

Lógica matemática II

clásica, intuicionista y modal



Casa abierta al tiempo
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa



Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana

Rector General

Dr. Enrique Pablo Fernández Fassnacht

Secretario General

Mtra. Iris Edith Santacruz Fabila

Unidad Iztapalapa

Rector

Dr. Javier Velázquez Moctezuma

Secretario

Dr. Óscar Jorge Comas Rodríguez

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Director

Dr. José Antonio de los Reyes Heredia

Secretario Académico

Dr. José Gilberto Córdoba Herrera

División de Ciencias Sociales y Humanidades

Director

Dr. José Octavio Nateras Domínguez

Secretario Académico

Dr. Miguel Ángel Gómez Fonseca

Lógica matemática II

Clásica intuicionista y modal

Max Fernández de Castro Tapia
Luis Miguel Villegas Silva

Primera Edición, 2011

Los derechos de reproducción de esta obra pertenecen al autor

Universidad Autónoma Metropolitana

Prolongación Canal de Miramontes No. 3855,

Col. Ex Hacienda San Juan de Dios.

Delegación Tlalpan C. P. 14387 México D.F.

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

División de Ciencias Sociales y Humanidades

ISBN

Se prohíbe la reproducción por cualquier medio, sin el consentimiento de los titulares de
los derechos de la obra

Impreso en México/ *Printed in Mexico*



*Zur Ehre unseren Eltern und
Zulässiger Ergötzung des Geistes*

Prefacio

Tanto a la matemática como a la filosofía se les ha considerado paradigmas de conocimientos a priori, caracterizados por el uso de un vocabulario preciso y por el rigor de sus métodos de argumentación. En un terreno común a ambas disciplinas, surgió la lógica matemática como resultado de la reflexión, es decir, de la investigación de la mente sobre su propia manera de proceder y, en particular, como un intento de codificar toda forma de razonamiento correcto y de un lenguaje perfecto, adaptado a las necesidades de toda ciencia posible. La investigación sobre este instrumento formidable pronto reveló algunas de sus limitaciones, lo que obligó a los filósofos a renunciar a la idea de un lenguaje universal en que pudiese decidirse la validez de cualquier argumentación. Esta capitulación del universalismo dio pie a una floreciente multiplicación de lógicas y disciplinas afines que fueron paulatinamente ganando la aceptación y el interés de los investigadores. En la actualidad este proceso sigue en plena expansión, y sistemas lógicos de los más diversos tipos han probado su fertilidad en muchos otros campos del conocimiento. El ingenio y la creatividad que subyacen a este proceso invitan a esperar resultados insólitos. Con una visión profética, Carnap escribió (en 1934) a este respecto que se abría ante nosotros un océano ilimitado de posibilidades. A nosotros nos gustaría describir este espectáculo usando una frase de Alicia de Lewis Carroll (un lógico formidable): "Después de lo que me ha ocurrido este día, ya casi nada me parece imposible".

No obstante, la mayoría de los estudiantes permanecen indiferentes a estos desarrollos. Aun los que han tenido la suerte de elegir como profesión la matemática o la filosofía, carecen de una buena formación en lógica. En muchas instituciones de educación superior de nuestro país, donde cabría esperar un interés creciente por esta disciplina, reflejado en los programas de las carreras afines a las mencionadas, encontramos uno que otro curso de nuestra materia casi siempre con información meramente introductoria que deja al alumno con una idea muy pobre de los temas tratados. La lógica se enseña como algo acabado, con muy poca relación con problemas contemporáneos. El estudiante no sólo adolece de la falta de conocimientos básicos, sino que tampoco

desarrolla habilidades para el pesamiento crítico. Algo indispensable como es qué significa o cómo se conduce una demostración, cómo se constituye un argumento, cuáles argumentos son válidos, etc. queda en la más tétrica oscuridad. La disculpa siempre es la misma: son conocimientos que se adquieren sobre la marcha; la consecuencia es la falta de habilidad de los alumnos o egresados para describir simbólicamente una situación, la incapacidad para elaborar razonamientos lógicos y deducir conclusiones correctas de una situación dada, la inseguridad al efectuar una demostración o la imposibilidad de moverse entre el pensamiento de diversas personas.

Los autores se han encontrado una y otra vez con este escenario, por lo que consideran necesario contribuir en algo para remediarlo. La lógica matemática crece inexorablemente, da lugar a nuevas disciplinas, interactúa con las ciencias de la computación en muy diversos contextos y extiende sus aplicaciones a la lingüística, la filosofía de la ciencia, la teoría del conocimiento, la inteligencia artificial, los sistemas expertos, etc. La educación tradicional no permite incursionar en estas nuevas disciplinas pues no proporciona la formación en lógica matemática necesaria para tener éxito en estos ámbitos.

Es importante en este punto destacar que nosotros consideramos diversas ramas de la lógica, como la lógica clásica, la lógica modal, la lógica intuicionista y en próximos volúmenes también disertaremos sobre otro tipo de lógicas. Las lógicas no clásicas han dejado de ser vistas como una excentricidad de un grupo de pensadores y se han incorporado a la labor cotidiana en diversas disciplinas, mayormente en las ciencias de la computación, la teoría de juegos, la teoría de decisión y muchas otras.

Como ya señalamos en el primer volumen, hay una carencia de libros sobre lógica en español, pero aun en otros idiomas los textos disponibles no incorporan en forma unificada los temas que se han vuelto indispensables en el presente.

Tales son las razones para escribir esta obra. Aquí se presentan con toda formalidad las diversas nociones de la lógica acompañadas de numerosos ejemplos y ejercicios. Tratamos de explicar con la mayor claridad posible cada una de las construcciones planteadas, pero sin llegar a extremos innecesarios. Sabemos que un extremo es tan nocivo como el otro y que un autor que se excede en sus explicaciones condena al lector a momentos de fastidio o lo limita en su crecimiento intelectual. Escribimos pensando en un estudiante universitario promedio, pero también en un lector autodidacta.

Nuestro punto de partida fueron los cursos de lógica que se imparten en la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, pero obviamente el contenido se adecua a los cursos que se imparten en numerosas instituciones de México y el extranjero.

Éste es el segundo volumen y está antecedido por el texto *Lógica matemática I: clásica, intuicionista y modal*. Hemos tratado de que el segundo volumen sea, en

lo posible, independiente del primer libro; esta independencia significa que el lector ha adquirido los conceptos básicos de la lógica matemática y la madurez necesaria en otros textos o cursos.

El libro está diseñado de forma tal que pueda leerse de muy diversas maneras. Por un lado hay tres niveles de profundidad para lectores con diferentes intereses, o para un mismo lector que desee realizar una primera lectura esquemática para sucesivamente profundizar en los temas tratados. Otra posibilidad es que el lector no desee leer todo el libro, sino que se interese por cubrir únicamente un determinado tema. En efecto, el libro está elaborado de tal suerte que algunos capítulos puedan leerse con cierta independencia del resto.

El capítulo introductorio presenta de manera un tanto informal algunas de las nociones centrales de la lógica clásica. Se trata de dar al lector, en una primera aproximación, una idea del problema central que la lógica intenta resolver y de algunos de los métodos empleados para tal propósito. De paso se hacen algunas breves incursiones en la historia de la lógica, lo que permite al lector apreciar la fecundidad y originalidad de los métodos que está por aprender. Damos una brevísima introducción a la teoría silogística aristotélica, a los métodos lúdicos de Lewis Carroll y al análisis gramatical fregeano, lo cual permite entrever la teoría de los cuantificadores generalizados y la especificidad de la lógica moderna. El capítulo finaliza con los métodos de decisión para la lógica monádica diseñados por Hilbert y Ackerman, y con algunas lecciones de simbolización. El segundo capítulo presenta ya una definición rigurosa de consecuencia lógica para enunciados de un cierto lenguaje formal cuya sintaxis y semántica se delimitan con precisión. Más adelante se ofrecen definiciones de conceptos relacionados, como el de estructura, y se introducen algunas consideraciones básicas de teoría de modelos. El tercer capítulo expone una serie de métodos semialgorítmicos para determinar si un enunciado del lenguaje formal presentado es o no universalmente verdadero. Entre dichos métodos se encuentran sobretodo el método de los árboles y el método de resolución.

En el siguiente capítulo se exponen sistemas axiomáticos y de deducción natural que permiten obtener en una lista todos y sólo los enunciados lógicamente verdaderos. Allí se prueba el teorema de completud de Gödel, que muestra la correspondencia entre los métodos sintácticos y los semánticos. Es decir, prueba que los métodos expuestos producen todas y sólo las fórmulas lógicamente verdaderas. El quinto capítulo es una introducción a la lógica modal que ilustra cómo la lógica clásica puede extenderse para aplicarse a zonas intensionales de nuestro lenguaje. Se inicia con una breve presentación de los sistemas clásicos de lógica modal proposicional, tanto sintáctica como semánticamente. Más adelante se incorpora a ellos el aparato del cálculo de

predicados para formar sistemas de lógica modal cuantificada. Vemos cómo aquí no hay una semántica estándar sino que puede haber diversas elecciones dependiendo de ciertas disyuntivas filosóficas. Hemos procurado dar una breve exposición de los debates filosóficos que están en la base de estas posibilidades. Se utiliza el método de los árboles adaptado a cada una de estas semánticas. Ulteriormente se ofrecen pruebas de corrección y de completud para algunos de los sistemas expuestos. El último capítulo introduce al lector en una lógica que representa una desviación de la lógica clásica, a saber, la lógica intuicionista. Se inicia el capítulo exponiendo las ideas centrales que motivan esta lógica, así como la semántica que de ellas resulta. Después se expone el método de los árboles para la determinación de la validez o invalidez de fórmulas desde el punto de vista intuicionista. La siguiente sección expone un método de deducción natural para esta lógica, así como algunos resultados que la vinculan con su contraparte clásica. Por último, se prueba la completud y corrección del método de los árboles antes expuesto.

Todos los capítulos contienen ejercicios de diferentes grados de complejidad. En algunos casos se ofrecen algunas sugerencias para su resolución.

Desde ahora es importante hacer una aclaración. Hemos buscado facilitar al máximo la lectura del texto y ello nos ha llevado a suprimir, en aquellos casos en que no hay riesgo de confusión, las diferencias entre uso y mención de expresiones. Como podrá advertirse, con mucha frecuencia empleamos un símbolo de manera autónoma, es decir, como su propio nombre; y una expresión como nombre de la concatenación de los símbolos que la conforman.

Como ya se mencionó, el libro está diseñado para leerse en tres niveles de dificultad creciente. Algunos temas son más adecuados para lectores intermedios; las secciones

de esta categoría se inician con el símbolo . Además, hay temas que requieren una madurez aún mayor por parte del lector o apelan a resultados más sofisticados; éstos se agrupan en apartados que se inician con . El fin de estas secciones se marca con los símbolos  y  respectivamente.

Hemos procurado que el estudioso no requiera leer cada una de los sistemas de prueba mencionados en la obra. Así, por ejemplo, bien puede revisar sólo tablas semánticas o tan sólo el método de Hilbert. Puede prescindir en una primera lectura de los dos últimos capítulos, aunque esto es algo que no recomendamos pues se pierde la formación en la lógica no clásica, disciplina que tiene gran importancia en algunas aplicaciones, como las ciencias de la computación, las cuales trataremos en volúmenes posteriores. También puede ocurrir que el lector pase directamente del primer capítulo

al quinto y sexto si su interés es la lógica no clásica. Toca al instructor decidir cuál es el mejor camino a seguir.

Sería de enorme ayuda para los autores conocer las opiniones de colegas, lectores, estudiantes, etc. acerca de este libro, por lo que mucho agradeceríamos nos enviaran sus comentarios a la dirección de correo electrónico:

cantor1845@gmail.com

Versiones preliminares de este libro se han utilizado en varios cursos y seminarios. Los autores agradecen los comentarios, sugerencias y correcciones de los estudiantes que participaron en ellos. En particular, queremos expresar nuestro agradecimiento a: Cecilia Hernández, Fanny Brito, Óscar Rendón, Kinrha Aguirre, Marco Talavera y Habersheel Acevedo por las correcciones y mejoras que nos hicieron llegar en diversas etapas del trabajo. Un especial reconocimiento a los árbitros que hicieron numerosas sugerencias y correcciones. Este libro fue elaborado en el marco del proyecto CONACYT "Los problemas del conocimiento y la comprensión en matemáticas" (13611289), por lo que los autores agradecemos el apoyo recibido de parte de CONACYT.

Xochimilco, D. F., julio de 2011.

En ese momento nació Huitzilopochtli, se vistió sus atavíos, su escudo de plumas de águila, sus dardos, su lanza-dardos azul, el llamado lanza-dardos de turquesa. Se pintó su rostro con franjas diagonales, con el color llamado "pintura de niño". Sobre su cabeza colocó plumas finas, se puso sus orejeras. Y uno de sus pies, el izquierdo era enjuto, llevaba una sandalia cubierta de plumas, y sus dos piernas y sus dos brazos les llevaba pintados de azul.

Y este Huitzilopochtli, según se decía, era un portento, porque sólo de una pluma fina, que cayó en el vientre de su madre, Coatlicue, fue concebido.

Nadie apareció jamás como su padre. A él lo veneraban los mexicas, le hacían sacrificios, lo honraban y servían.

Y Huitzilopochtli recompensaba a quien así obraba.

Códice Florentino, libro III, capítulo 1

Preámbulo

Auh ino ipan quizato inoquittaque cenca miectlamantli in tlanahuizolli in oncanca in acaihtic caye ihca ipampa in nahuatl yuhquimilhui in Huitzilopochtli in teomamaque in itahuan in Quauhtlequetzqui anozo in Quauhcohuatl in Axolohua tlamacazqui ca quin nahuatl ca yuhquimilhui in ixquich in oncan inonoc in tollihtic in acaihtic in oncan ihcaz, in oncan tlapiez in yehuatl in Huitzilopochtli ca itencopa quimilhui ca yuhquin nahuatl in Mexica, auh niman oquittaque iztac in ahuehuetl, iztac in huexotl, in oncan ihcac, ihuan iztac in acatl, iztac in tolli, ihuan iztac in cueyatl iztac in michin, iztac in cohuatl, in oncan nemi atlan, auh niman oquittaque nepaniuhticac intexcalli in oztotl, inic ce in texcalli in ozotl tonatiuh iquizayan itztoc itoca tleatl, Atlatlāyan. Auh inic ome in texcalli in oztotl mictlampa Yztoc, inic nepaniuhtoc, itoca Matlallatl, ihuan itoca Toxpallatl.

Auh inoquittaque niman yechoca in huehuetque quitohua anca yenican yez, caotiquittaque intechilhui inic technahuatl in tlamacazqui in Huitzilopochtli iniquihto inyuhqui anquittazque in Tollihtic in acaihtic miectlamantli in oncan ca auh in axcan coatiquittaque, otic mahuizoque, caye nelli caomochiuh caoneltic in tlatol inic technahuatl, niman oquihtoque Mexicaye maoctihuian caotitlamahuizoque maoctic tlatolchiyecan in tla-

Cuauhcoatl y Axolohua fueron pasando y miraron mil maravillas allí entre las cañas y los juncos. Ese había sido el mandato que les dio Huitzilopochtli a ellos que eran sus guardianes, eran sus padres los dichos. Lo que les dijo fue así: "En donde se tienda la tierra entre cañas y entre juncos, allí se pondrá en pie, y reinará Huitzilopochtli". Así por su propia boca les habló y esta orden les dio. Y ellos al momento vieron: sauces blancos, allí enhiestos; cañas blancas, juncos blancos, y aun las ramas blancas, peces blancos, culebras blancas; es lo que anda por las aguas. Y vieron después donde se parten las rocas sobre puestas, una cueva cuatro rocas la cerraban. Una al oriente se ve, nada de agua tiene, es sin agua que se agita. La segunda roca de la cueva ve al norte: se ve que está sobrepuesta, y de ella sale el agua que se llama agua azul, agua verdosa.

Cuando esto vieron los viejos, se pusieron a llorar. Y decían ¿Conque aquí ha de ser? Es que estaban viendo lo que les había dicho, lo que les había ordenado Huitzilopochtli. Es que él les había dicho: "Habéis de ver maravillas muchas entre cañas y entre juncos". "Ahora las estamos mirando" decían ellos, "¡y quedamos admirados! ¡Cuán verdadero fue lo dicho, bien se realizó su orden!" Van a buscar a los mexicanos y les dicen: "Mexicanos, vamos, vamos a admirar lo que hemos contemplado.

macazqui yehuatl quimati quenin mochihuaz, niman ohuallaque motlallico in oncan Temazcaltitlan, auh niman yohualtica in oquittac inoquimottiti in teomama initoca Quauhtlequetzqui anozo Quauhcohuatl in yehuatl in Huitzilopochtli, oquilhui Quauhcohuatl caohuanquittaque in ixquich in oncan onoc in acahtic ohuan tlamahuizoque. Auh tlixicquica occentlamantli in ayemo anquitta. Auh inin xihuian, xiquittati in Tenochtli in oncan anquittazque ic pacca icpac, ihcac in yehuatl in quauhtli oncan tlaqua, oncan mototonia, auh ca ic pachihui in amoyollo, ca yehuatl iniyollo in Copil intiqualmayauh in oncan timoquetz talcocomocco. Auh niman oncan huetzico ino anquittaque texcaltempa, Oztotempa in Acatzallan in toltzallan, auh ca oncan ixhuac iniyollo in Copil, in axcan motocayotia Tenochtli, auh ca oncan intiezque in titlapiezque, in titechiezque intitenamiquizque in nepapantlaca telchiquih totzonteco tomiuh tochimal, inic tiquimittazque in ixquich intechyahuallotoc ixquich tiquinpehuazque tiquimacizque ic maniz in taltepeuh Mexico Tenochtitlan quauhtli ipipitzcayan inetomayan quauhtli itlacuayan, ihuan michin ipatlanian, ihuan cohuatl izomocayan in Mexico in Tenochtitlan, auh ca miectlamantli in mochihuaz, niman oquilhui in Quauhcohuatl, cayequalli tlamacazque otlacauhqui imoyollotzin maquicaquican imotahuan in huehuetque in ixquichtin, ic niman oquincantalli in Mexica in Quauhcohuatl oquincacuilti initlatol in Huitzilopochtli inoquicacque Mexica.

Auh niman onoeppa yahque in Toltzallan in Acatzallan, in Oztotempa, auh ino ipan quizato Acatitlan ihcac in Tenochtli, in oncan (Oztotempa inoquittaque icpacca icpac ihcac moquetzticae in

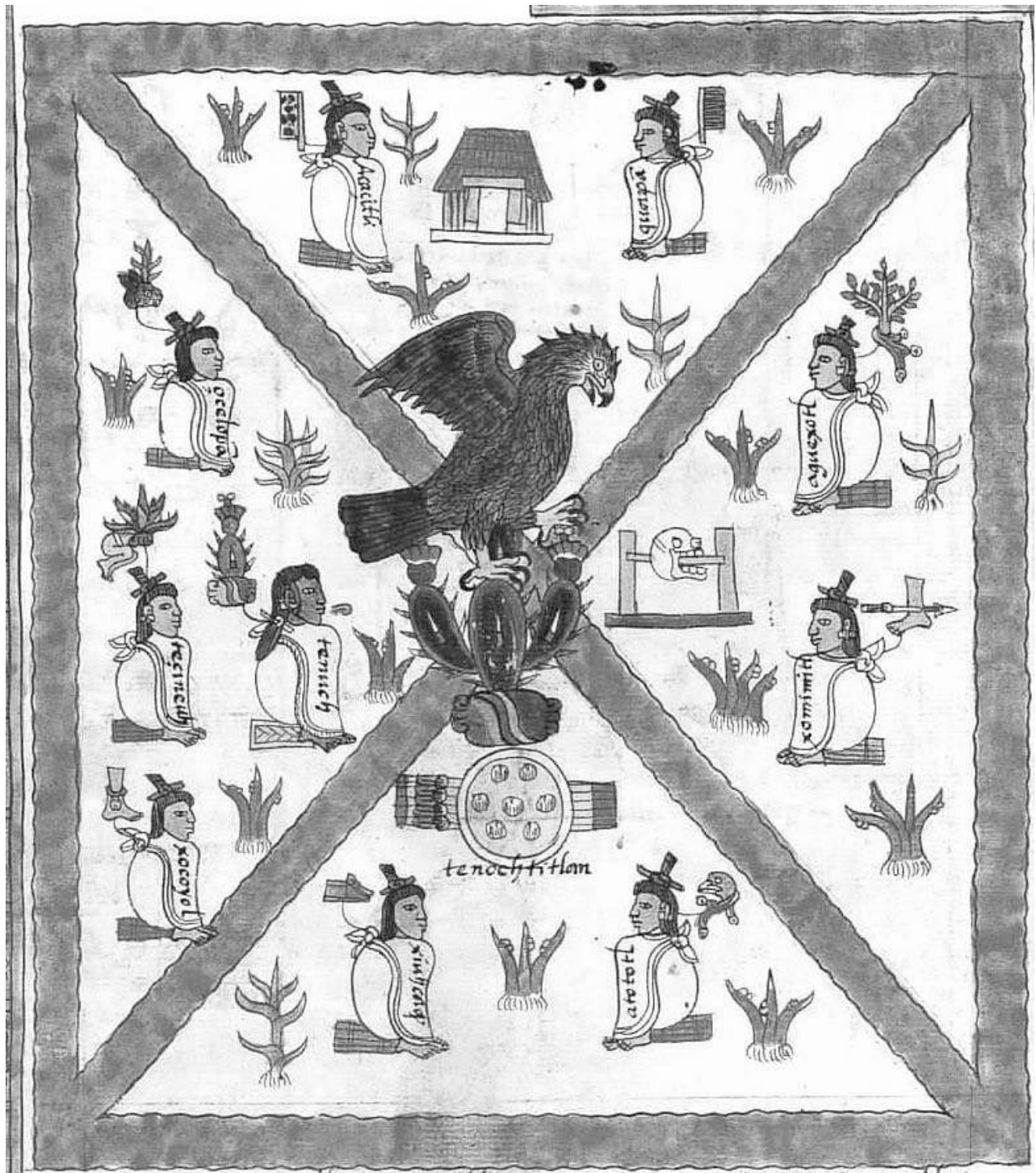
Digamos al sacerdote; él dirá qué debemos hacer". Fueron a Temazcatitlan y allí se detuvieron.

Por la noche vinieron a ver, vinieron a mostrarse unos a otros y era el sacerdote Cuauhtlaquezqui, que es el mismo Huitzilopochtli. Dijo él: Cuauhcóhuatl, ¿habéis visto allí todo, lo que hay entre cañas y juncos? ¡Aún resta ver otra cosa! No la habéis visto todavía. Id y ved un nopal salvaje: y allí tranquila veréis un Águila que está enhiesta. Allí come, allí se peina las plumas, y con eso quedará contento vuestro corazón. ¡Allí está el corazón de Cópil que tu fuiste a arrojar allá donde el agua hace giros y más giros! Pero allí donde vino a caer, y habéis visto entre los peñascos, en aquella cueva entre cañas y juncos. ¡Del corazón de Cópil ha brotado ese nopal salvaje! ¡Y allí esperaremos y allí reinaremos! ¡Allí esperaremos y daremos el encuentro a toda clase de gentes! Nuestros pechos, nuestra cabeza, nuestras flechas, nuestros escudos. ¡Allí les haremos ver! ¡A todos los que nos rodean allí los conquistaremos! ¡Aquí estará perdurable nuestra ciudad de Tenochtitlan! ¡El sitio donde el Águila grazna, en donde abre las alas; el sitio donde ella come y en donde vuelan los peces, donde las serpientes van haciendo ruedos y silban! ¡Ese será México Tenochtitlan y muchas cosas han de suceder! Dijo entonces Cuauhcóhuatl: ¡Muy bien está, mi señor sacerdote! ¡Lo concedió tu corazón: vamos a hacer que lo oigan mis padres los ancianos todos juntos! Y luego hizo reunir a los ancianos todos Cuauhcóhuatl y les dio a conocer las palabras de Huitzilopochtli. Las oyeron los mexicanos.

Y de nuevo van allá entre cañas y entre juncos, a la orilla de la cueva. Llegaron al sitio donde se levanta el nopal salvaje, allí al borde de la cueva y vieron tranquila, parada, al Águila en el nopal

Quauhtli in yehuatl in Tenochtli oncan tlaqua, oncan quiqua quitzotzopitzticac in quiqua, auh in yehuatl in quauhtli inoquimittac in Mexica cenca omopectecac in quauhtli, zan huecapa in conit-taque) Auh initapazol inipepech, zan moch yehuatl in ixquich inepapan tlazo ihuitl in ixquich in xiuh-totoihuitl, in tlahuquecholiuitl, in ixquich quetzalli, auh zan no oncan quittaque in oncan tetepeuh-toc inin tzonteco inepapan totome in tlazototome in tzonteco oncan zozoticate, ihuan cequitoto icxitzl, cequi omitl, auh oncan quinnatz in Diabli quimilhui Mexicaye ye onca yecin, auh yece amo quitta in Mexica in aquinquinotza ic oncan tlatocayotique Tenochtitlan auh niman ye ic choca in Mexica quitohua otoc-nopiltic, otomacehualtic caotic mahuizoque in tal-tepeuh yez, maotihuian, maotitocehuiti.

salvaje. Allí come, allí devora y echa a la cueva los restos de lo que come. Y cuando el Águila vio a los mexicanos, se inclinó profundamente. Y el Águila veía desde lejos. Su nido y su asiento era todo él de cuantas finas plumas hay: plumas de azulejos, plumas de aves rojas y plumas de quetzal. Y vieron también allí cabezas de aves preciosas y patas de aves y huesos de aves finas tendidos por tierra. Le habló el dios y así les dijo: ¡Ah, mexicanos: aquí sí será! ¡México es aquí! Y aunque no veían quién les hablaba, se pusieron a llorar y decían: ¡Felices nosotros, dichosos al fin! ¡Hemos visto ya dónde ha de ser nuestra ciudad! ¡Vamos y vengamos a reposar aquí!



Descripción del tlacuache y de sus propiedades medicinales en el Códice Florentino

Inic nahui parrapho itechpa tlatoa in quenami iyeliz, in yolqui, manenenqui, in ituca tlacuatl.

Tlacuatl; tlacuatn, anozo tlatlacuatn: pazaltuntli, huel yuhquin epatl. Auh in ye huecahua, inic huehue, in ye ilama, tetazahui. Tempitzantun. Mihichiuh, mihixtetlilcomolo, nacazhuihuitzpil, cuitlapilhuia, cuitlapilxuxupetztic; zan huel nacatl in icuitlapil; acan ca tzontli, in manel tumitl.

Auh in yeliz: tlallan, tlacoyocco, cana tepancamac in mopilhuatia. Auh in omopilhuati, in canapa yauh, quinhua in ipilhuan: ca xillan xiquipile. Uncan quimotema, uncan quimonaquia in ipilhuan; quinhua in tlatlacuaz, umpa chichitihui. Niman amo yellele, amo tlahuele, amo tecua, amo tetetexoa, in icuac ano, in icuac tztizquilo. Auh in icuac axihua, choca, pipitzca, huel quiza in imixayo, oc cenca icuac in ano, ihuan in ipilhuan; cenca quinpipitzquilia in ipilhuan, quichoquilia, huel quiza in ixayo. Quimontetema in ixiquipilco, quinhualquixitia.

Auh in itlacuatl tonacayutl; metzalli, ihuan necutli. Auh in incayo cualoni. Huelic, yuquin tochin, yuhquin citli. Auh in iyomio oc cenca yeh, in icuitlapil, zan niman amo cualoni. In aquin quicuaz, oc cenca yeh, intla miec quicuaz, mochi quiza in iitic ca, in icuitlaxcol.

Ceppa quichtacacua in chichi, ihuan miztun, in inacayo tlacuatl. Zan mochi quiteteitz, quitutupotz in omitl, ca nel nozo chichi. In tlthuc, omochi motepehuaco in icuitlaxcoli za quihuilantinemi.

Auh inin, icuitlapil, ca patli, ca tlatupehuani, tlaquixtiani. In canin tlein calaqui, oc cenca yeh momicamac in ahuelquiza, onmopapalteuhteca in tlacuacuitlapilli, miecpa onmoteca. In manel huel

Tlácuatl, tlacuatn o tlatlacuatn. Es lanudillo, muy semejante al zorrillo. Y cuando envejece, cuando ya es anciano, ya es anciana, se vuelve blancuzco. Es de labios agudillos. Se pintó mucho del rostro: se hizo rodetes de tinta alrededor de los ojos. Orejas aguditas, larga la cola, la cola muy pelada: sólo de carne su cola; en ningún lado tiene cabellos, aunque hay pelusa.

Y sus costumbres: en la tierra, en un hoyo, en algún lugar en los boquetes de las paredes, pare la hembra. Y cuando parió, si va a alguna parte, lleva a sus hijos, pues tiene una bolsa en el vientre. Allí los pone: allí mete a sus hijos; los lleva cuando va a comer; allí van mamando. Luego, no es iracundo, no se enoja, no muerde, no trasca cuando es capturado, cuando es asido. Y cuando es cogido llora, chilla, bien salen sus lágrimas, principalmente cuando es capturada la hembra con sus hijos; mucho les chilla a sus hijos, le llora, bien salen sus lágrimas. Los pone en la bolsa; los hace salir.

Y su comida es el maíz y las raeduras de maguey y la miel. Y su carne es comestible. Es sabroso, como conejo, como liebre. Pero sus huesos, principalmente los de su cola, no son comestibles. A quien los come, si come muchos, le sale todo lo que está en su vientre, sus intestinos.

Una vez furtivamente un perro y un gato comieron la carne del tlacuache. En verdad el perro royó, mordió todos los huesos. Al amanecer todos sus intestinos se le vinieron a esparcir; sólo los andaba arrastrando.

Y ésta, su cola, es medicina: porque es arrojadora, es sacadora de cosas. Donde algo entra, principalmente en una grieta del hueso, que no puede

tzitzicaticac, quiquixtia zan ihuian quiquixtitiuh. Auh in yehuantin in ahuellacachihua, in ahuel mixihui ca coní ic iciuhca tlacati in conetzintli. Auh in aquin aoc huel maxixa in maxitzacua, ca coní quitlapoa in piaztlí, in cocotli, quipopohua, quiyectia, cochpana in ixtetenca. No yehuatl in tlatlaci, no coní in icuitlapil tlacuatl, ca quicxotla, quitemohuia in alahuac. No yehuatl coní in cacahuatl ipan huei nacaztli ipan tlilxochitl, mecaxochitl ipan, in quin aoc temo quicua in ocuitlaxcol itlacauih in omotexten.

*salir, se pone abundantemente cola de tlacuache, mucha ahí se pone. Aunque esté muy atorado lo que se ha encajado, lo hace salir, fácilmente la va hacer salir. Y ellas, las que paren con dificultad, las que no pueden parir, beben el caldo para que rápidamente nazca el niño. Y el que ya no puede defecar, que tiene estreñimiento, bebe el caldo de la cola del tlacuache, porque pisotea, hace bajar las flemas. También él lo bebe con cacao, con huei nacaztli (*Cymbopetalum penduliflorum*), con tlixóchitl (Vanilla), con mecaxóchitl (*Vanilla planifolia*), quien ya no digiere lo que come, al que se le corrompieron los intestinos, el que se repletó de masa.*



A lo largo del libro aparecen diversos relatos, mitos, cuentos relativos al tlacuache, los cuales irán precedidos por la siguiente representación del tlacuache, tomada del Códice Fejérváry-Mayer:

<http://www.famsi.org/spanish/>



Los relatos, extractos, textos, dichos, adivinanzas, etc. no relacionados con matemáticas y que aparecen a lo largo del libro se tomaron de las siguientes fuentes e irán precedidos por la figura:



1. E. Ramírez, G. Valdés, *Canciones, mitos y fiestas huicholas*, México, DGEI/SEP, 1982.
2. M. Portal, *Cuentos y mitos en una zona mazateca*, México, INAH, 1986.
3. A. López Austin, *Los mitos del tlacuache, caminos de la mitología mesoamericana*, Alianza Editorial, México, 1990.
4. E. Florescano, *Memoria mexicana*, 3a Ed., FCE, 1994.
5. Revista *Arqueología Mexicana*, diversos números.
6. J. Soustelle, *El universo de los aztecas*. FCE, 1996.
7. F. Alvarado Tezozómoc, *Crónica mexicana*, 2a Ed., Porrúa, 1975.
8. F. Alvarado Tezozómoc, *Crónica mexicáyotl*, México, UNAM, 1975.
9. *Códice Matritense de la Real Academia de la Historia*, Textos en náhuatl de los indígenas informantes de Sahagún, ed. facs. del Paso y Troncoso, vol. VIII, Madrid, 1907.
10. M. León-Portilla, *Los antiguos mexicanos*, México, FCE, 1987.

11. "Anales de Cuauhtitlan", en *Códice Chimalpopoca*, México, Imprenta Universitaria, 1945.
12. *Oraciones, adagios, adivinanzas y metáforas*, Del libro sexto del código florentino, Pórtico de la Ciudad de México, 1993.

IN CALLI IXCAHUICOPA

Índice

Prefacio	ix
I Introducción al cálculo de predicados	1
I.1 Introducción	1
I.2 Lógica monádica	7
I.3 ➡ Ejercicios	61
II Lógica de primer orden	65
II.1 Introducción	65
II.2 El lenguaje de la lógica de predicados	67
II.3 Sintaxis	70
II.4 Sintaxis (continuación)	86
II.5 Semántica	90
II.6 Lógica con igualdad	128
II.7 Estructuras particulares	132
II.8 Sustitución	141
II.9 El tamaño de una estructura (el tamaño sí importa)	145
II.10 El lenguaje y los axiomas de la teoría de conjuntos	151
II.11 Apéndice	157
II.12 ➡ Ejercicios	176
III Pruebas formales	211
III.1 Tablas semánticas	212
III.2 Formas normales	225
III.3 Teoría de Herbrand	238
III.4 El método de Herbrand	248
III.5 Resolución	273
III.6 Árboles semánticos	290

III.7	Correctud y completud de tablas semánticas en lógica de primer orden .	300
III.8	Resolución SLD	312
III.9	➡ Ejercicios	332
IV	Sistemas axiomáticos y teoremas fundamentales de la lógica de primer orden	351
IV.1	El sistema de Hilbert $\mathcal{H}$	352
IV.2	Deducción natural	373
IV.3	Hacia el teorema de completud de Gödel	401
IV.4	El teorema de completud de Gödel y sus consecuencias	420
IV.5	Completud y correctud del sistema de Hilbert	424
IV.6	Más sobre compacidad	426
IV.7	➡ Ejercicios	446
V	Lógica modal de primer orden	463
V.1	I. Lógica modal proposicional (Repaso)	463
V.2	Completud	486
V.3	Lógica modal de primer orden	491
V.4	Modelos de dominio variable	522
V.5	La semántica IFB	525
V.6	Sistemas axiomáticos con el inverso de la fórmula Barcan	530
V.7	Sistemas y árboles no monótonos	534
V.8	Identidad	541
V.9	➡ Ejercicios	550
VI	Lógica intuicionista	553
VI.1	Introducción	553
VI.2	Lógica intuicionista	554
VI.3	La identidad	578
VI.4	Semántica	580
VI.5	Árboles semánticos	594
VI.6	➡ Ejercicios	612
	Bibliografía	613
	Índices	615

Bibliografía

- [BaSie94] F. Baader, J. Siekmann, *Unification theory*. En *Handbook of Logic in artificial Intelligence and Logic Programming*, Vol. 2, D. Gabbay, C. Hogger and J. Robinson Eds., 40–125, Oxford University Press, 1994.
- [Bor97] E. Boerger, E. Graedel, Y. Gurevich, *The Classical Decision Problem*, Springer-Verlag, 1997.
- [Boo02] G. Boolos, J. Burgess, R. Jeffery, *Computability and Logic*, Fourth Ed., Cambridge Univ. Press, 2002.
- [Che95] B. F. Chellas, *Modal Logic, An Introduction*, Cambridge University Press, 1995.
- [Cori-Lascar] R. Cori, D. Lascar *Mathematical Logic. A Course with Exercises, I*, Oxford University Press, 2000.
- [Dal04] D. Van Dalen, *Logic and Structure*, 4th. Ed., Springer-Verlag, 2004.
- [Dev93] K. Devlin, *The Joy of Sets*, Springer-Verlag, 1993.
- [Ebbing93] H. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Einführung in die mathematische Logik*, 4. Auflage, Spektrum Akad. Verlag, 1993.
- [Eps06] R. Epstein, *Classical Mathematical Logic: The Semantic Foundation of Logic*, Princeton Univ. Press, 2006.
- [FerVill09] M. Fernández De Castro Tapia, L. M. Villegas Silva, *Lógica matemática I: Lógica proposicional, Intuicionista y Modal*, UAMI, 2009.
- [Gir00] R. Girle, *Modal Logic and Philosophy*, McGill-Queen's University Press, 2000.

- [GoJu95] M. Goldstern, H. Judah, *The incompleteness Phenomenon: A new course in mathematical Logic*, A. K. Peters, 1995.
- [Hed04] S. Hedman, *A First Course in Logic*, Oxford Univ. Press, 2004.
- [Hin05] P. Hinman, *Fundamentals of Mathematical Logic*, A. K. Peters, 2005.
- [Hod97] W. Hodges, *A Shorter Model Theory*, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [HuC96] G. Hughes, E. Cresswell, M.J. *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, 1996.
- [Mar02] D. Marker, *An Introduction to Model Theory*, Springer-Verlag, 2002.
- [Mend04] E. Mendelson, *An Introduction to Mathematical Logic*, fourth Ed., Chapman & Hall, 2004.
- [MetNer96] G. Metakides, A. Nerode, *Principles of Logic and Logic Programming*, North-Holland, 1996.
- [Min00] G. Mints, *A Short Introduction to Intuitionistic Logic*, Kluwer Academic-Plenum Publishers, 2000.
- [NerSho94] A. Nerode, R. Shore, *Logic for Applications*, Springer-Verlag, 1994.
- [Pre92] A. Prestel, *Einführung in die mathematische Logik und Modelltheorie*, Vieweg, 1992.
- [Pri01] G. Priest, *An Introduction to Non-Classical Logic*, Cambridge University Press, 2001.
- [Qui82] W. V. O. Quine, *Methods of Logic*, Harvard University Press, 1982.
- [Rau06] W. Rautenberg, *A Concise Introduction to Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 2006.
- [Rub90] J. E. Rubin, *Mathematical Logic: Applications and Theory*, Saunders Co. Pub., 1990.
- [Shoen01] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, A. K. Peters, 2001.
- [ViRoMi00] L. M. Villegas Silva, et. al., *Conjuntos y modelos: un curso avanzado*, Universidad Autónoma Metropolitana, 2000.

Índice de símbolos

A_{Fin} , 434	$\varphi \equiv \psi$, 106
$Con(\Phi)$, 402	$\varphi \models \psi$, 106
$D(\mathfrak{A})$, 260	$\mu_c(t)$, 171
$E(\Phi)$, 263	$\vdash_C$, 368
$E(\varphi)$, 248	$\vdash \alpha$, 214
$Res(\varphi)$, 273	$\vdash_{\mathfrak{P}}$, 353
$Res^*(\varphi)$, 273	$\vdash_N$, 374
$S(\varphi)$, 231	$act(\varphi)$, 89
$Sat(\Phi)$, 404	$c_{x,\varphi}$, 411
$Teo(\mathfrak{N})$, 433	$d(a, b)$, 183
$\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$, 100	$lib(\varphi)$, 88
$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$, 114	$s^n(0)$, 434
$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\varphi)$, 96	$s_x(t)$, 161
$\mathfrak{H}^\Phi$, 257	$sust(\mu, x, t)$, 164
$\mathcal{L}(C)$, 411	$t^{\mathfrak{A}}[\alpha]$, 95
$\Phi \vdash_{\mathfrak{P}} \varphi$, 352	AE, 155
$\Phi \vdash_N \varphi$, 374	$At(\mathcal{L})$, 79
Φ^+ , 257	$Atm(\mathcal{L})$, 79
Φ^- , 257	$\exists$, 67
$\mathfrak{T}$, 448	$\forall$, 67
$\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$, 81	$Fml(\mathcal{L})$, 80
$\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$, 81	FNP, 225
$\perp$, 402	FNPC, 225
$\bowtie$, 439	FNS, 230
$\exists^{\geq n}$, 183	GE, 386
$\Sigma \vdash \varphi$, 214	Gen, 353
$\varphi(\mathfrak{A})$, 115	
$\varphi(v_1, \dots, v_n)$, 87	

LTC, 151

MP, 352

PBO, 155

PE, 387

$rg(\varphi)$, 80

TSC, 302

umg, 268

ZFE, 153

Índice alfabético

- $\mathfrak{A}$ -asignación, 94
 - AE, 155
 - algoritmo
 - de Horn, 255
 - de unificación, 269
 - altura de un término, 71
 - árbol
 - binario, 212
 - de formación
 - de un término, 72
 - semántico, 290, 291
 - argumento, 219
 - válido, 219
 - asignación, 94
 - axioma
 - de comprensión, 153
 - de elección, 155
 - de extensionalidad, 153
 - de infinito, 154
 - de potencia, 154
 - de regularidad, 154
 - de remplazo, 154
 - de unión, 153
 - axiomas
 - anillos de Von Neumann, 77
 - de Hilbert, 352
 - de la igualdad, 128
 - de la teoría de conjuntos, 151
 - de un orden lineal, 79
 - de un orden lineal sin extremos, 79
 - orden lineal, 139
 - teoría de anillos, 76
 - teoría de campos, 77
 - teoría de grupos, 76
 - teoría de grupos abelianos, 76
 - teoría de módulos, 78
- borde, 133
 - cabeza, 338
 - cambio alfabético, 166
 - campo característica, 442
 - cardinalidad de una estructura, 145
 - cíclo, 134
 - cláusula, 338
 - de programa, 338
 - meta, 338
 - compacidad, 431
 - conjunto
 - bien ordenado, 155
 - de fórmulas consistente, 106
 - de fórmulas inconsistente, 106
 - de Henkin, 405
 - de literales unificable, 268
 - definible, 115
 - enumerable, 147
 - inconsistente de fórmulas, 402

- innumerable, 147
- máximo consistente, 405
- mínimo satisfacible, 321
- parcialmente ordenado, 155
- refutable
 - de fórmulas, 293
- consecuencia lógica, 106
- consistencia, 106
- cuantificación acotada, 152
- cuantificador
 - de conteo, 183
 - existencial, 67
 - universal, 67
- deducción natural, 373
 - contrapositiva, 380
 - MP, 380
 - prueba indirecta, 380
- demostración por tablas, 214
- diagrama
 - de una estructura, 260
 - positivo, 260
- distancia entre dos vértices, 183
- elemento
 - estándar, 434
 - finito, 434
 - infinito, 434
 - máximo, 155
 - menor, 155
 - no estándar, 434
- eliminación de constantes, 412
- enunciado, 88
 - lógicamente falso, 114
 - lógicamente válido, 114
- equivalencias lógicas, 111
- espectro de una fórmula, 193
- estructura de Herbrand, 238
- evaluación
 - de un término, 95
 - de una fórmula, 96
- explicandum, 1
- explicatum, 1, 2
- falsum, 402
- FNP, 225
- FNPC, 225
- FNS, 230
- forma
 - normal
 - de Skolem, 230
 - prenexa, 225
- fórmula, 73
 - atómica, 73
 - de Horn, 255
 - demostrable por tablas, 214
 - lógicamente válida, 106
 - negativa, 255
 - positiva, 255
 - primitiva, 73
 - válida, 106
- fórmulas lógicamente equivalentes, 106
- Gen, 353
- generalización, 352
- gráfica, 133, 432
 - completa, 135
 - conexa, 135
 - k-coloreable, 446
- gráficas isomorfas, 135
- hecho, 338
- Herbrand, 238
- H-resolución, 314
- igualdad, 69

- inconsistencia, 106
- inducción
 - en la construcción de una fórmula, 80
- instancia básica, 248, 263
- interpretación en una estructura, 91
- lema de Zorn, 156
- lenguaje
 - aritmética, 68
 - de la teoría de conjuntos, 151
 - espacios vectoriales, 69
 - formal, 67
 - relaciones de equivalencia, 68
 - teoría
 - de grupos, 68
- $\mathcal{L}$ -estructura, 91
- leyes de De Morgan, 126
- literal, 338
 - negativa, 338
 - positiva, 338
- LN -resolución, 325
- longitud de un término, 158
- LTC, 151
- meta, 338
- método de Herbrand, 248
- modelo
 - de Herbrand, 239
 - de la aritmética, 434
 - estándar, 434
 - no estándar, 434
 - respeto igualdad, 129
- modus ponens, 352
- MP, 352
- negación de una fórmula, 127
- no axiomatizabilidad de un buen orden, 441
- nodo reducido, 301
- N -resolución, 312
- orden
 - lineal, 155
 - total, 155
- PBO, 155
- PE, 387
- peso de una cadena, 157
- principio del buen orden, 155
- PROLOG, 338
- prueba, 353
 - por tablas, 214
- rama contradictoria, 291
- rango de una fórmula, 80
- regla, 338
 - C, 366
 - de inferencia, 352
 - de los pesos, 157
 - de selección, 327
 - deducción, 354
 - GE, 386
 - Gen, 353
 - generalización existencial, 386
 - invariante, 327
 - PE, 387
 - prueba existencial, 387
- reglas de la deducción natural, 373
- resolución lineal, 320
- resolución, 273
- U -resolvente, 272
- semántica, 90
- símbolo

- constante, 67
- cuantificador, 67
- función, 67
- relación, 67
- símbolos
 - lógicos, 68
 - no lógicos, 68
- sintaxis, 70, 86
- sistema
 - de Hilbert, 352
 - completud, 425
 - correctud, 424
 - deducción natural, 373
- skolemización, 231
- SLD-derivación, 327
- SLD-resolución, 327
- subfórmula, 86
- sucesor, 154
- sustitución, 161
- sustitución cambio alfabético, 166
- tabla
 - finita, 212
 - semántica, 212
 - completa, 302
 - con premisas, 213
 - terminada, 302
- teorema
 - compacidad, 311
 - completud, 420
 - tablas semánticas, 310
 - correctud
 - tablas semánticas, 308
 - correctud para deducción natural, 374
 - de compacidad, 421
 - de Herbrand, 250, 296
 - Löwenheim-Skolem, 310, 419, 423
- teoría, 426
 - completa, 426
 - de $\aleph$, 433
 - de conjuntos, 151
- término básico, 249
- término, 70
- testigo, 100
- testigos, 426
- trayectoria, 214, 432
 - en una gráfica, 135
- TSC, 302
- umg, 268
- unificación, 268
- unificador, 268
 - más general, 268
- universo, 91
 - de Herbrand, 239
- vértice, 133
- variable
 - acotada, 87
 - libre, 87
 - ligada, 87
- variante, 167
- ZFE, 153



El centro y los cuatro rumbos del mundo
Códice Fejérváry-Mayer

Así lo vinieron a decir,
así lo asentaron en su relato,
y para nosotros lo vinieron a dibujar en sus papeles
los ancianos, las ancianas.
Eran nuestros abuelos, nuestras abuelas,
nuestros bisabuelos, nuestras bisabuelas,
nuestros tatarabuelos, nuestros antepasados.
Se repitió como un discurso su relato,
nos lo dejaron,
y vinieron a legarlo
a quienes ahora vivimos,
a quienes salimos de ellos.
Nunca se perderá, nunca se olvidará,
lo que vinieron a hacer,
lo que vinieron a asentar en las pinturas:
su nombre, su historia, su recuerdo.
Así en el porvenir
jamás perecerá; jamás se olvidará,
siempre lo guardaremos
nosotros, hijos de ellos, los nietos,
hermanos, bisnietos, tataranietos, descendientes.
Quienes tenmos su sangre y color.
Lo vamos a decir, lo vamos a comunicar
a quienes todavía vivirán, habrán de nacer,
los hijos de los mexicas, los hijos de los tenochcas.
Y esta relación la guardó Tenochtitlan
cuando vinieron a reinar todos los grandes,
estimables ancianos, los señores y reyes tenochcas.
Esta antigua relación oral,
esta antigua relación pintada en los códices,
nos la dejaron en México,
para ser aquí guardada...
Aquí, tenochcas, aprenderéis cómo empezó
la renombrada, la gran ciudad,
México-Tenochtitlan,
en medio del agua, en el titular,
en el cañaveral, donde vivimos,
donde nacimos,
nosotros los tenochcas.

Crónica mexicáyotl

Dichos

Duerst Collegium Logicum. Da wird der Geist Euch wohl dressiert, In spanische Stiefeln eingeschnrt, Daßer bedächtiger so fortan Hinschleiche die Gedankenbahn, Und nicht etwa, die Kreuz und Quer, Irrlichteliere hin und her. Dann lehret man Euch manchen Tag, Daß, was Ihr sonst auf einen Schlag Getrieben, wie Essen und Trinken frei, Eins! Zwei! Drei! dazu nötig sei.

J. W. Goethe

Das Denken gehört zu den größten Vergnügungen der menschlichen Rasse.
Der A sagt, der muß nicht B sagen. Er kann auch erkennen, da A falsch war.
Das Schlimmste ist nicht: Fehler haben, nicht einmal sie nicht bekämpfen, ist schlimm. Schlimm ist, sie zu verstecken.
Das sind das für Zeiten, wo ein Gespräch über Bume fast ein Verbrechen ist, weil es ein Schweigen über so viele Untaten einschließt.

B. Brecht

Die Kommunisten sind keine besondere Partei gegenüber den andern Arbeiterparteien. Sie haben keine von den Interessen des ganzen Proletariats getrennten Interessen. Sie stellen keine sektiererischen Prinzipien auf, wonach sie die proletarische Bewegung modeln wollen.
Die Kommunisten sind also praktisch der entschiedenste, immer weiter treibende Teil der Arbeiterparteien aller Länder; sie haben theoretisch vor der übrigen Masse des Proletariats die Einsicht in die Bedingungen, den Gang und die allgemeinen Resultate der proletarischen Bewegung voraus.

K. Marx