XVIII

Sobre dos teoremas de G. Fichtenholz y L. Kantorovitch

Título original: Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kantorovitch.
Von F. Hausdorff
Studia Mathematica (1936), 18-19 **6**.

Sea $f(x)$ una aplicación de A en A^*, es decir, a cada $x \in A$ está asociado un $f(x) \in A^*$. Una cantidad arbitraria de tales aplicaciones se llaman *esencialmente distintas* cuando para cualesquier cantidad finita de ellas $f_1, \ldots, f_k$ siempre existe al menos una posición x donde $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ son distintas entre sí.

Diremos que una cantidad arbitraria de subconjuntos Z del conjunto C es independiente, cuando para cualesquier cantidad finita de ellos $Z_1, \ldots, Z_p, Z'_1, \ldots, Z'_q$ siempre ocurre

$$Z_1 \cdots Z_p (C - Z'_1) \cdots (C - Z'_q) \neq 0.$$

Entonces se cumplen los teoremas:

I. Si A tiene cardinalidad infinita m, existen 2^m aplicaciones esencialmente distintas de A en A.

II. Un conjunto C de cardinalidad infinita m tiene 2^m subconjuntos independientes.

En su trabajo: Sur les operations linéaires dans l'espace des fonctions bornées (Stud. Math. 5(1935), págs. 69-98) los Srs. G. Fichtenholz y L. Kantorovitch demostraron tanto el teorema I (Lemme III, pág. 81 y Supplément, págs. 94-98) como el teorema II para $m = \aleph_0$ y $m = 2^{\aleph_0}$ (pág. 80 y Lemme IV, pág. 82). Las demostraciones son prolijas y se pueden simplificar mucho, como el lector puede suponer.

Demostración de I. Sea M de cardinalidad m y A el conjunto de subconjuntos finitos $x \subset M$; A tiene cardinalidad $1 + m + m^2 + \cdots = \aleph_0 m = m$. Si t recorre la totalidad de los 2^m subconjuntos de M, entonces

$$f(x, t) = xt$$

(la intersección de x y t) es una aplicación, para t fija, de A en A. Estas 2^m aplicaciones son esencialmente distintas. Porque si $t_1, t_2, \ldots, t_k$ son distintos entre sí, se escoge un elemento de cada uno de los conjuntos $(t_i - t_j) + (t_j - t_i) \neq 0\,(1 \leq i < j \leq k)$ y se construye la suma x de estos elementos; entonces $xt_i \neq xt_j$.

Demostración de II. Según I tenemos 2^m aplicaciones esencialmente distintas de A en A, donde el parámetro t recorre un conjunto de cardinalidad 2^m. Sea B el conjunto de los conjuntos finitos $\subset A$ y $C = (A, B)$ el producto combinatorio de A y B, es decir, el conjunto de parejas ordenadas (x, y) con $x \in A$, $y \in B$. También B y C tienen cardinalidad m. A cada t le asociamos el conjunto $Z(t)$ de parejas (x, y) con $f(x, y) \in y$; $C - Z(t)$ es el conjunto de parejas (x, y) con $f(x, t) \notin y$. Entonces los 2^m conjuntos $Z(t)$ son independientes. Pues los $t_1, \ldots, t_p, t'_1, \ldots, t'_q$ son distintos, por lo que existe, por I, un x tal que las $p + q$ imágenes

$$x_i = f(x, t_i), \qquad x'_j = f(x, t'_j)$$

para $i = 1, \ldots, p$ y $j = 1, \ldots, q$ son todos distintas. Si $y = \{x_1, \ldots, x_p\}$, entonces:

$$f(x, t_i) \in y, \qquad f(x, t'_j) \notin y$$

así

$$(x, y) \in Z(t_i), \qquad (x, y) \in C - Z(t'_j)$$
$$\Pi_i Z(t_i) \cdot \Pi_j [C - Z(t'_j)] \neq 0.$$

(Recibido por la redacción el 13.11.1935.)