XXII

Sobre funciones medida aditivas en conjuntos abstractos

Título original: Über additive Massfunktionen in abstrakten Mengen
Von Stefan Banach (Lwów)
Fundamenta Mathematicae 15(1930), 97-101

En una nota recientemente publicada en conjunto con el Sr. Kuratowski[2] demostramos la siguiente generalización de un resultado conocido del Sr. Vitali, suponiendo la validez de la hipótesis del continuo $2^{\aleph_0} = \aleph_1$:

No existe ninguna medida total aditiva no trivial $m(X)$, que asocia un número real a cada subconjunto X del segmento $(0, 1)$ y tal que toma el valor cero en todos los conjuntos que constan de un sólo elemento.

En este teorema se puede remplazar el segmento $(0, 1)$ por un conjunto arbitrario de cardinalidad del continuo. La función $m(X)$, que por su significado geométrico llamamos una función medida, o también una medida de X, puede tomar también valores negativos.

En la presente nota probamos un teorema más general para conjuntos de cardinalidad arbitraria, *donde suponemos la validez de la así llamada hipótesis de los álef, es decir, que se cumple la ecuación*

$$2^{\aleph_\xi} = \aleph_{\xi+1}$$

para números ordinales arbitrarios ξ. Para formular este teorema, debemos definir la noción general de función medida.

Decimos que una función medida aditiva está definida en un conjunto E, cuando para cada subconjunto G de E se asocia un número $|G|$ de tal suerte que se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $|G|$ no es idénticamente cero para toda G.

[2]S. Banach y C. Kuratowski *Sur une généralization du problème de la mesure* Fund. Math. XIV (1929), 127-131.

2. Se cumple $|G_1 + G_2| = |G_1| + |G_2|$, cundo $G_1 \cdot G_2 = 0$.

3. Si G consiste en un único elemento de E, entonces $|G| = 0$.

Una función medida es "aditiva en la cardinalidad $\aleph_\xi$", cuando para conjuntos G_η ajenos entre sí, siempre ocurre

$$|\sum G_\eta| = \sum |G_\eta|, \qquad (0 < \eta < \omega_\xi)$$

Una función medida es de tipo $\aleph_\xi$, cuando es aditiva en cualquier cardinalidad menor que $\aleph_\xi$, pero no lo es en cardinalidad $\aleph_\xi$.

Observación 1. Cuando una función medida es aditiva en la cardinalidad $\aleph_\xi \geq \aleph_0$, entonces cualquier colección de subconjuntos de E ajenos entre sí, cada uno de los cuales contiene un subconjunto de medida distinta de cero, es a los sumo numerable.

Observación 2. Cuando el conjunto E tiene cardinalidad $\aleph_\xi$, entonces cualquier función medida definida en E es de tipo a lo sumo $\aleph_\xi$. En otro caso, la medida de un subconjunto arbitrario de E sería igual a la suma de la medida de sus elementos, es decir, igual a cero.

Ahora enunciamos nuestro teorema:

Cuando se puede definir en un conjunto E una función medida de tipo $\aleph_\xi$, entonces $\aleph_\xi$ es un cardinal inaccesible.[1]

Para probar el teorema primero suponemos que el conjunto tiene cardinalidad $\aleph_\xi$.

Según la observación 2, cada subconjunto de E cuya cardinalidad sea menor que $\aleph_\xi$, tiene medidad cero. Por consiguiente, E contiene un subconjunto de cardinalidad $\aleph_\xi$ cuya medida es distinta de cero. Dado que aquí sólo se trata de cardinalidad, podemos suponer que el conjunto E mismo tiene medida distinta de cero. Efectuamos una demostración indirecta, suponemos entonces que $\aleph_\xi$ es accesible. Debemos distinguier dos casos, dependidendo de si $\aleph_\xi$ es límite o no.

Sea $\aleph_\xi$ un número límite (accesible). El conjunto E se puede representar como la suma de conjuntos ajenos entre sí $\{G_\eta\}$ en cantidad $< \aleph_\xi$, y todos ellos de cardinalidad menor que $\aleph_\xi$. Ya que cada uno de esos conjuntos se pueden pensar como la suma de sus elementos y nuestra función medidad tiene tipo $\aleph_\xi$, todos estos conjuntos tienen medida cero, lo mismo que el conjunto E, lo que se opone a nuestra suposición.

Ahora supongamos que $\aleph_\xi$ no es un número límite[2] $(\xi > 1)$. Denotamos con A la clase de las sucesiones

$$\{\alpha_\eta\} \quad (0 < \eta < \omega_{\xi-1})$$

[1]Llamamaos a un número cardinal $\aleph_\alpha$ inaccesible, cuando es un número límite y no se puede representar como la suma de conjuntos de cardinalidad $< \aleph_\alpha$ y en cantidad $< \aleph_\alpha$; es decir, el número inicial ω_α es regular y α es un número límite.

El menor cardinal inaccesible es $\aleph_0$. No se sabe si existen otros.

[2]Para la demostración del caso $\xi = 1$ referimos a la nota citada.

donde los números ordinales α_η son menores que ω_1. Si $\{\alpha_\eta\}$ y $\{\beta_\eta\}$ son dos sucesiones de A, escribimos

$$\{\alpha_\eta\} < \{\beta_\eta\}$$

cundo para toda η, ocurre $\alpha_\eta < \beta_\eta$. La cardinalidad de A es claramente

$$\aleph_1^{\aleph_{\xi-1}} = \aleph_\xi.$$

Suponemos que el conjnto A está ordenado en el tipo ω_ξ. Apartamos cada elemento $\{\alpha_\eta\}$ para el que en A existe un elemento menor $\{\beta_\eta\}$ tal que $\{\alpha_\eta\} < \{\beta_\eta\}$ y denotamos con $\overline{E}$ al conjunto de los elementos restantes de A. Este conjunto $\overline{E}$ tiene las siguientes propiedades:

1. Tiene cardinalidad $\aleph_\xi$.

2. Si $\{\alpha_\eta\}$ es un elemeto de A, entonces el conjunto de aquellos elementos de $\overline{E}$ menores que $\{\alpha_\eta\}$ tiene cardinalidad menor que $\aleph_\xi$.

Con la suposición de que la cardinalidad de $\overline{E}$ es menor que $\aleph_\xi$, $\overline{E}$ se puede representar como un conjunto bien ordenado de sucesiones $\{\beta_\eta^\vartheta\}$, $0 < \vartheta < \omega_{\xi-1}$. Sea $\alpha_\eta = \beta_\eta^\eta + 1$; por tanto, no existe sucesión alguna $\{\beta_\eta\}$ de $\overline{E}$ para la cual $\{\alpha_\eta\} \leq \{\beta_\eta\}$, en oposición a la definición del conjunto $\overline{E}$.

Si además, $\{\beta_\eta\} < \{\alpha_\eta\}$ y $\{\beta_\eta\} \subset \overline{E}$, entonces $\{\beta_\eta\}$ aparece antes que $\{\alpha_\eta\}$ en A. El conjunto de aquellos elementos, que aparecen antes que $\{\alpha_\eta\}$ en A tiene cardinalidad menor que $\aleph_\xi$.

Sea $\alpha < \omega_1$. Denotamos con $\overline{E}_\alpha^\eta$ al conjunto de aquellas sucesiones $\{\beta_\eta\}$ de $\overline{E}$ para los cuales $\beta_\eta = \alpha$.

Es claro que

$$\overline{E} = \sum_{0<\alpha<\omega_1} \overline{E}_\alpha^\eta.$$

Ya que por (1) los conjuntos E y $\overline{E}$ tienen la misma cardinalidad, podemos definir en $\overline{E}$ una función medida de tipo $\aleph_\xi$ que cumple con $|\overline{E}| \neq 0$. El conjunto de todos los α posee la cardinalidad $\aleph_1$. Por consiguiente, por la observación 1 existe un ordinal $\alpha_\eta < \omega_1$ tal que para cada η

1. $|\overline{E}_\alpha^\eta| = 0$ para $\alpha \geq \alpha_\eta$,

2. $|G| = 0$ para cada subconjunto G de un $\overline{E}_\alpha^\eta$ $(\alpha \geq \alpha_\eta)$.

Hacemos

$$\overline{E}' = \sum_{0<\eta<\omega_{\xi-1}} \sum_{\alpha\geq\alpha_\eta} \overline{E}_\alpha^\eta.$$

Dado que los subconjuntos de $\overline{E}_\alpha^\eta$ tienen medida 0 y la suma arriba consiste en conjuntos de cardinalidad $\aleph_{\xi-1}$, se sigue qe $|\overline{E}'| = 0$.

El conjunto $\overline{E} - \overline{E}'$ contiene sólo aquellas sucesiones de $\overline{E}$ que son menores qe $\{\alpha_\eta\}$. La cantidad de estas sucesiones es, según la segunda propiedad del cnjunto $\overline{E}$, a lo sumo $\aleph_{\xi-1}$. Por tanto, $|\overline{E} - \overline{E}'| = 0$, así

$$|\overline{E}| = |\overline{E}'| + |\overline{E} - \overline{E}'| = 0$$

contrario a la hipótesis.

Con ello, concluye la demostración de nuestro teorema para el caso en el que el conjunto E tenga cardinalidad $\aleph_\xi$. Para derivar la prueba para el caso general, observemos que de las hipótesis del teorema se sigue fácilmente la existencia de una clase de subconjuntos E_η $(0 < \eta < \omega_\xi)$ ajenos entre sí para los que

$$|\sum_{0<\eta<\omega_\xi} E_\eta| \neq \sum_{0<\eta<\omega_\xi} |E_\eta|.$$

Por la observación 1 disponemos de, a lo sumo, una cantidad numerable de conjuntos E_η de medida distinta de cero. Denotamos a los restantes con $G\eta$.

Es claro que

$$|G_\eta| = 0$$

y

$$|\sum G_\eta| \neq \sum |G_\eta| = 0.$$

Denotamos con W al conjunto de números ordinales menores que ω_ξ. En este conjunto, cuya cardinalidad es $\aleph_\xi$, definimos una función medida de tipo $\aleph_\xi$ de la siguiente manera:

Si M es un subconjunto de W, hacemos

$$|M| = |\sum G_\eta|$$

donde la suma se efectúa sobre los números ordinales de M. En virtud de la penúltima relación, $|W| \neq 0$, por lo que de nuestros resultados previos se deduce que $\aleph_\xi$ es un cardinal inaccesible, lq.q.q.d

Por este teorema se demuestra fácilmente, con ayuda de la observación 2, el siguiente corolario:

Sea $\overline{\aleph}$ el menor cardinal inaccesible mayor que $\aleph_0$. Si E es un conjunto de cardinalidad menor que $\overline{\aleph}$ y en E está definida una función medida, entonces esta función medida es de tipo $\aleph_0$, es decir no siempre se cumple

$$|\sum_{n=|}^{\infty} E_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_\alpha|$$

para conjuntos E_n ajenos entre sí.