en la moderna teoría de la formación de conceptos de Rickert, Cassirer y otros. El rechazo de Cantor a la visión (hoy otra vez actual) de que el número se basa en la noción de tiempo, se resaltará en la parte III; aquí sólo se menciona [16V], pág. 573, donde él se lanza contra la teoría de Kant del tiempo.

En lo que respecta a *la visión de Cantor sobre la matemática*, la noción central es la *realidad* de las ideas científicas (por ejemplo, el todo–lo finito así como lo infinito–los números), que tienen para él doble significado: como realidades intrasubjetivas o inmanente, garantizadas por las definiciones que dan un lugar bien determinado y distinto al de otros conceptos a la noción correspondiente en la mente humana, con lo que la noción "modifica en un sentido determinado la sustancia de nuestro intelecto" ([16V], p. 562); y como realidad transubjetiva o transitoria, donde la noción aparece como "una imagen de sucesos y relaciones con el mundo exterior al intelecto". Mientras que la convicción de Cantor en general se encamina a que a cada, en primer instancia, noción real corresponde también una realidad transitoria, cuya determinación es con frecuencia la tarea complicada de la metafísica, él advierte la ventaja de las Matemáticas, de que ella "en la formación de sus ideas materiales toma en consideración exclusivamente la realidad *inmanente* de sus nociones y por ello no tiene *ninguna* obligación de verificar su realidad *transitoria*" (lugar citado p. 563).[1] En esta caracterización, que a él le parece "la forma más sencilla e informal de dedicación a las matemáticas", basa su respaldo por la "matemática libre", cuya legitimidad se ilustra minuciosamente antes (pág. 204).

Cuando Cantor traza aquí el significado y la singularidad de la matemática (y con ello, podría añadirse, también de la lógica teórica), en breve, como la ciencia no metafísica, de ninguna manera es un punto de vista unilateral. Cómo evalúa la matemática desde su juventud desde un punto de vista

afirmaciones se toman de allí: "si se retira la vestimenta [mistico-metafísica] de las especulaciones escolásticas, que aparecen en una observación superficial, como una sutileza puramente teológica, con frecuencia se presentan como los enfoques más correctos, que hoy llamamos "teoría de conjuntos". Para el trabajo de Bolzano con el infinito es claro que la escolástica incluso conforma el punto de partida directo.

[1]Queda por saber si Cantor conciente o inconcientemente se une a H. Hankel, que en su "Theorie der komplexen Zahlensysteme" (pág. 10) aparecida en 1867, señala como la materia de la Matemática "objetos intelectuales" "que pueden pero no tienen que corresponder a objetos o relaciones reales".

estético y ético, lo muestran las dos primeras tesis de su Habilitación [5]: "Eodem modo literis atque arte animos delectari posse" (véase también, por ejemplo, [16V], p. 562 arriba) y "Jure Spinoza mathesi eam vim tribuit, ut hominibus norma et regula veri in omnibus rebus indagandi sit".

Como lo manifiesta la tercera tesis doctoral, Cantor pone gran exigencia en los problemas planteados. Propuestas exageradas le eran ajenas, y tanto dentro como fuera de la teoría de conjuntos le era fácil responder que interés tenía tal o cual investigación. La naturalidad en la elaboración de conceptos y planteamietos de problemas estaba fuertemente enraizada en él.

En estrecha relación con las tesis de Cantor, de que las nociones matemáticas junto con la realidad inmanente de los matemáticos corresponden a una realidad transubjetiva, está claramente una percepción que puede expresarse así: Los matemáticos no *inventan* los objetos de sus investigación, sino que los *descubren*. Ya en la tercera tesis de su Habilitación (mencionada en la pág. 195), se encuentra otra vez subrayada la opinión al final de su obra, al poner como epígrafe de su exposición [32]: "Hypotheses non fingo" y "Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus". Mientras que en general da igual para la obra del Matemático, si sus nociones se ven como ideas platónicas, como creaciones arbitrarias del intelecto o como creaciones automáticas (con Hessenberg[1]) de la razón, curiosamente tal diversidad de pareceres se convierte en ocasiones para los inumerables problemas de la teoría de conjuntos en algo de notable importancia.[2] Precisamente la circunstancia de que para Cantor las nociones de la matemática (como en forma manifiesta también para, por ejemplo, Bolzano) poseen una existencia que es independiente de su descubrimiento o de nuestro pensamiento y que en cierto sentido les precede[3], ha sido de evidente importancia para la forma en la que Cantor aborda los problemas (también, por ejemplo, el problema del continuo); la presente generación, en la que la convicción opuesta– particualrmente bajo la influencia de Poincare–ha encontrado numerosos seguidores, no se puede perder de vista al considerar la obra de Cantor. Incluso para la tenacidad con la que Cantor defendió sus ideas durante dos decenios casí aislado, esa convición fue un apoyo y un estímulo, como lo es hoy, para los que la comparten, contra las tentaciones del intuicionismo. Así, se trata no sólo de modestia, sino sobre todo del desahogo de consideraciones metafísicas, cuando Cantor escribe en una carta a Mittag-Leffler a principios de 1884: "...en lo que respecta al resto [a saber, aparte del estilo y la economía de la exposición], no es éste un logro mio, en realción al contenido de mis trabajos sólo soy un relator y un funcionario."[4] No obstante, apenas se entiende que para Cantor exista un cierto desequilibrio entre las tesis de la "libertad" de la matemática por un lado, y por el otro de la realidad de los objetos matemáticos; sólo de esta última posición se puede entender su decidida oposición a lo infinitamente pequeño, es decir, contra los sistemas de magnitudes no arquimedianos, que dificilmente es compatible con las primeras tesis. En especial se vislumbra en su concepción de la noción de número un cierto desarrollo, a saber, en el sentido de de una nítida renuncia del punto de vista formal.

En relación a los puntos de vista e intereses de Cantor respecto a las ciencias naturales, a saber

[1] Estos *Jahresbericht* **17**(1908), págs. 145-162, en especial p. 158.

[2] Véase mi "Einleitung in die Mengenlehre" (3a. Edición, Berlín, 928), págs. 325-332.

[3] Véase también [16V], p. 590 arriba.

[4] Véase también la conocida cita de [26], p. 226: "...mientras que los números infinitos, por un lado, si son imaginables en alguna forma, deben constituir un nuevo genero de números respecto a los números finitos, cuya índole depende absolutamente de la naturaleza de los objetos y son tema de la investigación, pero no de nuestro arbitrio o de nuestros prejuicios." En forma similar en [28I], pág. 125: "Porque se trata en nuestros números *transfinitos* de un *nuevo genero de números*, cuya índole se debe investigar, pero no se tienen que elaborar según la receta de nuestros prejuicios."

la física, no tenemos información tan detallada. Al contrario de la "matemática libre" consideraba a la física matemática como una "disciplina metafísica"[1], para las que el reconocía como necesarias y justificadas aquellas ataduras, como las que él decididamente rechazaba para la matemática, en vista de la realidad transitoria requerida para la ciencia natural. En un contexto no necesariamente relacionado con esto ([16V], p.564) se manifiesta contra la opinión de un "conocido físico" (claramente Kirchooff, cuya "Mecánica" aparecio en 1874) de que la física es como una "descripción natural", una concepción que "debe prescindir del fresco pensamiento matemático tanto como de el poder de la explicación y fundamentación de los fenómenos naturales".[2] Vale la pena mencionar en relación a la posición de Cantor sobre las ciencias naturales la expresada al final de [25], una posición[3] hoy en día extraña a nosotros, de que los átomos materiales pertenecen a la primera, los átomos etéreos a la segunda cardinalidad[4], así como una dedicación con la "teoría natural de los organismos..., a la que no se ha podidio aplicar hasta ahora los principios mecanicistas.." y para cuyo dominio él quisiera originar nuevas herramientas, en particular teórico conjuntistas (carta a Mittag-Leffler del 22 de septiembre de 1884; véase también [16V], pág. 558). Si bien son difíciles de explicar por completo los métodos y objetivos que lo motivaban, si se puede suponer que la teoría de los conjuntos multiple ordenados (que hasta ahora poco se han considerado véase p. 50) debería desempeñar un papel fundamental. Finalmente merece mencionarse la discusión en [16III] (págs. 120 y siguientes) de la relación entre el espacio aritmético y el espacio de fenómenos del mundo real, dos nociones, cuya correspondencia usualmente se postula "arbitraria en sí misma" y sólo mediante la exigencia de la aplicabilidad, es decir, no se garantiza mediante el movimiento continuo (véase p. 42).

Los *intereses religiosos* de Cantor aparecen varias veces en los tratados filosóficos (así como en el prólogo a la *Confessio fidei* de Bacon); el trabajo [26] aparece también en forma característica en la revista "Natur und Offenbarung". Por el lado paterno tenía origen judio, pero se educó en el credo evangélico, mientras que por parte de la madre y su familia se generó una atmósfera católica, lo que hizo que Cantor no compartiera el destino de muchos, para los que tal entrecruzamiento los conduce a la indiferencia religiosa; por el contrario, la componente religiosa recién descrita de su educación, desde el inicio, tuvo efectos persistentes. Cuando el se ocupó y confrontó minuciosamente con la posición de las autoridades religiosas y de la filosofía escolástica por el infinito actual[5], como en su relación con el concepto de dios,

[1]La palabra "metafísica" no tiene para Cantor (al igual que para Gauß) el significado actual usual, sino conforme al francés, aproximadamente el sentido de "crítica filosófica" (de una ciencia); por ejemplo, al final de [12].

[2]Como una posición similar en nuestra epoca sirva de ejemplo la mantenida por Weyl (véase *Abhandl. aus d. Math. Seminar d. Hmburgischen Univ.*, **6**(1928), págs. 87 y siguientes.

[3]Véase también las comunicaciones en el *Zeitschr. f. Phil. u. philos. Kritik*, N. F., **88**(1886), págs. 192 y sig. Respecto a estas perspectivas filosóficas véase además de Cauchy, a las que se refiere Cantor en [26] y [28], la explicación naturista en el libro de R. Graßman: "Die Lebenslehre oder Biologie" (Stettin 1882-83).

[4]Las ideas de Cantor, que claramente representaban mucho para Cantor, sobre la aplicación de la teoría de conjuntos de puntos a la física, sin emabargo, se tornaron sin fundamento con el desarrollo posterior de la física; aplicaciones físicas de otro tipo resultaron exitosas, por cierto. Su antagonismo a la atomística usual se resalta en [16V], p. 560.

[5]Compárese con estas relaciones entre teología y el infinito actual en la literatura moderna, por ejemplo, el escrito de A. Dempf: "Das Unendliche in der mittelalterlichen Metaphysik und in der Kantischen Dialektik" (Münster i. W. 1926) y un trabajo de J. Ternus S. J.: "Zur Philosophie der Mathematik" (*Philos. Jahrb. der Görres-Gesellschaft***39**(1926), págs. 217-231.). Se debe resaltar también los serios esfuerzos del escolástico Grégoire de Rimini sobre el infinito (véase P. Duhem, Études sur Leonard de Vinci, 2me. Série [París 1909], págs. 385-399; allí también se encuentra material sobre la posición de otras estudiosos antiguos, en particular de Leonardo da Vinci, sobre el infinito: págs. 1-54, 368-384, 399-407). Además, debe observarse que los argumentos de Aristóteles y diversos neo-aristotélicos contra

aparece claramente, junto al deseo de defenderse de las objeciones, que con argumentos de ese origen, se levantaron contra sus nociones, un estímulo interior. De su posición religiosa son características las cartas primero publicadas en [28I], págs. 105 y siguientes (cuyo destinatario no mencionado era el cardenal Franzelin, véase abajo), en las que él quiere demostrar la existencia de un "Infinitum creatum" actual a partir de la noción de dios; además, la siguiente cita de una carta de Cantor a Enström, que refiere a la conocida observación de Gauß a Schumacher[1] y desde luego dificilmente justifica Gauß "Pero si de una antipatía justificada contra el infinito actual *ilegitimo* en amplias capas de la ciencia, bajo la influencia de las tendencias actuales epicuro-materialistas se ha generado un cierto *Horror Infiniti*, que en el escrito mencionado de Gauß encuentra su expresión y apoyo clásicos, me parece que el rechazo acrítico asociado al infinito actual *legitimo* no es un delito menor contra la naturaleza del objeto, que se debe tomar como es, y que se puede considerar este comportamiento como una miopía, que roba la posibilidad de ver el infinito actual, a pesar de que se ha logrado y conservado en su sustrato más absoluto y en sus formas secundarias transfinitas nos rodea a todos y es inherente a nuestro espíritu." ([26], p.230) En otra parte Cantor dice, para manifestar su satisfacción, que Thomas de Aquino en su demostración de la existencia de dios no utiliza el teorema de la imposibilidad de los números infinitos actuales: "Si bien valoro a Cauchy como físico y matemático, me simpatiza su devoción y a pesar de lo que me gusta sus *Sept lecons de physique générale*, sin considerar el error del que hablamos, debo protestar decididamente contra su autoridad, allí donde él se equivoca." ([26], p.225)

En el devenir de su interés por los tratados teológicos del problema del infinito Cantor entabló correspondencia con muchos jesuitas[2], y con el desterrado P. Tilman Pesch, el editor del muy apreciado por Cantor "Institutiones philosophiae naturalis", que buscó visitarlo en Blyenbeck (Holland), así como con el cardenal Franzelin, que como continuador de la teoría de Agustin defendió la variedad infinita actual y de quien se encuentra una larga carta en [28I] (pág. 91 y sig.); en particular con C. Gutberlet, profesor de filosofía y matemática en el seminario de obispos en Fulda y por muchos años editor de *Philosophischen Jahrbuchs der Görres-Gesellschaft*. Éste había publicado en 1878 un escrito: "Das Unendliche, metaphysich und mathematisch betrachtet", en el que combate las concepciones en teología y filosofía de la imposibilidad de una magnitud infinita y que afirma, no como Cantor la *existencia*, pero si la *posibilidad* del infinito actual. Cantor percibió en Gutberlet, cuyo escrito le trajo muchos conflictos y burlas, un aliado; lo visitó en Fulda y se mostró interesado tanto en cuestiones materiales como en su relación con el catolicismos por parte materna.[3] Con el apoyo de Gutberlet logró Cantor obtener un profundo conocimiento de las percepciones de los pensadores de la edad media acerca del infinito, como lo evidencían sus trabajos, y recíprocamente Gutberlet ganó un amplio círculo de interesados en la filosofía con los que Cantor entro en contacto debido a la teoría de conjuntos que lo defendieron de las objeciones de Herbart y sus discipulos.[4]

el infinito actual se demenuzan detalladamente en la obra prima del filśosofo judio-español Chasdai Crescas aparecida en 1410; de estos argumento de Crescas se desprende claramente la opinión positiva de Spinoza respecto al infinito. (Véase H. A. Wolfson, Crescas' critique of Aristotle [Cambridge Mass. 1929], Capítulo II junto con los textos y notas corespondientes, así como págs. 36 y sig.)

[1] Correspondencia Gauß-Schumacher Vol. 2 (1860), p. 269; Obras de Gauß Vol. **VIII**, p. 216.

[2] Como Ternus (lugar citado p. 221) relata, la Bibliothek der niederdeutschen Jesuitenprovinz conserva todavía algunos "Hommages respectueux de l'auteur George Cantor" de los años 80.

[3] Véase *Philos. Jahrb. der Görres-Gesellschaft* **32** (1919), p.366, y **41**(1928), p. 262.

[4] "Das Problem des Unendlichen". *Zeitschr. f. Philos. u. philos. Kritik*, N. F. **88**(1886), págs. 179-223, Parte I. Véase también Cantor, lugar citado, p. 232, y la nota de pie de página en [28I], pág. 94, después de que Gutberelt añadió

Cantor podía salirle al paso a los prejuicios teológicos sin rodeos e incluso con cierta ironía, cuando se requería, como se vislumbra, por ejemplo, en las observaciones arriba dadas (pág. 205) sobre la esencia del continuo.

Publicaciones de contenido no relacionado a la teoría de conjuntos

De las dos áreas principales, en las que se originan trabajos de Cantor no relacionados a la teoría de conjuntos, una de ellas, de hecho la más antigua, es la *teoría de números*. Su tesis doctoral [1] versa sobre la solución en los números enteros de la ecuación $ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 = 0$ correspondiente a una forma cuadrática ternaria. Para encontrar condiciones necesarias y suficientes para la solubilidad Legendre utilizó un método de reducción de Lagrange, que Cantor menciona en el prólogo de su trabajo y que se encuentra, en una forma simplificada por Dedekind, en las lecciones de Dirichlet-Dedekind sobre teoría de números (3a Ed. (1879), págs. 428 y siguirntes). Si se supone, como es admisible, que a, a', a'' son primos relativos entre sí y no contienen ningún divisor cuadrático, entonces se puede expresar el criterio de solubilidad como: 1. a, a', a'' no pueden, todos, tener el mismo signo; 2. $-a'a''$, $-a''a$, $-aa'$ deben ser repectivamente residuos cuadráticos de a, a', a''. se Gauß propone un método que relaciona la solución con una transformación en la forma $4D(zz'' - z'^2)$, donde $D = aa'a''$. Gauß también demostró cómo se pueden obtener todas las soluciones enteras con las condiciones antes señaladas; a saber, en la forma

$$x = \frac{1}{t}\varphi(p,q); \quad x' = \frac{1}{t}\varphi'(p,q); \quad x'' = \frac{1}{t}\varphi''(p,q),$$

donde $\varphi, \varphi', \varphi''$ son formas binarias en las que p, q son variables que representan a primos relativos, y t es el mayor factor común de $\varphi(p,q)$, $\varphi'(p,q)$ y $\varphi''(p,q)$.

A estas fórmulas de Gauß se une Cantor con la observación de que éstas no proporcionan la totalidad de soluciones, en tanto la dependencia del número t con p, q no se conozca, y por ello se debe encontrar t mediante un cálculo especial para cada pareja p, q. La postulación de la dependencia entre t y p, q conforma el tema de la complicada tesis doctoral de Cantor. Otra solución de este problema fue dada posteriormente por Dedekind (lugar citado, págs. 418 y siguientes); véase también la exposición de Bachmann, *Die Arithmetik der quadratischen Formen*, 1a. sección (1898), Capítulo 8.

Cantor parte en [2] de la disertación de Göpels (Berlín 1835), que se publicó otra vez en *Journ. f. Math.* **45**(1853), págs. 1-13 (véasse la reseña de Jacobi, *J. f. Math.* **35**(1847), págs. 314 y sig.; Obras II, págs. 148 y sig.). Göppel había mostrado como se puede obtener la representación de P, para $P = p$ o $P = 2p$, a partir del desarrollo en fracciones $\sqrt{P}$ mediante la forma $x^2 \pm 2y^2$, donde p es un número primo de la forma $4n + 3$. Cantor probó sin usar las fracciones dos teorema para los casos $p = 8n + 3$, respectivamente, $p = 8n + 7$, que extienden los resultados de Göpel y los libera de ciertas hipótesis restrictivas.

El trabajo [3] se dedica al problema de Euler de determinar la cantidad C_n de las representaciones de un número natural n en un sistema dado $a_0, a_1, a_2, \ldots$ en la forma

$$n = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots,$$

donde λ_i recorre los valores $0, 1, 2, \ldots \alpha_i$ (α_i puede ser también $= \infty$). Euler transformó el problema en una forma analítica, cómo transformar un producto infinito en una serie de potencias, en la que

pasajes de un mauscrito de Cantor (según su deseo) en este trabajo, así como las objeciones de Cantor en [28I], págs. 101-104.

aparecen los C_n como coeficientes. Cantor invierte el problema, él busca el sistema de números en el que la representación del número n es unívoca, es decir $C_n = 1$. Este sistema de números "simple" contiene como caso especial el sistema decimal así como los correspondientes con otro número base; en general se obtienen como

$$a_0 = 1, a_1 = b_1, a_2 = b_1 b_2, a_3 = b_1 b_2 b_3, \ldots \quad (b_k > 1),$$

donde $\alpha_k = b_{k+1} - 1$. Mediante la extensión del problema a la representación de números racionales Cantor obtiene la serie que lleva su nombre

$$A_0 + \frac{\lambda_1}{b_1} + \frac{\lambda_2}{b_1 b_2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{b_1 b_2 \cdots b_n} + \cdots ,$$

que puede servir para representar números reales. Cantor incluye sucesivamente dos suposiciones restrictivas sobre los b_k para dar el criterio correspondiente para discriminar, si un número representado como en la última serie es racional o irracional (véase la representación de Perron, *Irrationalzahlen* (1921), págs. 111-116.)

En [4] Cantor logra una representación, mediante el desarrollo en producto de Euler, de cada número real $A > 1$ en la forma de un producto infinito

$$A = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right)\cdots,$$

donde $b \geq a^2, c \geq b^2, \ldots$ Cada número real $A > 1$ se puede desarrollar en forma unívoca en uno de tales productos convergentes; el criterio de racionalidad es que en las últimas desigualdades ocurre la igualdad a partir de una cierta posición. (Véase Perron, lugar citado, pág. 122-127).

En la tesis de Habilitación [5] se plantea la tarea de determinar todas las transformaciones mediante las cuales una forma cuadrática ternaria $F(x, y, z)$ se convierte en otra de ellas, o- lo que conduce a lo mismo–que aplican una forma cuadrática ternaria en sí misma. Hermitte ya había encontrado[1] por otro camino (*J. f. Math.* **47**(1854), págs. 307 y sig.) la expresión general de tales transformaciones. El método de Cantor consiste en que convierte la forma $F(x, y, z)$ mediante aplicaciones lineales en la forma $4D(\xi\zeta - \eta^2)$, donde D es el determinante de la forma $F(x, y, z)$ y a continuación las transformaciones de las nuevas formas se determinan por sí mismas, para, finalmente, mediante una transformación intermedia describir explícitamente las fórmulas de correspondencia para la forma original. Compárese la representación en Bachmann *Arithmetik der quadratischen Formen*, 1a sección (1898), págs. 18-38 (en especial 20-25).

Mientras que la observación [11] no tiene mayor relevancia[2], mencionamos la obre posterior [19], entre los trabajos de Cantor de su tercer decenio de vida, pues al menos su tema se relaciona con la teoría de números. Cantor estaba entonces (1880) ya muy involucrado en la producción teórico- conjuntista. Pero motivado por una reciente publicación de un trabajo de Lipschitz en el parisino *Comptes Rendus* (del 8. de dieciembre de 1879), regresa a las investigaciones, que el había conducido ya hacia tiempo

[1]Según Bachmann (*J. f. Math.*(1873), págs. 331 y sig.) las investigaciones de Hermitte contienen un hueco que resovieron después tanto Bachmann como Hermite mismo; véase Hermite, lugar citado, **78**(1874), págs. 325 y sig.)

[2]Demostracion del teorema casí trivial: si $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son distintos entre sí, entonces se pueden elegir enteros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de tal forma que las $n!$ permutaciones (en w_i) de la expresión $x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n$ son distintas.

relacionadas con el trabajo sobre números primos de Riemann de 1859. El tema corresponde a la relación de diversas funciones numéricas $T(n)$ con la función Zeta de Riemann $\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}$, y de hecho sobre una relación de la forma $\sum_n \frac{T(n)}{n^s} = L(s)$, donde $L(s)$ se expresa mediante $\zeta(s)$. Junto con las fórmulas encontradas por Lipschitz, en las que $L(s)$ es sucesivamente igual a

$$(\zeta(s))^2, \ \ \zeta(s)\zeta(s-1), \ \ \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)},$$

donde $T(n)$ es la cantidad de divisores de n, cuya suma se representa por la función de Euler $\varphi(n)$, Cantor dió una serie de nuevas fórmulas, en las que $L(s)$ es igual a

$$(\zeta(s))^{\rho+1}, \ \ \frac{(\zeta(s))^{\rho+1}}{\zeta((\rho+1)s)}, \ \ \frac{\zeta(s)\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)}, \ \ \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}, \ \ \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\zeta(3s),$$

y estableció relaciones entre las correspondientes funciones $T(n)$. Además, generaliza la conocida fórmula $\sum_{d/n} \varphi(d) = n$ a

$$\sum_{d_1,\ldots,d_\rho} d_1^{\rho-1} d_2^{\rho-2} \cdots d_{\rho-1}^1 \varphi(d_1)\varphi(d_2)\cdots\varphi(d_\rho) = n^\rho,$$

donde la suma se extiende a todos los sistemas de soluciones de la ecuación $n = d_1 d_2 \cdots d_\rho d_{\rho+1}$. Finalmente Cantor proporciona una expresión analítica, mediante el método de transformación de Dirichlet de la teoría de Dirichlet de series, para $T(6n)$ dependiente de $L(s)$. Aquí se utiliza la relación fundamental, que hoy se conoce como la fórmula de reciprocidad de Mellin, y que Cantor deriva de Riemann y del teorema integral de Fourier (por cierto, en ese entonces no demostrado formalmente). Para concluir el trabajo Cantor observa que las fórmulas para $T(n)$ pueden servir también para obtener una expresión asintótica para $T(n)$; su intención, de regresar a esto en una futura oportunidad, nunca se realizó.

Respecto al interés de Cantor en teoría de números vale la pena mencionar dos asuntos más: el plan en 1884 de publicar en el *Acta Mathematica* un trabajo sobre formas cuadráticas (véase [III], pág. 20), que no se materializó, y la tabla para verificar empíricamente el teorema de Goldbach hasta el número 1000, que Cantor generó alrededor de 1884 y publicó después en [31]. Esta tabla, que también da la cantidad de posibles descomposiciones, y cuyo crecimiento promedio se permite exceder, está gravemente plagado de errores (de imprenta y otros).

Finalmente se deben mencionar aquí tres escritos casuales [12], [24] y [35], de los cuales el último Cantor dispone y redacta una carta de Weierstraß a Cantor sobre el problema de los tres cuerpos y la necrología [24] sobre el significado de Scheffer por su trabajo en funciones reales y el cálculo variacional. La conferencia [12], que trata sobre la utilidad del cálculo de probabilidades en las ciencias naturales, arroja datos históricos sobre el desarrollo del cálculo de probabilidades desde Fermat y Pascal hasta Gauß. Es de subrayarse las afirmaciones finales sobre la fundamentación filosófica del cálculo de probabilidades, que él cree merece una discusión filosófica al igual que la de cada ciencia aplicable.

No sólo para la ciencia, sino sobre todo para el propio desarrollo de Cantor, son más importantes que sus resultados aritméticos, sus esfuerzos y trabajos que dedicó a las *series trigonométricas*. La motivación para este trabajo provino de Heine así como del trabajo aparecido en 1870[1] de Hankel[2], que

[1]En el programa de felicitación de la Universidad de Tübingen; impreso de nuevo en *Math. Ann.* **20**(1882), págs. 63-112.

[2]Para la prehistoria de la teoría de conjuntos que descansa en estos y otros trabajos (en particular de Harnack y P.

se basa esencialmente en ideas de Riemann, así que Cantor es, por su posición, un alumno de Weierstraß, cuyas lecciones promovieron primero en él el interés en la escrupulosa fundamentación y tratamiento de los problemas analíticos.

Riemann expreso la afirmación de que cuando $\lim a_n$ y $\lim b_n$ no son ambos $= 0$, el término general

$$A_n(x) = a_n \cos nx \ b_n \operatorname{sen} nx$$

de una serie trigonométrica puede converger a 0 sólo para ciertos valores de x. En [6] Cantor formaliza la afirmación, probando que si para toda x en un intervalo se cumple

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x) = 0 \tag{*}$$

entonces se satisfacen las relaciones $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. El artículo [9] da una demostración más simple de este teorema. En [17] se vuelve contra un intento de Appell (*Archiv d. Math. u. Physik* **64**(1879), págs. 95 y sig.) de simplificar la demostración; él consigna que Appell utilizó una suposición inadmisible que conduce a confundir la convergencia usual de (*) con la convergencia uniforme de la misma expresión. En [18] fundamenta más su objeción mediante un contraejemplo al teorema implicitamente utilizado por Appell y llega a la distinción entre convergencia uniforme y no uniforme, donde recurre al desarrollo histórico (Cauchy, Abel, Seidel). Construye otro contraejemplo a un teorema de Stolz, probando que existe una serie convergente (pero no uniformemente) de funciones continuas, cuya suma es otra vez una función continua; sólo después sabrá él, que ya du Bois-Reymond y Darboux habían dado ejemplos de tales series.

Los resultados enunciados por Cantor en [6] y [9] fueron generalizados después; por un lado por Lebesgue, que demostró que para (*) se puede admitir un conjunto de excepciones de medida cero, por otro lado por Harnack (*Math. Ann.* **19**(1882), págs. 235 y sig.) y por W. H. Young (*Messenger of Math.* (2)**1938**(1908), págs. 44 y sig.), cuya investigación trae consigo la admisibilidad de conjuntos de la primera categoria (Baire) como conjunto de excepciones. Llamamos también la atención a la generalización del teorema de Lebesgue dada por Steinhaus (*Wiad. Mat.* **24**(1920), págs. 197 y sig.; véase *Fortschr. d. Math.***47**, págs. 260 y sig.); donde se cumple, con excepción de en un conjunto de medidad 0, que

$$\overline{\lim}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) = \overline{\lim}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Rajchmann (*Fundam. Math.* **3**(1922), págs. 287 y sig., y **4**(1923), págs. 366 y sig.) refinó sensiblemente el último resultado.

Cantor trató un segundo problema de la teoría de series trigonométricas primero en el trabajo [7]. Éste contiene la demostración de que dos series trigonométricas que convergen en todas partes y representan a la misma función, son idénticas; Riemann había tratado este resultado en algunos pasajes de su tesis de Habilitación pero sin demostración y en una forma no del todo explícita. [8] trae consigo la observación de Kronecker, de que para demostrar el teorema de unicidad se puede prescindir del teorema de Cantor de los coeficientes. Extraño, pero Kronecker no hizó comentario alguno sobre este

du Bois-Reymond) véase (además de [V]) principalmente la exposición detallada y cuidadosa de Jourdain en *Archiv d. Math. u. Physik* (3)**10**(1905), págs. 254-281, y **14** (1909), págs. 289-311 (continuados con respecto a Cantor en los volúmenes **16** y **22**).

resultado de Cantor, por ejemplo en las “Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale” (1894), donde el problema de unicidad aun se menciona como abierto (págs. 59 y siguientes).

En [10] generaliza Cantor su teorema de unicidad partiendo del correspondiente resultado en [8], y muestra que se puede prescindir del comportamiento de las series en un cierto conjunto de excepciones, a saber, en los conjuntos de puntos P, para los que existe un ν finito, tal que su ν-ésimo conjunto derivado $P^{(\nu)}$ es vacío. Al final de [23] Cantor incluso explica que ha logrado demostrar que como conjunto de excepciones se pueden permitir conjuntos cuyo conjunto derivado es numerable (es decir, ν finito o de la segunda clase de números), e inclusive ciertos conjuntos, cuya primera derivada no es numerable; no obstante, nunca retornó a esto. Cantor consideró una especie de continuación de su labor el trabajo de Scheefer sobre el teorema fundamental del cálculo integral que contiene extensos resultados sobre conjuntos excepcionales.

El trabajo también relacionado a esta problemática– donde se trata una pregunta planteada por Ascoli y du Bois-Reymond–persigue en primera linea la meta de demostrar el teorema de unicidad con conjuntos de excepción lo más general posible. Así, F. Bernstein (*Leipziger Ber.* **60**(1908), págs. 325 y sig.) y W. H. Young (*Messenger of Math.* (2)**38**(1908), págs. 44 y sig.), muestran que son admisibles conjuntos arbitrarios numerables como conjuntos de excepciones. Tampoco el resultado de de la Vallée Poussins (*Cours d' analyse I*) rebasa esta linea. Por el contrario, recientemente Rajchmann (*Fund. Math.* **3** (1922), págs. 287 y sig.; *Math. Ann.* **95** (1926), págs. 389 y sig.) y la Srita. N. Bary (*Fund. Math.* **9**(1927), págs. 62 y sig.) han mostrado que también son admisibles ciertos conjutos de excepciones no numerables (pero no, por ejmemplo, conjuntos *arbitrarios* de medida cero). Entonces todavía no era conocida la índole del conjunto de excepciones más general posible admisible en el sentido métrico. Otras contribuciones en esta dirección se deben a M. Riesz, W. H. Young, Rajchmann, Zygmund. (Véase en general también Plancherel, *L'Enseignement Math.***24**(1925), págs. 21 y sig. y 48 y sig.)– en otra dirección pero relacionados a los trabajos de Cantor se encuentran los de Carl Neumann (*Leipziger Ber.* **33** (1881), págs. 1-25, y **35**(1883), págs. 18-34); sobre las carencias del primer trabajo, Cantor mismo escribio a Neumann en 1882 (véase loc. cit. ebenda **35**, p. 33).

III. Publicaciones sobre Teoría de Conjuntos.[1]

Lo primero que trataremos aquí es la teoría de Cantor de los *números irracionales*, que no sólo está estrecha y objetviamente relacionada con sus nociones teórico-conjuntistas desde el punto de vista matemático, sino que subjetivamente están aún en mayor medida asociadas, en vista de la actitud y desarrollo de Cantor.

La introducción de los números irracionales se origina en [10]. Para extender los resultados de [7] que se presentan en los pasajes finales de [10], de los que se habló arriba, Cantor necesita al menos superficialmente el desarrollo de ideas “que servirán para poner en perspectiva circunstancias que aparecen siempre, tan pronto como se dan magnitudes númericas en cantidades finitas o infinitas”; a saber, la introducción de puntos límite y derivados (de orden finito) de conjuntos de puntos.[2] A este objetivo

[1]De las dos posibilidades para tratar el material, ya sea atender sólo algunos puntos, los más importantes, y analizarlos, o casi realizar un trabajo de reseña del contenido principal de los trabajos, se decidió el segundo, teniendo en cuenta el significado histórico de cantor.

[2]Mientras que en estas investigaciones Cantor introdujo la noción de número ordinal transfinito, aún no había generado el concepto de numerabilidad, sino hasta 1873 con el resultado de [13]; véase la correspondencia dada en [V], pág. 32.

sirve, por un lado, la teoría de los números irracionales como sucesiones fundamentales: una sucesión de números racionales a_i, en las que, para un apropiado $n_1(\varepsilon)$, con $n \geq n_1(\varepsilon)$ y todo m siempre se cumple $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, se asocia por definición un límite b y se definen las operaciones aritméticas así como la comparación mediante tales sucesiones.[1] Por otro lado, la transición a la geometría mediante la postulación de un axioma particular (*Axioma de Cantor*) se completa, asociando a cada número real un punto determinado de la recta númerica.

Es de remarcarse en la introducción de los números irracionales que el proceso de extensión de Cantor parte de los números racionales y después de la primera extensión, se repite; él subraya que los dominios así alcanzados si bien en cierto sentido coinciden, es esencial mantener su diferencia conceptual. Mediante repetición finita del proceso obtiene los números reales 1,2,. . ., de λ-ésimo tipo y concibe la observación de que los resultados del análisis se reducen a una forma de equiparamiento con los números reales de diverso tipo. Esto recuerda a la teoría de tipos de Russell con el axioma de reducción.

Con más detalles acude Cantor diez años después [16V] a la teoría de los números irracionales, que primero eran para él no un fin en sí, sino un instrumento; da allí una comparación diáfana e imparcial de su teoría con las de Dedekind y Weierstraß, que todavía hoy logran aceptación en la mayoría de sus partes, y se vuelve contra la falta de claridad y circularidad que se encuentran en las construcciones de los números reales. También aquí recalca Cantor la posibilidad y necesidad de distinguir conceptualmente los números reales de λ-ésimo tipo– incluso para cada número ordinal λ de la segunda clase. Protesta allí (como también en una carta a Dedekind de 1878, con motivo de la aparición del *fondamenti* de Dini) contra la objeción de Dedekind, de que pareciera que él cada vez quisiera introducir nuevos números; la diferencia de los distintos ordinales sólo debe restituir la forma conceptual de noción, sin proponerse una extensión del dominio de los números reales, y al mismo tiempo así se alcanza un lenguaje que permite describir las expresiones más complicadas del análisis en una forma más sencilla. Cuando Cantor afirma que no pueden haber sucesiones fundamentales de λ-ésimo tipo para λ de la tercera o alguna calse superior, y promete una prueba formal, parece ser que tuviése otra vez en cuenta la hipótesis del continuo. (?).

Finalmente coresponde aquí también la nota [29], en la que Cantor se torna contra la objeción, por un malentendido, de Illigens de que los números irracionales de Cantor (y Weierstraß) no serían útiles para la teoría de números ordinaria, puesto que ellos no respresentan "magnitudes concretas" con el "significado de una evidente multiplicidad" o cantidad.

El trabajo [13] aparecido en 1874, junto con la parte intermedia de [10] que es la primera publicación de Cantor perteneciente a la *teoría de conjuntos*, da el paso decisivo para delimitar claramente lo transfinito, teniendo a la vista la noción de cardinalidad: mientras que en el infinito elemental, todas las diferencias desaparecen, de hecho Cantor mismo supuso primero que el continuo sería numerable [IV], se desprende del teorema de §1 del trabajo, donde el conjunto de los números (reales) algebraicos es numerable, en §2 la demostración –primera utilizando el concepto de numerabilidad– de que para el conjunto de los números reales ya no se cumple esto; con este fin asocia a cada sucesión de números reales un número que no esté en ella mediante el método de las cajas. De la comparación de ambos resultados se deduce, como lo resalta Cantor en la introducción, una prueba de la existencia de una cantidad infinita de números trascendentes en cada intervalo–un procedimiento, que por cierto, contrario

[1] Una detallada exposición histórica de la teoría de Cantor de los números irracionales comparándola con otras teorías de esa epoca (incluso desde un punto de vista filosófico) se debe a Jourdain *Archiv d. Math. u. Phys.* (3) **16**(1910), págs. 23-43.

a la opinión generalizada, es fundamentalmente constructivo y no puramente existencial. Al igual que acostumbraban sus contemporáneos, tan pronto como se imprimió, Cantor proclama que para las ideas actuales §1 no sólo pasa a segundo plano en comparación con §2, sino que le parece elemental.

Si se quería trascender a las dos cardinalidades transfinitas recién encontradas, era inmediato intentarlo pasando del continuo unidimensional a uno de mayores dimensiones. Este pensamiento ocupó a Cantor en el verano de 1874, como lo prueba su correspondencia con Dedekind. Que nuevas ideas requiere, descubrir una problema aquí, se explica mediante una observación escrita de Cantor, donde califica de "hasta cierto punto absurda" la idea de un amigo en Berlín de la aplicabilidad del continuo lineal sobre el plano, "pues es claro por sí mismo que dos variables independientes no se pueden reducir a una sola"; él recibe una información similar posteriormente en una visita a Göttingen con motivo del aniversario de Gauß en 1877. En una carta del 20 de junio de 1877 a Dedekind le comunica que después de años de esfuerzo ha logrado aplicar un continuo unidimensional sobre uno de n dimensiones, y le pide a su amigo que verifique la demostración; el resultado le parece a él mismo muy sorprendente ("je le vois, mais je ne le crois pas") y que estremece la noción de dimensión, respectivamente, la caracterizabilidad de la dimensión mediante el número de coordenadas independientes. La respuesta de Dedekind indica un hueco en la demostración (que depués fue eliminado por J. König mediante un truco sencillo), lo que permite a Cantor pasar del desarrollo en fracciones decimales inicialmente usado a represenatciones en fracciones; además Dedekind resalta, teniendo en cuenta la noción de dimensión defendida por él, que es momento de considerar la *continuidad* de la aplicación.

En esencia la demostración mejorada comunicada a Dedekind, es la que Cantor parte de coordenadas irracionales, es con la que Cantor en [14] prueba la independencia de la cardinalidad de un continuo de su diemensión. Se vincula a las investigaciones de Riemann y Helmholtz, en las que la noción de n-variedad continua extendida desempeña un papel fundamental, y retoma la pregunta, cómo cambia la situación, cuando se añade la hipótesis tácita en múltiples ocasiones de la continuidad[1] de la correspondencia (véase [15], véase abajo). Después de mencionar las dificultades que surgen cuando se utiliza la expansión decimal en lugar de la de fracciones, Cantor incluso señala que se puede extender el resultado al caso de una cantidad infinita numerable de dimensiones. Para teminar comenta un procedimiento inductivo (no dado allí), vincula el teorema a uno donde ambas cardinalidades la numerable y la del continuo involucran todas las posibles cardinalidades para subconjuntos infintos del continuo (hipótesis del continuo).

Al comienzo de este trabajo Cantor introduce la noción de equivalencia y explica basado en ella el concepto de cardinalidad en forma más concreta que como lo hizó después en la exposición [32]. Se debe hacer notar, que de inmediato Cantor afirma que es posible la comparación entre cardinalidades; es claro que consideraba entonces esta propiedad como evidente, de hecho, como una consecuencia de su noción original de conjunto. Además, Cantor resalta aquí la oposición entre conjuntos finitos e infinitos considerando la cardinalidad de los subconjuntos y repite algunas propiedades previamente mencionadas de la menor cardinalidad, la de los conjuntos numerables.

En estrecha relación con este trabajo está, en cierta forma en contraposición, el ensayo [15] de una demostración del siguiente teorema: cuando dos dominios G_m y G_n de dimensión m y n se aplican continuamente entre sí, de tal forma que cada punto de G_m le corresponde al menos un punto de G_n, y a cada punto de G_n a lo más un punto de G_m, entonces $n \geq m$. Este teorema conendría en sí el teorema

[1]De hecho, no en [14], pero si en la traducción al francés revisada por Cantor (de 1883) se encuentra la observación de que la hipótesis de la continuidad aparece con frecuencia en los trabajos de Riemann y Helmholtz.

general de la invariancía de la dimensión. Éste había sido demostrado, para los casos $m = 1$ y $m = 2$, por Lüroth[1], que había estado motivado por el recién mencionado trabajo de Cantor; Cantor advierte en su trabajo sobre la nota de Lüroth así como los correspondientes intentos de Thomae y Netto, cuya finalización fue precedida otra vez por un intercambio epistolar con Dedekind. Para una crítica de la demostración de Cantor véase Jürgens en estos *Jahresbericht*7(1899), págs. 50-55. Es sabido que se debe a Brower una demostración inobjetable de la invariancia de la dimensión (*Math. Ann.* **70**(1911), págs. 161-165, y otros trabajos).

A finales de los años 70 comienza a aparecer la importantisima sucesión de trabajos [16], que en primera linea se basa en la *teoría de conjuntos de puntos*, a saber, la teoría de conjuntos derivados, la investigación de la estructura de los conjuntos de puntos y la teoría de la medida. Sólo le precedió la introducción de algunos conceptos menos relacionados en [10], donde se muestra claramente cómo emergió el análisis de conjuntos de puntos generales a partir del teorema de unicidad para series trigonométricas, esto es, mediante la necesidad de generalizar ese teorema admitiendo ciertos conjuntos de excepciones. Un septimo artículo planeado para esta sucesión no tuvo lugar (por la enfermedad de Cantor).

En [16I] incorpora una análisis detallado, con referencia a [14], de los conjuntos lineales (que están en una recta) o “variedades”, en el que los clasifica según ciertos principios. Él resalta que la noción de derivado, a cuyo desarrollo fue motivado por Dini, se puede extender a mayores dimensiones, y clasifica los conjuntos según tres puntos de vista:

a) Según su comportamiento al formar conjuntos derivados sucesivos; si P', P'', $P^{(3)}, \ldots$ son los derivados del conjunto P, y si $P^{(\nu)}$ es vacío para algún ν finito, entonces el conjunto P es del primer genero, y de hecho, del n-ésimo cuando $P^{(n+1)}$ es vacío pero no lo es $P^{(n)}$. Si ninguno de los $P^{(\nu)}$ es vacío, entonces P es del segundo genero.

b) Por su comportamiento respecto a un intervalo dado; los conjuntos densos en todos partes en el intervalo se distinguen de los que no lo son. (Véase también el uso que en forma independiente hace du Bois-Reymond[2] de la misma noción en el mismo volumen de los *Annalen*, pág. 287, así como el volumen **16**, pág. 128, donde du Bois se había expresado algunos años antes sobre tales relaciones con Cantor.)

c) Según su cardinalidad; por lo pronto, Cantor aplaza la pregunta de si los numerables y los continuos representan a todos los conjuntos de puntos infinitos, y demuestra que estas dos clases son diferentes de un modo un tanto distinto al de [13] (véase la simplificación formal de Poincaré, Seis contribucuones sobre temeas selectos de la matemática pura y de la física matemática (1910), 5a. Lección).

En [16II] Cantor comienza con la introducción de notación que en parte se modifican en el siguiente trabajo, entre otros, del conjunto unión de conjuntos ajenos entre sí y para conjuntos no ajenos, así como para la intersección de conjuntos; entonces demuestra el teorema (fundamental para los cálculos con cardinalidades) que afirma que la unión de conjuntos ajenos entre sí y la unión de conjuntos equivalenes a estos son equivalentes. Con la ayuda del la noción de intersección se continua el proceso de formación

[1] *Sitzungsber. der Erlanger physikalisch. Gesellschaft* **10**(1878), págs. 190-195; véase también ebenda **31**(1899), págs. 87-91, así como *Math. Ann.***1907**, págs. 222 y sig.

[2] Para la relación de du Bois con Cantor véase el inicio del Capítulo III de “Allgemeinen Functionentheorie” de du Bois, además Schoenflies “Mengenbericht” de 1900, pág. 54 y Jourdain en *Archiv der Math. u. Physik* (3)**22**(1914), pág. 9

de conjuntos derivados a conjuntos del segundo genero, haciendo

$$P^{(\infty)} = \mathfrak{D}(P', P'', \ldots P^{(\nu)}, \ldots), P^{(\infty+1)} = (P^{(\infty)})',$$
$$P^{(\infty+n)} = (P^{(\infty+n-1)})', \ldots, P^{(2\infty)} = (P^{(\infty)})^{(\infty)} \text{ etc.}$$

De esta forma Cantor usa por primera vez en una publicación los números de la segunda clase, cuya necesidad para la continuación de este proceso de formación de derivados reconoció 10 años antes. Los conjuntos del primer genero están entonces caracterizados por $P^{(\infty)} = 0$. Cantor observa que siempre se pueden construir conjuntos para los que los conjuntos $P^{(\infty)}$ o en general $P^{(\infty+n)}$, $P^{(2\infty)}$, etc. consistan en un sólo punto; tales conjuntos son densos en ninguna parte en cualquier intervalo y son además numerables.

Al inicio de [16III] se encuentra un pasaje donde se habla de los conjuntos de puntos lineales como de variedades *legítimas* dadas.[1] Quizá se debiera dar más peso a esta explicación de Cantor que el usual. Posteriormente resalta también que un conjunto, cuando se le deba aplicar la noción de cardinalidad, debe estar *bien definido*[2]; él explica esto–no suficientemente nítida y claramente– diciendo que mediante la definición del conjunto y del principio del tercero excluido debe estar *internamente* determinado si un objeto está en el conjunto o no, y si dos de los objetos pertenecientes al conjunto coinciden o no a pesar de la diferencia formal en la que fueron dados. La determinación interna se contrapone a la determinación real (externa) que pocas veces se logra (por ejemplo, no para la trascendencia de π; la prueba de la trascendencia de Lindemann aparece en el mismo volumen de los *Annalen*). Cantor menciona que la expresión "cardinalidad" la ha tomado de Steiner, quién la utiliza sólo para una correspondencia proyectiva, es decir en un sentido particular; frente a esto Cantor acentúa el carácter *general* de la noción de cardinalidad, que por ello puede encontrar aplicación en todas las áreas de la matemática, da igual sea continua o discontinua. Además, transfiere en este trabajo la noción generada previamente para conjuntos lineales a los de dimensión n, en particular la noción de punto límite, de conjunto derivado y de densidad. Para probar el teorema que afirma que en un espacio de n dimensiones un conjunto infinito de dominios de dimensión n, continuos casi ajenos entre sí, que a lo sumo se interesectan en sus fronteras debe ser numerable, Cantor asocia a cada dominio (después de transformar el espacio de n dimensiones en la esfera unitaria de n dimensiones) una medida espacial determinada.[3] Él particulariza el teorema a los casos $n = 1$ y $n = 2$, al último le atribuye importancia para la teoría de funciones complejas; una observación posterior suena como premonición al hecho de que para un punto dado

[1]Véase también [16V], p. 587 (también se encuentra allí la valiosa, para otros fines, explicación de conjunto como "cada multiplicidad , que se puede pensar como una unidad"). También abunda Cantor, en la conferencia [IV] dada mucho después, sobre los conjuntos de excepciones de las series trigonométricas, de donde parte su investigación: "Estos [los conjuntos de excepciones] deben estar dados por una regla, es decir, se debe poder decidir, si un punto les pertenece o no"; el, "es decir", en esta explicación es, si se debe tomar literalmente, a lo sumo ilustrativo.

[2]Véase también (además de los "sistemas inconsistentes", p. 53) la reseña de Cantor sobre el trabajo de Frege "Grundlagen der Arithmetik" en *Deutschen Literaturzeitung* 6(1885), especialmente págs. 728-29, donde Cantor reprocha el recurrir a toda la fuerza de la noción como en los conjuntos indeterminados. En esta reseña merece mencionarse también el énfasis con el que Cantor (en concordancia con Frege) exige apartarse de momentos temporales, espaciales o sicológicos en la fundamentación en la la aritmética; en cambio, con sus observaciones terminológicas es claro que no legitima a Frege.

[3]Ya que Cantor considera como parte de los dominios también su frontera, tal medida espacial no siempre es posible. Este método de demostración, que acusa cierta analogía con uno usado por Poncaré para probar la convergencia de las series teta de funciones automorfas (*Acta Math.* **1**), es, por cierto, poco adecuado para el presente objetivo.

su imagen inversa respecto a una función analítica dada conforma un conjunto a lo sumo numerable.– Al final de [16III] discute Cantor una extraña propiedad de los conjuntos numerables: si se elimina un conjunto numerable denso en todas partes de un espacio R_n ($n \geq 2$) o de un subdominio continuo, el resto R' sigue siendo continuo y conexo en el sentido de que cualesquiera dos puntos de R' se pueden unir mediante una curva continua en R'. Aquí se vincula Cantor a ciertas consideraciones sobre la posible índole del mundo real (véase arriba pág. 31); si se exige al espacio que sólo sean posibles movimientos continuos, incluso entonces el espacio discontinuo R' seguiría siendo útil. Puesto que tampoco se sigue la continuidad del espacio de la posibilidad de un movimiento continuo, Cantor propone, para investigar el tipo de continuidad del espacio, considerar una mecánica modificada.

En [16IV] Cantor demuestra varios teoremas sobre la numerabilidad de conjuntos de puntos, después de introducir la noción de conjunto de puntos (de dimensión n) aislado y de presentar algunos hechos sobre ellos; a saber, los teoremas donde cada conjunto del primer genero así como cada conjunto P del segundo genero, para los que $P^{(\infty)}$ es numerable, son numerables. La última afirmación la extiende permitiendo que aparezca un $P^{(\alpha)}$ en lugar de $P^{(\infty)}$, donde α es un número arbitrario de la segunda clase; para la demostración se recurre a inducción transfinita. Apelando a trabajos de du Bois-Reymond y Harnack sobre el cálculo integral, en particular sobre aquellos conjuntos de puntos que se pueden distribuir en una cantidad finita de intervalos de suma arbitrariamente pequeña (es decir, de medida de Cantor o de Peano 0), Cantor demuestra el siguiente teorema, en pequeña escala demostrado por los autores mencionados: si para un conjunto de puntos lineal acotado P el derivado es numerable, se puede distribuir P en una cantidad finita de intervalos con suma arbitrariamente pequeña.

La continuación inmediata [16V] que ciertamente representa la más interesante y multifacética de la obra de Cantor, que a pesar de sus carencias permite reconocer el interior alborotado de Cantor[1], comienza (véase arriba pág. 17) con el reconocimiento de que sin una extensión de la serie de números en el transfinito no sería posible una continuación razonable de sus investigaciones; tal extensión se haría ecandalosa para el mundo matemático recién aparezca, pero sin duda acabaría por imponerse. El subraya la diferencia entre el infinito impropio (potencial) y el propio (actual); como ejemplo del último menciona–una propuesta discutible– el punto infinitamente alejado de la teoría de funciones, a cuyo lado se colocan los nuevos números que se están incorporando de acuerdo a la certeza de su carácter infinito; mientras tanto, ellos aparecen en cardinalidad infinita, distintos entre sí y con relaciones legítimas entre ellos. Cantor subraya aquí en especial que estas asociaciones no son de la forma que puedan ejemplificarse mediante alguna relación entre números finitos; esto se contrapone visiblemente a la nuevo modo de ver de Hilbert (véase especialmente *Math. Ann.* **95**, págs. 165 y sig. y 190). Cantor anuncia entonces los dos nuevos principios de construcción (expuestos con más detalle en §II), que sirven para definir los nuevos números, así como el principio de restricción o inhibición que se contrapone a ellos. Mientras que el primer principio de construcción corresponde al paso de ξ a $\xi + 1$, el segundo no sólo permite el paso de $\xi + \nu$ a $\xi + \omega$, sino que genera un nuevo número ordinal, el mas cercano mayor que todos, para cada conjunto de ordinales. Sobre el principio de inhibición Cantor se expresa, proporcionalmente, con más claridad en la pág. 589 (él insiste "en la exigencia de que la creación de un nuevo número entero sólo es posible mediante uno de estos principios, cuando la cardinalidad de la colección de los números previos sea la de una clase de números previamente definida").

[1]En especial de este trabajo se resaltaron algunas particularidades en la parte I. El que Cantor se decidiera a publicarlo como una edición especial [21] previo a su aparición en los *Math. Ann.*, revela con que claridad había evaluado su significado.

En §2 sigue la distinción entre cardinalidad (número cardinal) y cantidad [1] (en el sentido de número ordinal), que ya no se corresponden entre conjuntos infinitos. Una cantidad sólo se asocia a los conjuntos bien ordenados, que de hecho se definen en forma independiente, pero cuya introducción aquí se debe a los primeros números ordinales. De la definición de similaridad entre conjuntos bien ordenados se desprenden observaciones sobre la conexión entre cardinalidad y número ordinal así como la referncia a la "extraña ley lógica, fundamental y muy productiva, por su validez general", según la cual cada conjunto se puede transformar en un conjunto bien ordenado; el tratará de regresar a esto después. Aquí se definen primero (en §3) las operaciones aritméticas, las reglas fundamentales para las operaciones, y a continuación se anuncia la demostración de la hipótesis del continuo mediante la teoría del buen orden. Cantor interrumpe las reflexiones sobre la teoría de conjuntos abstracta por el teorema, según el cual la numerabilidad del derivado de un conjunto de puntos es condición necesaria para la anulación de un $P^{(\alpha)}$, donde α es un número de la segunda clase, y mediante el anuncio de una demostración de este teorema en el *Acta Mathematica* así como de una aplicación del teorema a la teoría de funciones por Mittag-Leffler.

En la continuación Cantor procede a reflexiones generales, especialmente filosóficas. Comienza en §4, como ya lo había hecho antes en [16III] (pág. 121, nota de pie de página) con el rechazo al infinitamente pequeño actual[2] y combate la concepción finitística de Kronecker, a quién reconoce cierto mérito metodológico, que considera básicamente tanto infructuoso respecto al avance de la ciencia, como equivocado (y además no proseguible). Remite a opiniones de Aristóteles que conducen a la misma dirección, y las rechaza como *petitiones principii* respectivamente, semiverdades; desde luego, él llego a sus concepciones sólo mediante la investigación y casí contra su voluntad. Después se confronta en §5 con Locke, Descartes así como con Spinoza y Leibniz; a la afirmación aristotélica-escolástica "Infinitum actu non datur" contrapone: "Omnia seu finita seu infinita *definita* sunt et excpeto Deo ab intellectu determinari possunt" y se dedica a los argumentos de finitud del pensamiento del hombre. Cantor espera poder resolver las dificultades principales en el sistema de Spinoza y Leibniz recorriendo el camino por él propuesto, en particular, porque según su método puede aparecer una explicación matemática formal *orgánica*, de la unilateralidad e insuficiencia descubierta por Kant (véase arriba pág. 31). Por lo demás, Cantor enlaza después (§7) los pasajes de Leibniz dirigidos contra el infinito con opiniones opuestas del mismo autor así como la posición positiva de Bolzano, que sólo fracasó porque le faltó una noción suficientemente general, más clara y definida de cardinalidad y cantidad (es decir, de número ordinal).[3] En la nota correspondiente se logra consignar los pasajes de filósofos de entonces, por ejemplo Dühring, contra el infinito propio.[4]

[1]Véase también la reseña mencionada en la pág. 241 (Frege).

[2]Véase también [28I], págs. 112 y siguientes, además [32I], p. 501, [33] y [34] así como la reseña arriba mencionada pág. 41, nota pie de página 1. Ya en 1878 había dado la misma dura opinión en una carta a Dedekind (frente a la nota de pie de página en la p. 9 del trabajo de Thomae *Abriß einer Theorie der kompl. Funktionen etc.*, 2a ed.); se encuentran estas objeciones más detalladas (también respecto a las fantasias infinitarias de du Bois-Reymond) en [33].

[3]Si aquí también, como, por ejemplo, con respecto del ejemplo de una función continua diferenciable en ninguna parte, aún descansan otros tesoros en el legado de Bolzano, y si el editor de "(Paradoxien des Unendlichen") (publicado después de la muerte de Bolzano) se permitió cambios realmente esenciales y supuestamente para mejorar respecto del original, nos instruirá la continuación iniciada por Jasek y la edición en preparación en Praga de las obras completas de Bolzano.

[4]El pasaje de Kant sobre el transfinito no siempre se enjuicia como lo hizo Cantor; véase, por ejemplo, Natorp "Logische Grundlagen der exakten Wissenschaften" (Leipzig 1910), págs. 167 y siguientes.

En §6 resalta Cantor las ideas más importantes (que incluso en Bolzano no son suficientemente válidas), de que por el hecho de que los nuevos números infinitos (números ordinales) que se quieren introducir no posean todas las propiedades de los números finitos o incluso tienen ciertas características incompatibles con estos, no es razón suficiente para rechazarlos; porque cada extensión de un dominio básico (el señala el ejemplo de los números complejos como extensión de los reales) trae consigo la pérdida de ciertas características. Cantor subraya, a este respecto, la realidad inmediata de los números ordinales infinitos en comparación con los números complejos, que también se pronuncia (véase arriba pág. 22) en la 2a ed., totalmente bajo la influencia de Cantor, de "Elementarer Arithmetik" de Fr. Meyers (Halle 1885). El siguiente §8 contiene los argumentos convincentes de Cantor sobre la esencia de la matemática (véase arriba pág. 19), y la preocupación por el rechazo que podría redundar en daños a la libertad de la matemática, cuya esencia reside precisamente en su libertad. En esta dirección se debe atender que Cantor instintivamente no contempla a la matemática como un juego con el único criterio de la falta de contradicción (véase también el lugar citado sobre la realidad pasajera); él llega a los números ordinales transfinitos no por la vía "libre" de [16V], sino obligado en cierta medida por el proceso iterativo de la generación de los conjuntos derivados (proponiéndose simbolizarlo en general). Incluso su exagerado rechazo de lo infinitamente pequeño se explica mejor por la sensación de preferencia transitoria–que se deriva de los conjuntos[1] "dados"– de que los números transfinitos adolecen en comparación con los sistemas de magnitudes generales no arquimedianos.

A la comparación, arriba mencionada, de las teorías aritméticas de los números irracionales sigue en §10 una discusión de la noción de continuo (véase arriba pág. 19). Después de bosquejar los puntos de vista de los pensadores griegos y escolásticos sobre este concepto, Cantor lo aclara sin involucrar la parte metafísica, sobria- y matemáticamente. No quiere apelar a la noción de tiempo[2] (como Kant) y tampoco a la "forma mental del espacio" para comprender el continuo, pues más bien ocurre lo contrario, para la comprensión del espacio y del tiempo se necesita una definición matemática exacta del continuo. Para resolver esta tarea, cuyo tratamiento por Bolzano igualmente criticará después, parte Cantor, basado en la noción aritmética del número real, del espacio aritmético $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $(-\infty < x_n < +\infty)$, donde pretende restringirse a $n = 1$, teniendo en cuenta que estos espacios son equipotentes entre sí para todo valor de n; a la multicitada hipótesis del continuo añade Cantor que también el conjunto de todas las funciones continuas y conjuntos similares (supuestamente también el conjunto de funciones integrables) tienen la cardinalidad del continuo; también cree en la generalización de la hipótesis del continuo lo mismo para las sucesivas formaciones de potencias (conjuntos de todas las funciones) dependiendo de la formación de las clases de números. Un continuo en el interior de G_n lo define como un conjunto perfecto y conexo, donde un conjunto de puntos T es llamado conexo, cuando para cuelesquiera dos puntos t y t' de T y para $\varepsilon > 0$ arbitrario existen una cantidad finita de puntos $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$, tales que las distancias $\overline{tt_1}$, $\overline{t_1t_2}, \ldots, \overline{t_\nu t'}$ son todas $< \varepsilon$.[3] Para ilustrar la definición de conjunto perfecto Cantor da de paso una descomposición aditiva de ciertos conjuntos de puntos, que no es la adecuada (véase abajo pág. 45), así como el conocido ejemplo de un conjunto perfecto, denso en ninguna parte,

[1]Véase, por ejemplo, el pasaje referido abajo (pág. 50) de [28I].

[2]Véase también la polémica de Cantor con la idea muy difundida de que la noción de magnitud presupone el tiempo, en la reseña mencionada en la pág. 41.

[3]Esta definición, que no es invariante repecto a aplicaciones topológicas, no resulta ser la más adecuada para conjuntos arbitrarios; ha pasado a segundo plano en favor de la de Hausdorff.

que (en otra forma) había sido publicado ya en 1875 por H. J. St. Smith[1], pero que claramente no era conocido para Cantor. En la interesante nota 12 subraya Cantor finalmente la independencia de su definición de continuo de la dimensión, introduce la noción de "semicontinuo" y se obliga, mediante sus nociones recién introducidas, "a estudiar la totalidad de objetos tanto de la geometría algebraica como de la trascendente en todas las formas posibles, donde la generalidad y rigurosidad de los resultados no se puede mejorar mediante ningún otro método".

Los últimos párrafos, basados en los principios de construcción e inhibición, dan un esbozo de la teoría de números de la segunda clase incluyendo la demostración de que la totalidad de estos números posee la cardinalidad más grande siguiente (uso del primer número de la tercera clase), así como un estudio más detallado de las operaciones del cálculo con esos números, donde también se clasifican y caracterizan los "números primos" entre ellos. En particular vale la pena mencionar que Cantor (pág. 582 abajo) demuestra el teorema de equivalencia para conjuntos de la cardinalidad de la segunda clase de números añadiendo que este teorema tiene validez general[2], y promete regresar a esto por el interés propio del teorema; es sabido que incluso en la exposición general [32] falta la demostración, que pronto es dada por F. Bernstein.

El trabajo [16VI] especialmente rico en contenido matemático, que presenta la demostración de algunas afirmaciones de la obra previa, comienza con una versión general del método de encajonamiento en intervalos, que en referencia a la propiedad distributiva, esencialmente coincide con la que en Zermelo (*J. f. Math* **158**(1927), p. 155) aparece como Teorema de Peano; la formulación de Peano es un poco más general y adecuada.[3] De interés aquí es la noción de la elección *legítima* de los subdominios, de la que habla Cantor en las particiones sucesivas del domino original; el que esto se pueda indicar en el sentido de una regla fija o no, puede interpretar la opinión de Cantor sobre el axioma de elección. Él observa que el método desarrollado por él, en su esencia es muy viejo y se utiliza actualmente en algunos trabajos de Bolzano y Weierstraß, y que no se debe exclusivamente a Bolzano; ciertas objeciones (de Kronecker) contra este método de prueba las compara Cantor con las falacias de Zenon. A algunas observaciones sobre los conjuntos numerables siguen las demostraciones, usando los números ordinales, de los teoremas:

A. Un conjunto perfecto no es numerable. Demostración mediante esferas de dimensión n ajenas entre sí.

B. Si $P^{(\alpha)}$ es numerable, donde α es de la primera o segunda clase de números, entonces P y P' son numerables. Demostración usando la fórmula

$$P' = \sum_{\gamma<\alpha}(P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}).$$

C. Si P' es numerable, existe α de la primera o segunda clase de números tal que $P^{(\alpha)}$ es vacío. Demostración indirecta usando la fórmula

$$P' = \sum_{\gamma}(P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}) + P^{(\Omega)}.$$

[1] *Proc. London Math. Soc.* (1) **6**, págs. 147 y sig. En los años 1881/82 se publicaros varios de tales ejemplos por otros autores.

[2] Esta hipótesis se enuncia también en una carta de Mittag-Leffler a Cantor del 5 de abril de 1883.

[3] Véase para ello F. Levi en *Journ. f. Math.* **161** (1929/30), págs. 101 y siguientes.

D. $P^{(\Omega)}$ (la intersección de todos los $P^{(\alpha)}$) es perfecta, si P' no es numerable.

E. Si P' no es numerable, es decir, según D. $P^{(\Omega)}$ es perfecto, entonces $R = P' - P^{(\Omega)}$ es numerable, y se obtiene la descomposición $P' = R + P^{(\Omega)}$, donde R es numerable.

F. Existe α de la primera o segunda clase de números tal que $P^{(\alpha)} = P^{(\Omega)}$.

G. Si R es el conjunto de E., existe un α de la primera o segunda clase de números tal que la intersección $\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)})$ es vacía. Este teorema lo origina Bendixon y es la corrección del error en [16V] recién mencionado.

Después de introducir los conceptos de “cerrado”, “denso en sí mismo”, y “separable” Cantor muestra que cada conjunto cerrado se puede representar como el derivado de un conjunto; advierte expresamente sobre la diferencia entre las nociones de “denso en sí mismo” y “denso en todas partes”, donde la realización de las págs. 472 y siguientes tienen hoy sólo validez limitada (¡nociones relativas!).

De estos resultados, el trabajo previamente publicado [22] proporciona una parte, a saber, la demostración de los Teoremas A., B. y C., mientras que [25] contiene generalizaciones a conjuntos *no* cerrados (y en el párrafo final de las observaciones mencionadas en la parte I, pág. 31 sobre átomos, etc.)

El §18 del trabajo [16VI]–cuya enumeración de párrafos se vincula a la de [16V]– así como una pequeña parte del trabajo [23] tratan la teoría de la *medida*, que de inmediato se define para un conjunto de puntos P de dimensión n. Se describe para cada punto de la cerradura de P, es decir, del conjunto $P + P'$, una esfera de dimensión n con radio ρ, y con ésta se expresa la medida del espacio así cubierto P_ρ, que consiste en una cantidad finita de partes, mediante la integral $F(\rho) = \int_{P_\rho} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ y se define la medida de P como $\lim_{\rho\to 0} F(\rho)$. Cantor demuestra esencialmente sólo el teorema de que la medida de un conjunto de puntos P coincide con la medida del derivado P', y por inducción transfinita, con la medida del conjunto de puntos $P^{(\gamma)}$, donde γ pertenece a la primera o segunda clase de números; con ello se reduce la determinación general de la medida a la de los conjuntos perfectos, que Cantor promete tratar en detalle después. Él también llama la atención a la existencia de conjuntos perfectos de medida cero, que entonces son densos en ninguna parte, mientras que a la inversa, un conjunto perfecto denso en ninguna parte bien puede tener medida positiva.

Es de resaltarse, primero, que Cantor al final de §18 generaliza la definición, sustituyendo la integral de arriba por la siguiente:

$$F(\rho) = \int_{P_\rho} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

donde $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función absolutamente integrable; esto corresponde al desarrollo posterior (paso a una función peso arbitraria φ, más general aún por el uso de la integral de Stieltjes). Cantor indica que esta generalización desempeña un papel esencial en las aplicaciones físicas de la teoría de conjuntos, sobre las cuales espera publicaciones. De hecho, tales nociones aparecen en la mecánica estadística (respectivamente en la teoría cuántica).

Segundo, llama la atención la observación de Cantor en [23], pág. 390, sobre la necesidad de una teoría de la medida en las investigaciones sobre la dimensión de las variedades continuas, cuyo tratamiento anuncia en el *Acta Math.* Una teoría de la dimensión con estas bases se desarrolló recientemente por Hausdorff (*Math. Ann.* **79**(1919), págs. 157 y sig.); véase también, por ejemplo, Bouligand, *Bull. des Sciences Math.* (2)**52**(1928), págs. 320-344 y 361-376 (aplicaciones teóricas potenciales). Así parece que Cantor dispone todavía de un gran programa que no se llevó a cabo sólo por su enfermedad y sus efectos así como por el cambio de sus intereses, los *números* (en lugar de los conjuntos).

La definición de Cantor de medida se anticipa a las observaciones de Hankel y a la literatura asociada a un error de Hankel; véase también el artículo de Rosenthal en la Enciclopedia, págs. 962 y sig. Al mismo tiempo que el de Cantor aparece el trabajo de Stolz (*Math. Ann.* **23**(1884)), donde se encuentra una definición de medida que coincide con la Cantor (para conjuntos lineales).

En lo que respecta a la relación con Cantor en la literatura posterior sobre la medida de conjuntos de puntos[1] sólo se lograron avances, mediante los trabajos de Peano y Jordan, al añadir una medida exterior y una condición sobre medibilidad, relativas a la aditividad de la medida; sin embargo, no se le asocia medida, en general, a los conjuntos cerrados, lo cual si ocurre con Cantor (con el mismo valor) y se mantiene también en la teoría de Lebesgue. Por ello no es exacta la apreciación de que la teoría de Peano-Jordan comprende a la de Cantor. La deficiencia esencial en la teoría de Cantor radica principalmente en que según Cantor los conjuntos cerrados serían suficientes (véase también la definición de conexidad en [16V]); así, las definiciones se hacen según el caso de los conjuntos cerrados (véase el paso a la envolvente cerrada); sin este "prejuicio" hubiese logrado Cantor al menos la medida exterior de Lebesgue. En cualquier caso, sus definiciones, para el caso de los conjuntos cerrados, coinciden con las actuales.– También su enfoque del problema del continuo se vió influenciado por su sobrestimación de los conjuntos cerrados; cuando Bernstein en su tesis doctoral reduce sensiblemente la importancia de estos conjuntos, Cantor se sorprendió mucho e interrumpió de inmediato ciertas investigaciones sobre cardinalidad a las que estaba dedicado.

El §19 de [16VI] así como el inicio de [23] se dedican a la determinación de la cardinalidad de los conjuntos perfectos.[2] Para esto Cantor construye directamente, sin recurrir al teorema de equivalencia, una aplicación de los conjuntos perfectos sobre el continuo[3]; el procedimiento ahí utlizado en los conjuntos lineales densos en ninguna parte tiene especial importancia en la teoría de las funciones reales de una variable (véase, por ejemplo, Denjoy, *Journal de Math.* (7)**1**(1915)). Cantor mismo realiza una importante aplicación en [23], al construir una función monótona continua, cuya derivada se anula fuera de un conjunto perfecto P denso en ninguna parte. De especial interés es el caso en el que P tiene medida 0 según Cantor–o lo que es igual– medida de Lebesgue 0; con ello se obtienen las hoy llamadas funciones "singulares", cuya derivada se anula casi en todas partes. La existencia de tales funciones está en contradicción, como lo observó Scheefer, con un teorema (erroneo) de Harnack. Aquí radica también el origen de la publicación de Scheefer en el siguiente volumen del *Acta* sobre la relación entre una función y sus derivadas.

Al final de [16VI] retoma Cantor el problema del continuo con la afirmación de que con el teorema sobre la cardinalidad de los conjuntos perfectos junto con teoremas previos, se deduce que la cardinalidad del continuo es el segundo transfinito; como sabemos de la carta a Mittag-Leffler del 26 de agosto de 1884 (véase [III], p. 16), Cantor pensó que este era el punto de partida de la construcción de un conjunto cerrado de cardinalidad $\aleph_1$– algo que, por supuesto, no logró.

Cantor da, motivado por Weierstraß, una aplicación más elemental de la teoría de conjuntos a un problema de análisis en el trabajo [20], que por la epoca se inscribe en la serie de trabajos [16]. Cantor

[1] Observaciones de Pleßner.

[2] Bendixon también resolvió este problema, en forma independiente de Cantor; véase la nota al inicio de [23].

[3] Cantor elimina un "hueco" en [16VI], en forma distinta a como lo hace en [23], también en una carta a Mittag-Leffler; véase [III], págs. 22 y sig.

se dedica ahí al problema, tratado primero por Hankel, de producir funciones, a partir de una función $\varphi(x)$, que presentan una singularidad en un cierto punto y que tengan singularidades del mismo tipo en un conjunto infinito, en particular, denso en todas partes. Cantor indica, como procedió en una reseña previa al trabajo de Hankel, que el método de Hankel de formar las series $f(x) = \sum_n a_n \varphi(\mathrm{sen}\, n\pi x)$ tiene tres deficiencias: primero una cantidad infinita de miembros de la serie acusan de la singularidad en un punto racional x, por lo que la posibilidad de una compensación está presente (y de hecho aparece); segundo, por la incorporación del seno se influye y complica en cierto sentido, no relacionado con el problema[1], el recorrido de la función; tercero, el método se restringe a puntos que están relacionados racionalmente entre sí. Frente a eso, Cantor utiliza, sugerido por Weierstraß, las series $\sum_n a_n \varphi(x - \xi_n)$, donde $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ es un conjunto numerable arbitrario, posiblemente denso, con lo que se genera un procedimiento que no tiene las desventajas mencionadas. Da dos ejemplos comunicados a él por Weierstraß. Una investigación general sobre este método se encuentra en la edición alemana (1892) del trabajo de Dini "Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Größe".

Al año de la crisis de Cantor 1884 siguen, primero, (además de [25]) los trabajos [26]-[28], que se enfilan principalmente a un circulo de lectores filósofos. En el primero Cantor ofrece un extracto de un escrito a Eneström del 4 de noviembre de 1885.[2] Él contesta a una indicación para él dada por Eneström sobre un escrito de Abbé Moigno, que refuta el infinito actual basado en razones religiosas, se expresa sobre tendencias similares de otros autores (especialmente Cauchy), que, invocando a Pascal, niega por circular, y distingue como formas del infinito actual–junto al absoluto divino– al transfinito "in concreto seu in natura naturata" de los números transfinitos y tipos ordinales comprensibles para el intelecto. Dependiendo de cual de estas formas se acepta o rechaza, surgen cuatro posibilidades respecto al transfinito (inclusive ocho si se añade el absoluto), para las cuales Cantor encuentra defensores entre quienes él mismo toma partido por el doblemente afirmado, respectivamente triplemente, punto de vista (véase [28I], p. 82). La opinión sobre la primera forma (in concreto) es importante para Cantor debido a su posición sobre la composición de la materia (véase arriba 31). Se vuelve contra las confusiones que aparecen con frecuencia sobre el infinito actual no sólo con el infinito potencial, sino también con el absoluto (y por ello propagables) y enfila agudos reproches en este contexto contra la teoría de Kant de la contradicción. La parte final del trabajo la conforman replicas a objeciones erigidas por la escuela de Herbart y W. Wundt a su teoría del transfinito (véase también [28I], págs. 98 y siguientes).

El extenso trabajo [28], que originalmente debía ser sustancialmente completado[3] se puede dividir en tres secciones claramente distinguibles. La primera (Vol. **91**, págs. 81-90 y 252 y sig.) da una introducción con observaciones polémicas sobre el contenido de la sección siguiente. Aquí Cantor introduce (siguiendo un punto de vista propuesto por él desde hacía 4 años y expuesto varias veces en sus clases) los tipos (números) ordinales, respectivamente las cardinalidades, como resultado de abstracciones simples, repectivamente dobles, de conjuntos, donde él pone especial énfasis en el carácter orgánico de la unión de conjuntos unitarios para formar un tipo (en oposición a la descomposición en elementos

[1] Sin datos del referente aparece en *Literar. Zentralblatt für Deutschland*, (1871), págs. 150 y sig. Véase (sobre el trabajo de Hankel) las observaciones críticas a Cantor de Jourdain in *Archiv d. Math. u. Phys.* (3)**10**(1906), págs. 279 y sig.

[2] Véase también la corta réplica (en sueco) de Eneström en *Öfversigt af Kongl. Vet.-Ak. Förhandl.* **42** (Estocolmo 1885/86), No. 10, págs. 69 y sig.

[3] Véase la nota de pié de página Vol. **91**, p. 117, además el Vol. **92**, p. 240, así como el subtítulo "Primer apartado" del la separata de [26] y [28].

en un conjunto; así como el tipo símbolico de la "palabra ordinal"); también en Euclides se introduce el número "de acuerdo a su origen real" asociado a conjunto y no simplemente como un símbolo de conteo, e incluso para Nicomachus y otros se insinua el momento de la uniformidad orgánica, así como en una pasaje particular de Leibniz. En consecuencia, él critica la introducción de la noción de número dada por Helmholtz y Kronecker,[1] según los cuales, los números representan símbolos para las cosas involucradas en el conteo (números ordinales en la terminología de Cantor o notae ordinales); estos autores se escudan en los antiguos escépticos así como en el filosofo de la ilustración Louis Bertrand.[2] Al final de esta exposición, en la que otra vez se manifiesta contra la invocación de la noción de tiempo como fundamento del número (Kant, Hamilton) se establece una polémica contra el finitismo de Kronecker enfilado incluso contra los números irracionales, de cuyo trabajo Cantor califica de circular la demostración de la invariancia del número ordinal de un conjunto finito.

Una segunda sección del trabajo (Vol. **91**, págs. 91-117 y 253-265) presenta siete cartas[3] de Cantor a diversos colegas, con la materia principal invariable, pero con observaciones introductorias y adiciones. La primera, dirigida a Kurd Laßwitz, cuyo contenido esencial había presentado Cantor ya en 1883 ante la sección matemática del congreso de ciencias naturales en Freiburg, recapitula primero las nociones teórico-conjuntistas, entre las que debe mencionarse el cambio, respecto a [16], del uso de multiplicando y multiplicador en el producto de números ordinales; entre las diversas observaciones polémicas recalca además el carácter determinado, completo, por lo tanto invariable o potencial de los númeors transfinitos, que en cierto sentido serían nuevas irracionalidades y que coinciden con los números irracionales usuales. La segunda carta, dirigida a Gutberlet (véase arriba págs. 227 y siguientes), trata la conducción de la demostración de que el infinito actual se puede afirmar como posible pero no como "existens seu in concreto"; que Cantor se decide por esto último, inclusive en la forma de una suposición de que existen una cantidad infinita de individuos (aquí coincide con Leibniz) aboga por ello y él mismo presenta demostraciones teológicas, como se corrobora en las siguientes cartas, de las cuales, la tercera y cuarta se dirigen a un "gran teólogo" (el cardenal Franzelin) y que encuentran una respuesta amistosa. En otra carta al Prof. en Medicina Eulenburg-Berlin es remarcable (además de la correspondiente exposición sobre las concepciones de Agustin y Origines y referencias bibliográficas sobre literatura (nueva) escolástica) la explicación de la diferencia entre el símbolo de límite en $\lim \frac{n-1}{n} = 1$ y $\lim n = \omega$; la carta termina con una indicación a los transfinitos de Fontenelles y una crítica, con derecho, de ellos (véase también [33], pág. 108). La sexta, dirigida a Goldscheider y Weierstraß, pretende convertir la breve observación en [16V] sobre lo infinitamente pequeño en una demostración de la imposibilidad de la existencia de "magnitudes lineales" infinitamente pequeñas actuales a través del uso de números ordinales transfinitos; sin embargo, la demostración (no efectuada) dificilmente es concluyente. De la última carta (a Vivanti) es interesante la indicación de Cantor que se deberían formar, además de los conjuntos transfinitos, que ha investigado como dominios de magnitudes variables, también una teoría del transfinito, como se inició en [16V].

En este contexto se debe mencionar otra expresón epistolar de Cantor a Vivanti de la misma epoca, donde Cantor indica a Vivanti (y lo anima a demostrarlo), que una multi-función analítica sólo puede

[1] Trabajos filosóficos. Dedicado a Eduard Zeller en su 50 aniversario como Doctor. Leipzig 1887.

[2] En el mismo año, en el que Cantor objetaba una concepción psicológica de la noción de número, se habilita Husserl en Halle con la tesis "Über den Begriff der Zahl".

[3] De los repetidos errores en la numeración en la introducción parece deducirse que originalmente entre las primeras cartas se intercaló otra.

tomar una *cantidad infinita numerable* de valores distintos en un punto dado; demostraciones de ello fueron construidas en ese entonces (1888) por Poincaré, Vivanti, Volterra (*Palermo Rendiconti* **2**, págs. 197 y siguientes y 150 y siguientes; *Atti Lincei* (4)**4** II, págs. 355 y siguientes).

La tercera sección (Vol. **91**), págs. 117-125 y 265-270; Vol. **92**, págs. 240-265) pretende generar los fundamentos de una teoría de tipos ordinales, y basado en ello–que no obstante no se logra allí–fundamentar la teoría de los números ordinales y sus aplicaciones a la teoría de números cardinales; esta parte se redactó ya en 1884 y debería aparecer (véase arriba p. 24, nota de pie de página), como lo menciona Cantor, "en otra revista" (a saber, el *Acta Math.*). En Vol. **91** se presenta como introducción un breve panorama de la teoría de cardinalidades (véase también [32I]); Cantor no basa la cardinalidad, como en [16], en la equivalencia ("definición por abstracción" en la terminología de Weyl), sino que sencillamente la deriva de los conjuntos, como la noción general (universal, unum versus alia en el sentido de la filosfofía atomística), que se obtiene de ellos mediante doble abstracción, sin tomar en cuenta la índole de sus elementos o el orden entre ellos). Este desarrollo podría verlo el matemático más bien como un retroceso. El que conjuntos equivalentes se correspondan en cardinalidad, aparece con esta posición como un teorema a demostrar. Cantor afirma la comparabilidad otra vez sin demostrarla. Esta introducción finaliza con una objeción a la costumbre, hecha regla, de trasladar el teorema totum parte maius de sus "entidades" (conjuntos) a sus números, y con una breve presentación de la teoría de los conjuntos finitos y sus números cardinales; ahí se introducen los conjuntos finitos inductivamente, respectivamente por recursión, pero los números cardinales se construyen a partir de conjuntos, así independientes entre sí, mientras que, mediante inducción completa, se demuestra que un conjunto finito no puede ser equivalente a una parte propia. Como característica de la noción concreta de conjunto, que a Cantor conmueve aun en este último periodo de activdad, se menciona el siguiente pasaje: "¿No está frente a nosotros el primero [el conjunto], mientras que el último [el número cardinal asociado] es una imagen abstracta de él en nuestra mente?"

En [28II] introduce Cantor la noción de conjunto n-ordenado (n finito) y basa en ello, por abstracción de la naturaleza de los elementos, el concepto de tipo n-ordinal (número ideal, ἄριθμὸς ο νοητός ο εἰδητικός), así que según la definición de similitud entre conjuntos n-ordenados la igualdad de tipos de conjuntos similares se conveirte en un teorema; además de tipos ordinales "puros" también se consideran "mixtos", en los que en lugar de unidades pueden aparecer otros números cardinales. Siguen las definiciones de suma y producto de tipos n-ordinales y la investigación de tipos que se generan de un tipo simple al cambiar la jerarquía de dos "direcciones" determinadas o al invertir una cierta dirección. La parte principal de estas consideraciones–al final se traduce a n-tipos- forma una revisión de los 2-tipos ordinales de número cardinal finito m, que para presentarlos se introducen matrices triangulares de números enteros no negativos como "características" de los tipos; después de ilustrar con tablas para $m = 1, 2, 3$, que también aclaran la adición y multiplicación de tales tipos, se logra la complicada determinación de las cantidades $\Phi(m)$ respectivamente $\Psi(m)$ de los 2-tipos puros respectivamente mezclados, que crecen rápidamente con m (para $m = 6$ alcanza 24976 respectivamente 37277). A estas investigaciones se vinculan algunos trabajos de la siguiente epoca, a saber, la disertación del después filosofo Hermann Schwartz (Halle) "Una contribución a la teoría de tipos ordinales" (1888), motivada por las clases de Cantor en 1887, que simplifica las reflexiones de Cantor, generaliza y refuta las correspondientes aseveraciones de Wiener; además, da una presentación uniforme de los tipos ordinales finitos debida a Vivanti (*Annali di Math.* (2) **17**(1889), págs. 1-35).

El fin de los trabajos teóricos conjuntistas de Cantor lo conforman dos obras puramente matemáticas.

En la conferencia [30] Cantor presenta en forma sensiblemente simplificada la demostración contenida en [13] de la no enumerabilidad del conjunto de todas las fraciones duales (formalmente distinta) mediante el método diagonal y establece que con una generalización de este método para cada conjunto se puede formar uno de mayor cardinalidad. Así, aparece una demostración más simple de la presentada en [16V], dada ahí en términos de clases de números, de que existen una cantidad infinita de cardinalidades, que por cierto evita el uso de números ordinales. En el ejemplo dado como motivación para el teorema general de que el conjunto de todas las funciones unívocas de una variable real tiene cardinalidad mayor a la del continuo, Cantor usa la comparabilidad de cardinalidades, no obstante que se puede evadir fácilmente (directamente o basados en el teorema de equivalencia–entonces todavía no demostrado); al parecer aún no le eran notorias las dificultades asociadas con la comparabilidad, como sí lo fue en su siguiente publicación.

La gran obra, doble, [32] es el último trabajo propio que Cantor publicó. Ésta presenta claramente [28] para un público matemático, libre de ingredientes críticos y filosóficos; aparece la teoría de conjuntos bien ordenados, ausente todavía en [28], y de los números ordinales en una presentación detallada, mientras que, como es comprensible, no se realiza la aplicación planeada a la teoría de los números cardinales, y que desde entonces, a pesar de la aparición del teorema del buen orden y del teorema de la comparabilidad, el vínculo de ambas teorías sólo se ha logrado parcialmente. De los teoremas “clásicos” de la teoría de conjuntos abstracta sólo falta en [32] el teorema de equivalencia, que en aquella epoca encuentra sus primeras demostraciones (véase página 54).

Si se compara [32], uno de los más grandes e inmortales trabajos de Cantor, con el otro [26], primero se observa que el centro de gravedad se desplaza de la consideración de conjuntos al de números, además se encuentra un progreso en la dirección de aclarar y sistematizar, lo que convierte a este trabajo hoy todavía en muy útil didacticamente. En este desarrollo se siente una influencia de la forma de pensar de Dedekind–no deseada e inadvertida para ambos– y quizá también algo similar por parte de Hausserl, quien desde 1887 enseñaba en Halle. Pero permanece en estos últimos trabajos una distancia reconocible, no depreciable, de los punto de vista de Dedekind y Frege (y de la escuela de Russell), tanto en lo que concierne a la noción de conjunto, que aparece[1] como comprensión–y no, digamos, como extensión de una valuación, como también en la forma de las extensiones sucesivas de los conjuntos finitos y en la (técnicamente no necesaria) amplia restricción a la segunda clase de números.

[32I] comienza con la conocida definición de conjunto, claramente distinta de las previas (“compilación de objetos bien definidos....para formar un todo”; véase también [28I], págs. 93 y 117), para entonces introducir la cardinalidad en el sentido de [28]; a la conveniente definición modificada de el orden por magnitud entre cardinalidades sigue la observación explícita, de que la comparabilidad no se sobrenetiende ni se puede probar en este punto de la disertación; aplaza la demostración para después, “cuando tengamos una mayor comprensión de la sucesión creciente de los cardinales transfinitos y sus relaciones”, y presenta el teorema de equivalencia teniendo en perspectiva el teorema de comparación. La suma de dos cardinalidades aparece en la antigua forma, el producto esta vez basado en el conjunto enlace, la potencia en el conjunto de valuaciones; con este último introduce Cantor por primera vez en la matemática la noción de función en forma tan general (generalidad de las variables independientes), como ocurrió posteriormente, después de utlizarse en otras partes, principalmente debido a E. H. Moore

[1]Véase también la reseña mencionada en la nota de pie de página en la página 41.

en su “General Analysis” y que se vuelve usual en análisis. Después de presentar las reglas formales de cálculo, que trata en detalle primero Whithead 1902 (*Amer. Journ. of Math.* **24**), puede indicar Cantor con satisfación justificada, que ahora, mediante $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ y un breve cálculo “puramente algebraico” se puede derivar el contenido de [14]. Se vincula una teoría de los conjuntos numerables a una presentación de los números cardinales finitos en el sentido de [28], que requiere también la existencia de un menor número en cada conjunto de números cardinales finitos, y a la presentación de los conjuntos y los números cardinales transfinitos como no finitos, donde se pueden caracterizar a los conjuntos transfinitos (respectivamente finitos) como (respectivamente no) equivalentes a subconjuntos propios; en la demostración del teorema de que cada conjunto transfinito contiene un subconjunto infinito numerable, Cantor utiliza (implícitamente) en forma natural el axioma de elección. Es de llamar la atención que Cantor prescinde del uso de su prueba [30], no la menciona siquiera; más bien remite por lo pronto, en lo que a la sucesión de los números cardinales respecta, a los resultados (desde lugo más amplios) de [16V]. Tampoco en la teoría de exponenciación se repite la estrecha vinculación a [30], que Cantor recupera posteriormente en una carta a Dedekind, y tampoco la aplicación a conjuntos finitos; sólo así pudo Cantor eludir lo conveniente y necesario que es el conjunto vacío (ya utilizado previamente en el álgebra de la lógica), que fue incorporado a la teoría de conjuntos primero por Zermelo.

La observación siguiente sobre tipos ordinales se restringe esta vez a órdenes simples. A las nociones básicas introducidas ya en [28] Cantor añade el concepto de clase de tipos $T(\mathfrak{m})$ asociado a una cardinalidad $\mathfrak{m}$, promete demostrar que su cardinalidad excede a $\mathfrak{m}$.[1] Relacionado a la condición de igualdad para tipos ordinales se manifiesta Cantor decididamente, al igual que en [34], pero no con mucha justicia, contra los “Fundamentos de la Geometría” de Veronese, cuyos errores atribuye a la circularidad en la definición de igualdad entre números. Nuevo, respecto a [28] (y en gran medida también respecto a [16]), son los §§9-11, en el primero de los cuales se caracteriza totalmente el tipo ordinal η (infinito-numerable, no acotado, denso).

Como preparación para la siguiente tarea introduce las sucesiones fundamentales “de primer orden” (es decir, de tipo ω o ω^*; los tipos superiores los pone en perspectiva para posteriores investigaciones) contenidas en una conjunto ordenado transfinito y define con su ayuda las nociones “denso en sí mismo”, “cerrado” y “perfecto”; en ello se basa al final de [32I] para caracterizar el coninuo lineal según su tipo ordinal como un conjunto perfecto, en el que existe un subconjunto numerable denso.

De la continuación [32II], dedicada a los conjuntos bien ordenados, mucho de lo cual está contenido en [16V], pero que presenta en forma nueva sistemáticamente, dedica sólo el inicio (§§12-14) a la teoría general. Cantor define aquí conjunto bien ordenado al igual que en [16V] como un conjunto con elemento incial, en el que cada subconjunto no cofinal tiene un elemento sucesor más próximo; el que esto es equivalente a que cada subconjunto tenga un primer elemento, aparece como teorema (junto a otros resultados elementales). La introducción y ordenamiento de las secciones de un conjunto bien ordenado conduce a una cadena de teoremas sobre la similitud entre conjuntos bien ordenados respectivamente entre sus secciones, donde la imposibilidad de una aplicación con similitud entre un conjunto y una de sus secciones se demuestre en forma indirecta, algo característico en esta teoría; después Zermelo generaliza esta propiedad.[2] De esta serie de teoremas debe resaltarse el teorema–demostrado mediante

[1] En realidad Cantor llega al resultado $\mid T(\aleph_0) \mid \geq \mathfrak{c}$, que después Bernstein convierte en igualdad (para ambos resultados véase la disertación de F. Bernstein en Göttingen 1901, reimpresa en Math. Ann. **61**. Se sabe que en general se cumple $\mid T(\aleph_\nu) \mid = 2^{\aleph_\nu}$.

[2] Véase el prefacio a “Grundbegriffen der Mengenlehre” de Hessenberg (1906).

la construcción directa de la aplicación– según el cual dos conjuntos bien ordenados son similares, en tanto cada sección de uno sea similar a una del otro y viceversa. Así se obtiene en forma de tricotomía (desde entonces demostrada en diversas formas) la comparabilidad de los conjuntos bien ordenados y de los números ordinales, que aquí se introducen como tipos ordinales de conjuntos bien ordenados. Después de añadir algunas ecuaciones y desigualdades para el cálculo con números ordinales (de dos en dos) introduce Cantor también la adición de una cantidad infinita de números ordinales y la formación de $\lim \alpha_\nu$ para una sucesión fundamental (α_ν) de números ordinales; concluye esta parte con una demostración, conducida desde el punto de vista de la teoría general del buen orden, de que a cada número cardinal finito le corresponde un número ordinal.

Desde el §15 se dedica el trabajo a la segunda clase de números, de la que ω aparece como número inicial; basado en ambas operaciones (que no se salen de la segunda clase de números), el paso de α a $\alpha+1$ respectivamente el límite de una sucesión fundamental se obtiene la distinción de los dos principios generadores, dependiendo de si el número resultante tenga o no un predecesor inmediato. Depués de probar que la cardinalidad de la segunda clase de números es igual al segundo álef, $\aleph_1$, acomete Cantor la exposición más detallada de los números de la segunda clase: primero para el caso especial de los números de "grado" finito, entonces se demuestra la representación general en forma normal

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau,$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\tau$ son números decrecientes de la segunda o primera (que comprende a los números finitos) clase, mientras que $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_\tau$ son números finitos distintos de cero y τ también es finito. Cantor instruye sobre el paso de la forma normal de los sumandos, respectivamente factores, a la forma normal de la suma, respectivamente el producto, y da entre otras aplicaciones una descomposición multiplicativa unívoca; sobre las condiciones para que $\alpha+\beta = \beta+\alpha$ y $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$ compárese el trabajo de E. Jacobsthal en *Math. Ann.* **64**, y en el mismo sitio **66** y **67**. Se hace posible la formulación general de la forma normal por la introducción de la exponenciación en la segunda clase de números; mientras que la adición y multiplicación de los números ordinales se vincula a las operaciones correspondientes entre conjuntos, Cantor define la exponenciación por inducción completa (que después utiliza Jacobsthal para unificar la definición de todas las operaciones). El final lo conforma la introducción y análisis más detallado de los números epsilón ξ de la segunda clase ($\omega^\xi = \xi$), cuya totalidad ordenada se manifiesta como similar a la de esta clase de números; la generalización de los ξ-números a otras funciones a definir como $f(\xi) = \omega^\xi$ ("números principales", "números críticos") se origina en Hessenberg, Jacobsthal y Hausdorff.

Aquí terminan las publicaciones de Cantor[1], pero no su actividad en teoría de conjuntos. Dedica poca atención a la teoría de funciones reales, pues esperaba una influencia esencial de la teoría de conjuntos en el análisis clásico y en la teoría de números. En cambio permanece en primer plano de su atención el *problema del continuo*. Entre sus esfuerzos alrededor de éste, junto con el emocionante episodio del año 1904 (véase arriba pág.25), se encuentran los materiales no publicados todavía del verano de 1899 en el intercambio epistolar con Dedekind. Estos últimos materiales que se conservan, separados por los previos 20 años, comienzan con la afirmación de Cantor de que el poseería desde 1897 la demostración de que todas las cardinalidades serían álef. El caso es el siguiente: A más tardar 1895, es decir, dos años antes de las publicaciones de Burali-Forti, Cantor mismo encontró la llamada paradoja

[1]Sobre [33] y [34] véase arriba p. 43 nota de pie de página.

de Burali-Forti sobre el conjunto de todos los números ordinales (véase Bernstein *Math. Ann.* **60** (1905), p.187) y la comunicó, entre otros, a Hilbert. Desde entonces (1899) habla con Dedekind sobre otros sistemas contradictorios, por ejemplo, la totalidad de todas las cardinalidades o de todo lo imaginable, y las llama "inconsistentes" (también sistemas "absolutamente infinitos")[1]; el caso contrario, en el que el sistema se puede considerar un conjunto, ocurre "cuando la totalidad de los elementos de una entidad se pueden pensar, sin contradicción, como un conglomerado".[2] La antinomia (generada por Cantor) del conjunto de todos los números ordinales muestra, por ejemplo, que "existen ciertas entidades que al mismo tiempo no forman una unidad". Apoyado en estas situaciones desarrolla la idea de que entidades equivalentes son simultáneamente conjuntos o inconsistentes, y que una subentidad de un conjunto es un conjunto. De esto hace los siguientes tipos de conclusiones: si W es el sistema de todos los números ordinales, V una entidad que no tiene un álef como cardinalidad, entonces se deduce fácilmente que "el sistema W se puede proyectar en la entidad V", es decir, que V debe contener una subentidad equivalente a W; si V tiene una cardinalidad determinada, ésta debe ser un álef. Que tan poco agrada esta "demostración" a Cantor mismo, lo muestra su petición, poco tiempo después, a Dedekind, de dar una demostración de la comparabilidad mediante su teoría de cadenas. Por cierto, después otros intentaron derivar el teorema del buen orden mediante razonamientos similares.[3] En cualquier caso, Cantor persiste desde 1884 hasta su fin en resolver el problema, abierto, del continuo y que en ocasiones genero en él dudas sobre si podría considerarse a la teoría de conjuntos como una entidad científica.

También son interesantes otros asuntos en estas emotivas cartas de un periódo de creatividad creciente en Cantor. Así, comunica a su amigo Dedekind el 29 de agosto una demostración muy elegante, mediante su teoría de cadenas, del teorema de equivalencia, en cuya posibilidad había llamado la atención Bernstein en la pascua de 1897.[4] Cantor trasmite además a Dedekind la ejemplar tricotomía respecto a las posibles relaciones entre dos conjuntos (véase también la comunicación sobre esto en [VIII], págs. 101 y siguientes) y aclara la existencia de conjuntos (es decir entidades consistentes) con números cardinales $1, 2, 3, \ldots, \aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_\omega, \ldots$ como "axiomas " de la aritmética elemental, respectivamente superior; esto claramente relacionado a la teoría posterior de Russell de los "individuos".

Uno de los grandes pioneros de la ciencia que ha tenido el mundo matemático, y para nuestro especial orgullo también nuestra Unión Matemática Alemana, es Georg Cantor. La difusión generalizada de la idea de que su trabajo abrió nuevos cauces y problemas al análisis lo vivió en gran medida Cantor mismo. El que sus ideas también han posibilitado en la geometría una avance revolucionario por vias de rigor intangible, se ha reconocido hasta el presente, cada vez más claramente, debido especialmente al trabajo de Brouwer y de una joven escuela topológica. Incluso en las aplicaciones físicas se han manifestado como muy útiles las ideas más finas de la teoría de conjuntos. A la vista del edificio de la teoría de

[1]A este concepto (que no aparece en las publicaciones de Cantor) se refiere varias veces Hilbert (por ejemplo en estos *Jahresbericht* **8** (1900), pág.184; también al inicio de la conferencia de Hilbert en el III Congreso Internacional de Matemáticas). La expresión se generaliza después.

[2]El uso de la palabra "entidad" en este contexto lo precisa Cantor pronto al señalar que él considera "entidades de cosas "no relacionadas", es decir, aquellas entidades para las que apartar algún o algunos de sus elementos no tiene ninguna consecuencia en la permanencia de los elementos restantes". Casi parece que aquí Cantor tendría tales ideas, como las que después fueron criticadas por Poincaré y Russell con la denominación de "no predicativas".

[3]Especialmente por Jourdain (*Philosophical Magazine* (6) **7** (1904), págs. 61-75). Véase también las consideraciones de Zermelo en *Math. Ann.* **65**(1908), págs. 118 y siguientes.

[4]La demostración erronea de Schröder se presentó en el otoño de 1896 en la convención de la sociedad de ciencias naturales de Frankfurt, mientras que la de Bernstein que encontró en 1896-97 la comunicó a Cantor en un seminario.

conjuntos abstracta–que gravita en ciertos sentidos sobre esas teorías–, que junto a la teoría general de equivalencia y de similitud y también el dominio de los números ordinales transfinitos, deben contarse los aspectos filosóficos de la teoría de conjuntos, se agitan los espiritus nuevamente en la intranquilidad y parcialmente en la inseguridad. Pero aquí se impondran tarde o temprano las palabras de Hilbert sobre el paraiso, que Cantor logró para nosotros y del cual nadie nos podra sacar. Ojalá que se requieran nuevas ideas fundamentales y que muestren caminos en direcciones que todavía hoy nos son ajenas: la conquista del infinito actual es para la ciencia un hecho histórico, y en sus cimientos, en los que Cantor construyó sus ideas, consumará el desarrollo posterior con la esperanza que Cantor anticipa como divisa en su exposición definitiva [32]: "Veniet tempus, quo ista, quae nunc latent, in lucerm dies extrahat et longioris aevi diligentia."

Publicaciones de Cantor.[1]

1. De aequationibus secundi gradus indeterminatis. (Inauguraldissertation) Berlín, 1867. (26 págs.)
2. Zwei Sätze aus der Theorie der binären uns quadratischen Formen. *Zeitschr, f, Math. u. Phys.* **13** (1868), págs. 259-261.
3. Über die einfachen Zahlensysteme. Ebenda **14**(1869), págs. 121-128.
4. Zwei Sätze über eine gewisse Zerlegung der Zahlen in unendliche Produkte. Ebenda, págs. 152-158.
5. De transformatione formarum ternarium quadraticarum. (Habilitationschrift.) Halis Saxobun sin Año (1896). (13 págs.)
6. Über eiene die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz. *Journal. f. d. reine u. angew. Math.* **72** (1870), págs. 130-138.
7. Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt. Ebenda, págs. 139-142.
8. Notiz auf dem Ausatze: Beweis... (véase [7]). Ebenda **73**(1871), págs. 294-296.
9. Über trigonometrische Reihen. *Math. Ann.* **4** (1871), págs. 139-143.[2]
10. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Ebenda **5**(1872), págs. 123-132.
11. Algebraische Notiz. Ebenda, págs. 133-134.

[1]Los datos en [VII] y especialmente en [VIII] se deben corregir según esto.

[2]Los trabajos [9], [10], [13], [14], [16I-IV] así como la mayor parte de [16V] aparecierón traducidos al francés en *Acta Mathematica* **2**(1883).

12. Historische Notizen über die Wahrscheinlichkeitrechnung. *Bericht über die Sitzungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle im Jahre 1873* (apareció en *Abhandl. d. Nat. Ges. zu Halle* **13**, (1877), págs. 34-42. (También aparecio como separata. 8 págs.)

13. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *Journ. f. Math.* **77**(1874), págs. 258–262.

14. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitlehre. Ebenda **84**(1878), págs. 242-258.

15. Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten. *Nachr. v. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. und der Georg-Augustus-Universität zu Göttingen*, Jahrg. 1879, págs. 127-135.

16. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. I. *Math. Ann.* **15**(1879), págs. 1-7; II ebenda **17**(1880), págs. 355-358; III. ebenda **20**(1882), págs. 113-121; IV. ebenda **21**(1883), págs. 51-58; V. ebenda págs. 545-591; VI. ebenda **23**(1884), págs. 453-488.

17. Bemerkung über trigonometrische Reihen. Ebenda **16**(1880), págs. 113-114.[1]

18. Fernere Bemerkung über trigonometrische Reihen. Ebenda, págs. 267-269.

19. Zur Theorie der zahlentheoretischen Funktionen. *Nachr. v. d. K. Ges. d. Wiss. u. d. Georg-Augustus-Univ. zu Göttingen*, Jahrg. 1880, págs. 161-169.[2]

20. Über ein neues und allgemeines Kondensationsprinzip der Singularitäten von Funktionen. *Math. Ann.* **19**(1882), págs. 588-594.

21. Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen. Leipzig 1883. (Una edición especial [1 S.] de [16V] con prólogo. 47 págs.)

22. Sur divers Théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à n dimensions. Première communication. Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur. *Acta Math.* **2** (1883), págs. 409-414.

23. De la puissance des ensembles parfaits de points. Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur. Ebenda **4**(1884), págs. 381-392.

24. Ludwig Scheefer (1859-1885). *Bibliotheca Mathematica*, Jahrgang 1885, págs. 197-199.

25. Über verschidene Theoreme aus der Therie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n. Zweite Mitteilung. (Fortsetzung von [22].) *Acta Math.* **7**(1885), págs. 105-124.

26. Über verschidene Standpunkte in Bezug auf das aktuale Unendliche. *Zeitschr. f. Philosophie u. philos. Kritik*, N. F., **88**(1886), págs. 224-233.[3]

[1] También apareció (sin las notas de pie de página) en *Archiv. f. Math. u. Phys.* **64**(1879), págs. 434-435.

[2] También impreso en *Math. Ann.* **16**(1880), págs. 583-588.

[3] Omitiendo la parte final, y sólo con cambios no escenciales, apareció también en *Natur und Offenbarung* **32**(1886), págs. 46-49; las partes finales se imprimieron junto a tres de la cartas publicadas en [28I] y con cambio inesenciales con el título "Zum Problem des aktualen Unendlichen" en *Natur und Offenbarung*, ebenda, págs. 226-233.

27. Über verschidenen Ansichten in bezug auf die aktualundendlichen Zahlen. em Bihang till K. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar**11**(1887), No. 19, págs. 1-10. (En gran parte apareció en [26]; el mínusculo resto se reimprimió en [28I].)

28. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. I. *Zeitschr. f. Philosophie u. phil. Kritik*, N. F., **91**(1887), págs. 81-125 y 252-270; II. ebenda **92**(1888), págs. 240-265.[1]

29. Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstraß-Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen in Math. Ann. Vol. **XXXIII**, p. 154 *Math. Ann.* **33**(1889), p. 476.

30. Über eine elementare Frage der Mannigfaltigskaitlehre. *Jahresber. d. Deutschen Mathematikvereinigung* **I** (1892), págs. 75-78.[2]

31. Vérification jusqu'á 1000 du Théorème empirique de Goldbach. *Assoc. Francaise pour l'Avancement des Sciences*, C. R. de la 23me *Session (Caen 1894)*, Seconde Partie, págs. 117-134. 1895.

32. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. I *Math. Ann.* **46**(1895), págs. 481-512; II. ebenda **49**(1897), págs. 207-246.[3]

33. Sui numeri transfiniti. Estratto d'una lettera di Georg Cantor a. G. Vivanti, 13 Dic. 1893. *Revista di Matematica* **5**(1895), p. 104-108. (Alemán)

34. Lettera di Georg Cantor a G. Peano. Ebenda, págs. 108-109. (Alemán)

35. Brief von Carl Weierstraß über das Dreikörperproblem. *Rendiconti del circolo Mat. di Palermo* **19** (1905), págs 305-108.

Además alguna reseñas a libros en los primeros volumenes del *Deutschen Literaturzeitung*. Adicionalmente el "Zweite Beilage" a la edición del "Prolegomena" de Kant, editado en 1888 por Karl Schurz en Halle (explicación del pasaje sobre el triángulo esférico en §13 del Prolegomena).

---

36. Resurrectio Divi Quirini Francisci Baconi Baronis de Verulam Vicecomitis Sancti Albani CCLXX annis post obitum eius IX die aprilis anni MDCXXVI. (Pro muscripto.) Cura et impensis G[eorgii] C[antoris]. Hallis Soxonum MDCCCXCVI. (Con prólogo en inglés de "Dr. phil. Georgee Cantor, Mathematicus".)

[1][24] y [28] aparecieron también juntos como separata con el título "Zur Lehre vom Transfiniten, Gesammelte Abhandlungen aus der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Erste Abteilung", Halle 1890 (93 págs.), y sin cambios escenciales; sólo al final aparece una corrección sin importancia, además la parte de las págs. 252-270 del Vol. **92** apareció en forma de notas de pie de página en los pasajes correspondientes del primer trabajo del Vol. **91**. (Que también se imprimió– y sin duda no se vendió en librerias- una edición de este escrito, en el que faltan las 10 primeras hojas ([26]), lo demuestra primero la incomprensible enumeración (51) en [28I], p. 267, renglón 3 desde abajo.)

[2]Apareció traducido al italiano (por Vivanti) en *Revista di Mat,* **2**(1892), págs. 165-167.

[3]Apareció traducido al francés (por Marotte) en *Mémoires de la Soc. des Sciences Phys. et Nat. de Bordeux* (5)**3**(1899), págs. 343-437; la Parte I también apareció traducida al italiano (por Gerbaldi) en *Revista di Mat.* **5**(1895), págs. 129-162. Para la edición inglesa véase [V].

37. Confessio fidei Francisci Baconi Baronis de Verulam... cum versione Latina a G. Rawley..., nunc denuo typis excusa cura et impensis G. C. Halis Saxonum MDCCCXCVI. (Con prólogo en Latín de G. C. [5. S].)

Materiales mencionados con frecuencia o importante sobre Cantor

I. Anotaciones y copias de cartas en poder de la familia Cantor.

II. Correspondencia Cantor-Dedekind (36 piezas), en poder de la Biblioteca de la escuela superior técnica de Braunschweig.

III A. Schoenflies, Die Krisis in Cantors mathematischem Schaffen. *Acta Matheatica* **50**(1928), págs. 1-23. (Contiene varias cartas de Cantor a Mittag-Leffler, sobre todo del año 1884).[1] Véase también Mittag-Leffler, ebenda, págs. 25 y sigsuientes.

IV. Un apunte de P. Stäckel sobre una conferencia que Cantor dió el 24 de septiembre de 1897 sobre sus investigaciones en teoría de conjuntos en Braunschweig ante un reducido auditorio. En poder de la Sra. Stäckel-Heidelberg.

V. G. Cantor Contributions to the founding of transfinite numbers. Traducido por, y con introducción y notas de, Philip E. B. Jourdain. (The open Court Series of Classics of Science and Philosophy. No. I.) Chicago and London 1915. (Véase también Jourdain en *Archiv der Math. u. Phys.* (3) **16**(1910), págs. 21-43 y **22**(1914), págs. 1-21.)

VI. W. Lorey. Der 70. Geburstag des Mathematikers Georg Cantor. Zetschr. f. math. u. naturw. Unterricht **46** (1915), págs. 269-274.

VII. A. Wangerin. Georg Cantor. *Leopoldina* **54** (1918), págs. 10-13 y 32.

VIII. A. Schoenflies. Zur Erinnerung an Georg Cantor. Dieser *Jahresbericht* **31**(1922), págs. 97-106.

IX. A. Schoenflies. Georg Cantor. *Mitteldeutsche Lebensbilder* **3** (1928), págs. 548-563.

X. Chronik der Preußichen Vereinigten Fridrichs-Universität Halle-Wittenberg für den Zeitraum 1916-1926 (Halle a. S. 1928), págs. 13-14.

Entregado el 16 de agosto de 1929.

[1] El resto de la correspondencia Cantor-Mittag-Leffler conservada me fue inaccesible por desgracia.