I

Sobre un cierto tipo de conjuntos ordenados

Título original: Über eine gewisse Art geordneter Mengen
Von Felix Hausdorff

Berichte Königl. Ges. Wiss. zu Leipzig Math. Kl. **53**(1901), 460-475.

En el área de los conjuntos ordenados originada por Cantor sólo tenemos conocimientos, hasta cierto punto, sobre los número ordinales; sobre los tipos generales, tipos que no corresponden a conjuntos bien ordenados, se sabe muy poco. No obstante, el conocimiento detallado y la clasificación de los tipos constituye uno de los problemas accuciantes de la teoría de conjuntos: aunque sólo sea porque en esta forma podemos acercarnos más a una solución del viejo problema de la caridinalidad del continuo. Pues por un teorema de Cantor-Bernstein[1] la cardinalidad de la segunda *clase* de tipos (la clase de los tipos numerables) es igual a la cardinalidad del continuo[1]$\aleph$, mientras que la cardinalidad de la *segunda* clase se denota $\aleph_1$, por lo que es importante en la comparación de $\aleph$ y $\aleph_1$ determinar las posiciones intermedias; es decir, extraer de entre la totalidad de los conjuntos numerables un grupos reducido que contenga a los conjuntos bien ordenados numerables. La misma conjetura de Cantor de que $\aleph = \aleph_1$ promete facilitar la demostración perfilando el camino; recíprocamente, si $\aleph > \aleph_1$, permite tomar un atajo. En lo sucesivo caracterizaremos de acuerdo a ciertas propiedades uno de tales grupos de tipos ordinales que como caso particular contiene a los números ordinales; queda por lo pronto sin decidirse si éste es precisamente lo más apropiad para investigar los tipos y la clarificación de la pregunta sobre la cardinalidad

§1

Aclaraciónes. En las siguientes consideraciones hablaremos siempre de *conjuntos ordenados* en el sentido se sus *tipos de orden*; es decir, no tienen ningún papel las particularidades de sus elementos, y pensaremos que se sustituyen por objetos que sólo conservan la jerarquía entre los originales. Como

[1]F. Bernstein, Untersuchungen aus der Mengenlehre, Diss. 1901.

[1]Esta notación provisional (álef sin índice) que podría pensarse perjudicial, tiene como razón de ser que G. Cantor ha pensado publicar pronto que cada cardinal transfinito debe aparecer en la *sucesión de los álef.*

es inevitable denotar a los elementos individualmente, por ejemplo para simplificar el intercambio de elementos por grupos de elementos, en general preferimos quedarnos con el conjunto mismo M en lugar de su tipo $\overline{M}$ y operar con ellos según las prescripciones de G. Cantor para tipos ordinales. Así, si $M = \{m\}$ y $N = \{n\}$ son conjuntos ordenados, la *suma* $M + N$ es el conjunto ordenado, en el que los elementos m conservan la relación que tenían en M, los elementos n la que tenían en N, mientras que cada elemento m precede en rango a cada elemento n $(m < n, n > m)$. La adición aquí definida es asociativa, pero no conmutativa. En este sentido, si $M = P + R$ o $M = P + Q + R$, los conjuntos P, Q, R se llaman segementos del conjunto M, y de hecho, P es un segmento inicial, Q un segemento intermedio y R un segemento final. Si en una descomposición en dos segmentos el segmento final R tiene un *primer elemento* m, R se llama el resto determinado por m, y el segemento inicial correspondiente A $(M = A + R)$ se conoce como *la sección* determinada por m del conjunto M; se sigue que la sección consiste en aquellos elementos que preceden a un elemento dado m, el resto consta de m mismo y de los que le suceden. Por el *producto* $M \cdot N$ de dos conjuntos ordenados entendemos el conjunto ordenado que se origina al "sustituir" cada elemento n de N por un conjunto M_n del tipo del conjunto M (un conjunto "similar" a M $M_n \simeq M$). Esta multiplicación es asociativa, pero no conmutativa, y distributiva por un lado respecto a la adición; esto es, $M(P + Q) = MP + MQ$, pero $(P + Q)M \neq PM + QM$. Por "sustitución" (que no se restringe exclusivamente a conjuntos similares a M_n) del elemento n por el conjunto ordenado M_n se entenderá el orden mediante el cual cada elemento de M_n guarda la misma relación con cada elemento de $M_{n'}$ que la que tienen n y n'.

Definición **I.0.1.** Un conjunto se llama estratificado cuando ninguna de sus segmentos es similar a algún otro. El tipo de orden de un conjunto estratificado se conoce como tipo estratificado.

Notamos de inmediato que ninguna sección es similar al conjunto mismo. A saber, si tuviésemos $M \simeq A$, donde A es el segmento de M correspondiente al elemento m, mediante la misma aplicación de similaridad de M a A se transformaría m en un elemento m', por lo que los segmentos correspondientes A, A' serían similares. Por consiguiente, los tipos $\overline{A}$ son distintos entre sí y diferentes de $\overline{M}$.

Los más conveniente es convencernos a través de ejemplos de la existencia de conjuntos estratificados En la comprobación de que cierto conjunto es estratificado, generalmente probaremos primero la no similitud entre M y A, pues regularmente se comprueba en forma análoga que la similitud entre segmentos distintos está excluida, donde lógicamente la primera parte de este proceder no es suficiente y después de concluir la segunda ya no es necesaria.

Ejemplo 1. Cada conjunto bien ordenado es estratificado. Los tipos $\overline{A}$ de sus segmentos están ordenados según su magnitud y consisten en los números ordinales finitos y transfinitos $0, 1, 2, \ldots \omega, \omega + 1, \ldots,$ terminando con el número ordinal $\overline{M}$.

Ejemplo 2. Considere el conjunto $R = \{r\}$ del los racionales ordenados según su magnitud; su tipo η es, como lo ha demostrado G. Cantor[1], numerable, denso en todas partes, sin primer o último elemento, y determinado por estas tres propiedades. En este conjunto se sustituye por cada elemento r un conjunto finito Q_ν de ν elementos, de tal forma que a cada r le corresponde uno y sólo un número entero positivo ν. Esto puede efectuarse en una cantidad infinita de formas; porque cuando se pone R en forma de una sucesión ordenada simple $r_1 r_2 r_3 \cdots r_\nu \cdots$, sólo se requiere asociar a cada $r = r_\nu$ su

[1]Math. Ann. Vol. 46(1895), pág. 481.

posición ν en esta serie, o también asociar a cada $r = r_\nu$ el número a_ν, donde $a_1a_2a_3\cdots a_\nu\cdots$ es alguna serie creciente de números enteros ($1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$). Mediante este remplazo se genera un conjunto numerable estratificado $M = \{Q_\nu\}$.

La demostración es sencilla. Sean m algún elemento de M y A el segmento asociado. Entonces m debe pertenecer a algún conjunto Q, digamos Q_ν. Se toma en el conjunto R algún elemento s sucesor de r ($s > r$): éste existe con seguridad, pues R no tiene último elemento. El grupo Q_s correspondiente a s consiste en alguna cantidad de elementos, digamos cinco. Entonces apareceran también en A grupos de cinco elementos sucesivos, pero ninguno de ellos estará relacionado con su entorno en la misma jerarquización que la de Q_s con su entorno; a saber, que el primer elemento no tiene predecesor y que el quinto no tiene sucesor. Un grupos de cinco elementos así formado es solamente Q_s mismo, por lo que M no puede ser similar al segmento A. En forma totalmente análoga se demuestra que dos segmentos distintos A, A' no pueden ser similares entre sí.

De esta forma se ha construido una categoría muy amplia de conjuntos estratificados numerables, que se generan al sustituir *diversos conjuntos finitos* en el tipo denso en todas partes η. Al igual que cada uno de estos conjuntos M, también es estratificado su *inverso*, que se obtiene al invertir la jerarquía en M.

Una generalización de este procedmiento, con la que se pueden lograr conjuntos estratificados de mayor cardinalidad, consiste en sustituir en un tipo arbitrario denso en todas partes *diversos conjuntos bien ordenados* en lugar de sus elementos.

Ejemplo 3. También en el tipo ω^* de la sucesión decreciente $\cdots, 3, 2, 1$ se pueden sustituir conjuntos bien ordenados de tal forma que se genere un tipo estratificado. Por ejemplo, considere los conjuntos bien ordenados cuyos números ordinales son $\omega, \omega^2, \omega^3, \cdots, \omega^\nu \cdots$ súmese estos de izquierda a derecha, se obtiene $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots$ en inf. $= \omega^\omega$, otra vez un número ordinal. Si se añade en forma de potencias decrecientes, se genera el tipo

$$\cdots + \omega^l + \cdots + \omega^3 + \omega^2 + \omega,$$

que no está bien ordenado, pero sí es estratificado.

La demostración se basa esencialmente en la propiedad, que aparece entre las potencias de ω y en ningún otro número de la segunda clase, de que cada *resto* de un conjunto de tipo ω^ν tiene el mimso tipo ω^ν. Ahora sea Q_ν un conjunto de tipo ω^ν y $M = \cdots + Q_3 + Q_2 + Q_1$, contrario a la afirmación, similar al segemento A determinado por m; se denota mediante $A = \varphi(M)$ la imagen respecto a una aplicación de M a A que respeta el orden. Respecto a esta aplicación m mismo se transforma en un elemento $m' = \varphi(m)$ y se cumple $m' < m$; la imagen de m' es a su vez un elemento $m'' = \varphi(m') < m'$ y así sucesivamente. De esta forma se genera una serie decreciente de elementos $m > m' > m'' > \cdots$. Si el elemento m perteneciese al conjunto ordenado Q_μ, dado que en un conjunto bien ordenado cada serie decreciente de elementos es finita, debería aparecer en la serie $mm'm''\cdots$ un *último* elemento n, que todavía pertenece a Q_ν ($\nu > \mu$). Pero esto conduce a una contradicción, porque, como lo propician las imágenes sucesivas, el resto de M correspondiente a m es similar a la totalidad de los elementos entre m' y m (incluyendo m', excluyendo m) o entre m'' y m o finalmente entre $\varphi(n)$ y n. Ese resto era de tipo $\omega^\mu + \cdots + \omega^3 + \omega$ y este número ordinal es menor que ω^ν; por el contrario, el intervalo entre $\varphi(n)$ y n comienza con un resto de Q_ν, por lo que tiene tipo $\omega^\nu + \omega^{\nu-1} + \cdots > \omega^\nu$. Por lo tanto, no pueden ser semejantes estos dos conjuntos, lo que contradice $M \simeq A$. en forma análoga se demuestra la no similitud de segmentos diferentes de M.

Aquí también es posible una generalización sencilla. Si $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$ representa una serie creciente de números enteros (de la primera o segunda clase), entonces

$$\cdots + \omega^{\alpha_\nu} + \cdots + \omega^{\alpha_3} + \omega^{\alpha_2} + \omega^{\alpha_1}$$

es un tipo estratificado de la primera cardinalidad. El crecimiento monótono de los α es superfluo, pues basta que para cada α_μ exista un $\alpha_\nu > \alpha_\mu$, $\nu > \mu$.

Los ejemplos dados permiten responder a la pregunta sobre la *cardinalidad* del conjunto de los tipos estratificados numerables; esta cardinalidd es igual a $\aleph$, la cardinalidad del conjunto de los tipos numerables o la cardinalidad del continuo. Por un lado, la cardinalidad buscada es $\leq \aleph$ por el teorema de Cantor-Bernstein; por otro lado existe un subconjunto de tipos numerables estratificados que posee la cardinalidad del continuo, pues a cada sucesión creciente de números enteros positivos $a_1a_2a_3\cdots$ se le puede asociar simultáneamente un tipo estratificado (a saber, de la tercera clase de ejemplos) y un número real $x = (\frac{1}{2})^{a_1} + (\frac{1}{2})^{a_2} + (\frac{1}{2})^{a_3} + \cdots$ del intervalo $0, 1$. Por consiguiente, la cardinalidad buscada es $\geq \aleph$, por lo que del teorema de equivalencia de Schröder-Bernstein es $= \aleph$.

Aun hago notar que los conjuntos estratificados pertenecen a aquella categoria, considerada ocasionalmente por Cantor, de los conjuntos que son similares a sí mismos de una sola forma; recíprocamente un conjunto de esa categoría (por ejemplo, el inverso de algún conjunto bien ordenado) no es necesariamente estratificado

§2.

Ahora demostramos algunos teoremas sobre conjuntos estratificados.

a) En un conjunto estratificado ningun segmento inicial es similar a otro o al conjunto mismo.

Si se tuviese $P + Q \simeq P$, un elemento q de Q debería corresponder a un elemento p de P, así $p < q$, respecto a la aplicación de $P + Q$ sobre P, y el segmento correspondiente a q sería similar al correspondiente a p, lo que se opone a la definición.

b) Cada segmento de un conjunto estratificado es un conjunto estratificado.

De a) se obtiene inmediatamente que este teorema se cumple para segmentos iniciales. Si Q es un segmento intermedio o final, P la colección de los elementos predecesores, B y B' secciones de Q, de $B \simeq B'$ se seguiría también $P + B \simeq P + B'$, es decir, la similitud entre secciones distintas de M.

Se observa que para los conjuntos bien ordenados no sólo cada segmento si no cada subconjunto está otra vez bien ordenado.

c) Un conjunto estratificado no es similar a ninguno de sus segmentos *intermedios*.

Este importante teorema se pude demostrar como a continuación. Sea $M = P + Q + R$, donde P y R no son vacíos y $M \simeq Q$; se denota por $Q = \varphi(M)$ una posible aplicación que preserva el orden de M sobre Q. Aquí P, Q, R se transforman en los tres segmentos $P_1Q_1R_1$ de Q, y $R_1 = \varphi(R)$ es un segmento final de Q, se une a la izquierda R, de tal forma que $R_1 + R$ forma un segmento final de M. Igualmente se une $R_2 = \varphi(R_1)$ a la izquierda de R_1, y así sucesivamente. Se denota con

$$S = \cdots + R_3 + R_2 + R_1 + R$$

la colección de los elementos que se forman mediante la iteración de la aplicación φ; S es un segmento final de M. En virtud de b) S debería ser un conjunto estratificado; pero por construcción $S = \varphi(S) + R$, por lo que S es similar a un segmento inicial $\varphi(S)$, lo que contradice el teorema a). Por consiguiente, no puede ocurrir $M \simeq Q$.

En un conjunto estratificado están excluidas, por tanto, las similitudes $M \simeq P$, $M \simeq Q$, $P \simeq P'$, pero cualquier otra *puede tener lugar* ($M \simeq R$, $P \simeq Q$, $P \simeq R$, $Q \simeq R$, $Q \simeq Q'$, $R \simeq R'$).

d) Si M es estratificado y N es un conjunto arbitrario, entonces nunca ocurre $M \simeq M + N$.

Pues entonces se tendría $M = \varphi(M + N)$ una aplicación de similitud, y $\varphi(M) \simeq M$ sería un segmento inicial de M.

e) Si M es estratificado, N y N' son conjuntos arbitrarios, entonces de $M + N \simeq M + N'$ se sigue que $N \simeq N'$.

Sea $\varphi(M + N) \simeq M + N'$; la imagen $\varphi(M)$ de M no puede ser, por (a), un segmento inicial de M ni tampoco (e) un conjunto que contenga a M como segmento inicial; por consiguiente, se cumple $\varphi(M) = M$ y $\varphi(N) = N'$, así $N \simeq N'$.

f) *Si M, N son conjuntos estratificados, también lo es $M + N$.*

Sea A una sección de M, B una de N. Las secciones de $M + N$ son de la forma $A, M, M + B$. Por d) no puede ocurrir $M \sim M + N$, pero tampoco $A \sim M + N = A + R + N$, porque A mismo es un conjunto estratificado. Finalmente no se puede tener $M + B \simeq M + N$, porque con e) se seguiría $B \simeq N$, pero N no es similar a ninguna de sus secciones. En consecuencia, $M + N$ no es similar a ninguna de sus secciones. Dado que B también es estratificado, por lo mismo $M + B$ no puede ser similar a ninguna de sus secciones; lo mismo se cumple para M y A. Así que ninguna de las secciones de $M + N$ es similar a alguna otra.

También la suma de una cantidad arbitraria *finita* de conjuntos estratificados da lugar a un conjunto estratificado- Por el contrario, la suma de un conjunto *transfinito* de conjuntos estratificados conduce a un conjunto estratificado sólo con cierto orden; en este contexto resaltamos el teorema:

g) Un conjunto bien ordenado de conjuntos estratificados es un conjunto estratificado.

Sea $S = \{s\}$ un conjunto bien ordenado; en lugar de los elementos s se coloca el conjunto estratificado Q_s para dar paso a un conjunto $M = \{Q_s\}$. Suponemos que M es similar a una sección A determinada por el elemento m; sea $A = \varphi(M)$ la imagen similar, en la que el elemento m se transforma en $m_1 = \varphi(m) < m$, y éste a su vez en $m_2 = \varphi(m_1) < m_1$, y así sucesivamente. Obtenemos de est forma una serie decreciente $m > m_1 > m_2 > \cdots$ de tipo ω^*. Digamos que el elemento m pertenece al conjunto Q_s, el elemento m_1 al conjunto Q_{s_1}, y así sucesivamente, entonces $s \geq s_1 \geq s_2 \geq s_3 \cdots$. En esta serie debe aparecer la igualdad a partir de un cierto elemento, porque S no puede contener sucesiones decrecientes infinitas al ser un conjunto bien ordenado; es decir, en la serie $m m_1 m_2 \cdots$ aparece un elemento n que junto con los siguientes

$$n_1 = \varphi(n) <, \quad n_2 = \varphi(n_1) < n_1, \cdots$$

pertenecen al mismo conjunto estratificado Q_t. Los segmentos en este conjunto asociados a $n, n_1, n_2, \ldots$ se denotan con $B, B_1, B_2, \ldots$; además, sea $B = B_1 + R_1$, $B_1 = B_2 + R_2$, etc. entonces $R_2 = \varphi(R_1)$, $R_3 = \varphi(R_2)$, ... y

$$T = \cdots + R_3 + R_2 + R_1$$

es un segmento de Q_t, por lo que es un conjunto estratificado. Ya que $T = \varphi(T) + R_1$, T es similar a su sección $\varphi(T)$, y esta contradicción muestra que la suposición $M \simeq A$ se debe desechar. Por lo tanto, un conjunto bien ordenado de conjuntos estratificados no es similar a ninguna de sus secciones, y dado que cada sección es a su vez un conjunto bien ordenado de conjuntos estratificados, ninguna sección es similar a otra. Así, M es un conjunto estratificado.

h) Si una cantidad finita de elementos de un conjunto estratificado se remplaza por conjuntos estratificados, se genera otra vez un conjunto estratificado.

Cosidere un elemento m, sea $M = A + m + R$, entonces por b) A y R son estratificados. Si m se remplaza por el conjunto estratificado Q_m, se obtiene el conjunto $A + Q_m + R$, que por f) es estratificado. El conjunto sigue siendo estratificado si repetimos este proceso una cantidad finita de ocasiones.

Por el contrario, el teorema no se cumple para conjuntos transfinitos. A saber, si se sustituye en el ejemplo 2 el *último* elemento de *cada* grupo Q_r por un conjunto bien ordenado (así estratificado= de tipo ω), el grupo entero adquiere el tipo ω, el conjunto $\{Q_r\}$ el tipo $\omega \cdot \eta$, que ya no es estratificado. En oposición a (g), además en oposición a una propiedad conocida[1] de los conjuntos bien ordenados un conjunto estratificado de conjuntos bien ordenados o estratificados no es, en general, estratificado. En cambio, se mostrará que al sustituir *siempre el mismo* conjunto estratificado en lugar de *cada* uno de los elementos de un conjunto estratificado, es decir, al *multiplicar* dos conjuntos estratificados, se origina un conjunto estratificado.

i) Sean M un conjunto estratificado, P un segmento inicial de M, S un conjunto que no contiene segmentos de tipo ω^* y T un conjunto arbitrario. Entonces el conjunto MN no es similar a ningún conjunto de la forma $MT + P$, y será similar a uno de la forma MT sólo cuando $S \simeq T$.

La demostración se basa esencialmente en la propiedad c), de que M no puede ser similar a ninguno de sus segmentos iniciales. Se sigue que algún segmento del conjunto MS (que se origina al sustituir cada elemento s de S por $M_s \simeq M$) puede ser similar al conjunto M mismo sólo cuando se reparte en *a lo sumo dos conjuntos vecinos inmediatos* M_s. Si denotamos con P_s, Q_s, R_s un segmento inicial, medio, final de M_s y si s_1, s $(s_1 < s)$ son elementos sucesivos inmediatos de S, entonces cada segmento de MS similar a Mtiene alguna de las cuatro formas $R_s, M_s, R_{s_1} + M_s$, $R_{s_1} + P_s$. Por la misma razón cada segmento de MS, que sea similar a un segmento inicial P de M, tiene una de las cuatro formas $R_s, Q_s, P_s, R_{s_1} + P_s$.

Si tuviésemos $MS \simeq MT + P$, entonces denotamos por

$$MT + P = \varphi(MS), MS = \psi(MT + P) = \psi(MT) + \psi(P)$$

la aplicación de similitud entre ambos conjuntos. $\psi(P)$ debe pertenecer a alguna de las cuatro formas recién descritas, pero como segmento final de MS ésta sólo puede ser R_s; por consiguiente S debe tener último elemento s, y el conjunto correspondiente M_s se descompone de tal forma en $P_s + R_s$ que $R_s = \psi(P)$. Se escribe $S = S_1 + s$, tal que S_1 es la colección de los elementos de S hasta el último, entonces

$$MS = MS_1 + M_s = MS_1 + P_s + R_s = \psi(MT) + \psi(P),$$

por lo que

$$MS_1 + P_s = \psi(MT), \quad MT = \varphi(MS_1) + \varphi(P_s).$$

Exactamente en la misma forma se deduce que T tiene un último elemento t, de tal suerte que $M_t = P_t + R_t, R_t = \varphi(P_s)$ y con $T = T_1 + t$

$$MT_1 + P_t = \varphi(MS_1), \quad MS_1 = \psi(MT_1) + \psi(P_t).$$

[1] Schoenflies, Die Entwicklung der Lehre von Punktmannigfaltigkeiten, pág. 41, Teorema VII.

De esto se sigue que S_1 debe poseer un último elemento, y así sucesivamente: este proceso sin fin exige que en S exista una serie de elementos consecutivos $s > s_1 > s_2 > \cdots$, que en T exista una serie correspondiente $t > t_1 > t_2 > \cdots$, de tal forma que

$$P \simeq R_s, \quad P_t \simeq R_{s_1}, \quad P_{t_1} \simeq R_{s_2}, \ldots$$
$$P_s \simeq R_t, \quad P_{s_1} \simeq R_{t_1}, \quad P_{s_2} \simeq R_{t_2}, \ldots$$

Entonces el poceso sólo se interrumpe cuando en esta formación sucesiva de imágenes no queda ningún segemento inicial, así que en lugar de $P \simeq R$ se tendría alguna vez $P \simeq M$, lo cual es imposible por (a).

Ya que hemos supuesto que en S no existen tales series decrecientes de elementos comparables (no hay segmentos de tipo ω^*), hemos demostrado la imposibilidad de que MS y $MT + P$ sean similares.

Para demostrar la segunda parte de la afirmación i), supongamos que $MS \simeq MT$; sea $MT = \varphi(MS), MS = \psi(MT)$. Se desprende fácilmente que la imagen de un conjunto M_t debe ser otra vez un conjunto M_s, así que no se descompone en dos de tales conjuntos y tampoco está contenido en uno de ellos. Porque si tuviésemos $\psi(M_t) = R_{s_1}$, o $= R_{s_1} + P_s$ o $= R_{s_1} + M_s$, entonces el segmento inicial P_{s_1} sería otra vez la imagen de un resto R_{t_1}, el correspondiente P_{t_1} da lugar a su vez a un R_{s_2}, y así sucesivamente, de tal suerte que aparece otra vez la serie no acotada $s > s_1 > s_2 > \cdots$, que está excluida por hipótesis. Por tanto, $\varphi(M_s) = M_t$, $\psi(M_t) = M_s$, de donde se sigue que los elementos s, t están en una correspondencia biunívoca, que no trastorna el orden, es decir, $S \simeq T$.

k) *Si M, N son conjuntos estratificados, también el producto es un conjunto estratificado.*

Si A denota una sección de M, B una de N, entonces las secciones del conjunto producto MN son de la forma $MB + A$ o también, en el caso de que M tenga prime elemento, de la forma MB. Se observa que los conjuntos estratificados que tienen la propiedad exigida a S en i), no contiene un segmento de tipo ω^*, pues tal segmento no es estratificado por lo que según b) no puede aparecer an un conjunto estratificado. Por consiguiente, MN no es similar a una sección $MB + A$ y tampoco a una seción MB, porque según el segundo caso se deducría $N \simeq B$. Pero tampoco ningúna sección de MN es similara a otra. Entre $MB + A$ y MB' no puede haber similitud, entre MB y MB' sólo para $B \simeq B'$; finalmente, si $MB + A \simeq MB' + A'$, sin que fuese A' la imagen de A, A' tendría que ser la imagen de un segmento final de A (o recíprocamente) y si P denota al correspondiente segmento inicial de A, tendríamos $MB + P \simeq MB'$, lo cual es otra vez imposible. Se sigue de $MB + A \sim MB' + A'$ que A y A' se corresponden como imagen, además $MB \simeq MB'$, es decir $A \sim A'$, $B \simeq B'$, tal que las dos secciones nombradas de MN se relacionan al mismo elemento. Con esto queda demostrada nuestra afirmación.

§3

De acuerdo a f) k) los conjuntos estratificados conforman un "campo", un dominio cerrado respecto a las operaciones básicas (adición y multiplicación). Se pueden definir en este dominio la división y substracción con ciertas condiciones. De la ecuación $M + N = S$ se puede determinar en forma unívoca N, cuando M es un segmento inicial de S (véase e), mientras que una solución para M es en general múltiple, suponiendo que N es un segmento final de S; por ejemplo, entre los conjuntos bien ordenados la ecuación $\mu + \omega = \omega + \omega$ es soluble por $\mu = \omega, \omega + 1, \omega + 2,...$ Además, la ecuación $MN = T$, cuando T es de la forma aquí exigida, es soluble respecto a N (véase i), y tiene múltiple soluciones respecto a M; entre conjuntos bien ordenados, por ejemplo, la ecuación $\mu\omega = \omega^2$ tiene como una solución $\mu = \omega$, pero también la resuelve cada número transfinito del intervalo $\omega < \mu < \omega^2$.

“Subcampos”, es decir, aquellos subdominios de la colección de los conjuntos estratificados, que por sí mismos permanecen invariantes respecto a adición y multiplicación, se pueden construir en diversas formas. Uno de tales subdominios lo conforman los conjuntos bien ordenados, también los conjuntos estratificados que tienen primer elemento; lo mismo ocurre con los *conjuntos estratificados hacia adelante y hacia atras*. Un conjunto estratificado M se llama estratificado hacia adelante y hacia atras, cuando también el inverso M^* es estratificado. Ya que

$$(M + N)^* = N^* + M^*, \quad (MN)^* = M^*N^*,$$

la adición y la multiplicación de dos conjuntos estratificados hacia adelante y hacia atras conduce otra vez a uno de tales conjuntos.

De estos conjuntos se puede decir un poco más. Un conjunto estratificado hacia adelante y hacia atras no es similar a ninguno de sus segmentos (incluso a un segmento final), además ningún segmento final es similar a otro, y ningún segmento es similar a un segmento propio; no puede contener segmentos de tipo ω o ω^*. Si se coleccionan los sucesores inmediatos de un elemento en un grupo Q_n, este grupo es necesariamente finito; y los conjuntos $N = \{n\}$, que se originan al remplazar grupos finitos de conjuntos estratificados hacia adelante y hacia atras $M = \{Q_n\}$, no contienen dos elementos consecutivos n más, porque los grupos correspondientes Q_n se fusionarián en un sólo grupo. Así que N tiene un sólo elemento o es *denso en todas partes*, es decir, entre cualesquiera dos elementos de N existe, de acuerdo al orden, al menos otro elemento (por tanto, una cantidad infinita).

l) *Un conjunto estratificado hacia adelante y atras se origina, cuando no es finito, mediante el remplazo de conjuntos finitos en lugar de los elementos de un conjunto denso en todas partes.* Naturalmente, estos conjuntos finitos de deben elegir adecuadamente. Lo más adecuado sería, elegirlos distintos entre sí; en tal caso sería numerable el conjunto denso en todas partes, así similara a alguno de los tres tipos $\eta, 1 + \eta, \eta + 1, 1 + \eta + 1$, donde η es el único tipo denso en todas partes numerable sin primero o último elemento (véase la observación en la página 458). Así llegamos a la construcción de un conjunto estratificado en el segundo ejemplo; se pone el conjunto denso en todas partes $N = \{n\}$ en la forma de una serie simple $n_1n_2n_3\cdots$, por otro lado consideramos una serie creciente de números enteros positvos $a_1a_2a_3\cdots$ y se sustituye en N el lemento $n = n$, por un grupo finito A_n de elementos a_ν.

También se pueden construir conjuntos estrtificados hacia adelante y atras de la cardinalidad del *continuo*, donde donde seguramente los conjuntos finitos no pueden ser todos distintos, sino que al menos uno debe aparecer una cantidad *infinita* de veces (tantas como la cardinalidad del continuo). Sean x algún número real del intervalo $0 < x < 1$, excluyendo las fronteras, $X = \{x\}$ el continuo lineal, es decir, el conjunto de los números x ordenados según su magnitud, un conjunto cuyo tipo de orden λ es denso en todas partes. Entonces se cumple el teorema:

m) Si en X se sustituyen los elementos x por *conjuntos estratificados de la primera cardinalidad Q_x, de los cuales ninguno es siimlar a algún otro*, entonces se genera un conjunto estratificado $M = \{Q_x\}$.

Por todo lo anterior la demostración sólo requiere bosquejarse. Para cada aplicación de M sobre na de sus secciones la imagen de un conjunto Q_x debe ser uno de tales conjuntos, ya que sólo los segmentos Q_x y sus subsegmentos son de la primera cadinalidad, mientras que cada segmento mayor que Q_x

tiene la cardinalidad del continuo- Dado que además ningún Q_x es simila a otro, no se puede aplicar $M = A + R$ sobre A, porque el conjunto Q_x que aparece en R no tiene imagen en A. Igualmente se puede excluir de inmediato la similitud entre secciones A y A', cuando los elementos asociados m, m' pertenecen a conjuntos Q_x distintos; si pertenecen al mismo Q_x, la similitud $A \simeq A'$, tendría como consecuencia la similitud de ciertas secciones de A_x lo que estaría en oposición a la hipótesis de que Q_x es un conjunto estratificado.

Si en m) se elige como Q_x conjuntos estratificados hacia adelante y atras, también sera $M = \{Q_x\}$ uno de tales. Las hipótesis de m) se satisfacen, por ejemplo, si se asocia a cada valor de x una serie creciente de números enteros positivos $a_1 a_2 a_3 \cdots$, digamos mediante $x = (\frac{1}{2})^{a_1} + (\frac{1}{2})^{a_2} + (\frac{1}{2})^{a_3} + \cdots$, y como Q_x aquellos conjuntos estratificados hacia adelante y atras que se originan del conjunto R de los números racionales ordenados por magnitud al sustituir los elementos $r = r_\nu$ por elementos a_ν; ninguno de tales Q_x es similar a otro. El conjunto denso en todas partes N, del que se origina nuestro conjunto estratificado M al sustituir grupos *finitos*, es aquí el producto RX con tipo de orden $\eta\lambda$; tanto N como M tiene la cardinalidad del continuo.

Quizá resulta interesante conocer un conjunto estratificado hacia adelante y atras de cardinalidad $\aleph_1$ de la segunda clase (uno estratificado sólo hacia adelante lo conforma la segunda clase misma, la totalidad de los conjuntos bien ordenados, cuyos tipos spertenecen a la tercera clase). Con este fin sólo se requiere remplazar el continuo linear X del teoremam) por un tipo denso en todas partes $U = \{u\}$, que tanto él como sus segmentos tiene cardinalidad $\aleph_1$; si se sustituyen los elementos u por conjuntos estratificados numerables Q_u, que no sean similares entre sí, se genera un conjunto estratificado $M = \{Q_u\}$ de la segunda cadinalidad. Tales conjuntos U los proporcionan los números “ultraracionales” dados por F. Bernstein (Diss. pág. 52), es decir los grupos finitos de números de las primeras dos clases de números. Para ν finito arbitrario, sea $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu$ una colección de números dela primera o segunda clase (incluyendo en la primera el cero). Se escribe esto como una sucesión finita

$$u = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, 0, 0, 0 \ldots$$

y se transforma los u en la forma de un conjunto simple ordenado $U = \{u\}$, en el que se prescribe: sea $u < u'$, si, para algún μ finito, u y u' coinciden en las primeras $\mu - 1$ y $\alpha_\mu < \alpha'_\mu$. Considérese el elemento u'' que tiene las primeras μ posiciones iguales a las de u, pero $\alpha''_{\mu+1} > \alpha_{\mu+1}$, entonces $u < u'' < u'$, por consiguiente U es denso en todas partes, y ya que $\alpha''_{\mu+1}$ salvo un segmento, puede recorrer toda la segunda clase, el segmento entre u y u' de U no es numerable. Por otro lado U tiene la cardinalidad

$$\aleph_1 + \aleph_1^2 + \aleph_1^3 + \cdots = \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1,$$

por lo que U al igual que cualquiera de sus segmentos tiene la segunda cardinalidad $\aleph_1$.

La conclusión de la presente investigación, a la que espero regresar en otra oportunidad, logra una generalización del teorema de Cantor-Bernstein, de que el conjunto de los tipos de cardinalidad $\aleph_0$ (todos los tipos numerables) tiene la cardinalidad $2^{\aleph_0}$ (la cardinalidad del continuo).

n) Si M es un conjunto estartificado, cuya cardinalidad $\mathfrak{m}$ es igual a su cuadrado, entonces los tipos de orden de cardinalidad $\mathfrak{m}$ conforman un conjunto de cardinalidad $2^{\mathfrak{m}}$.

Esto se cumple, por ejemplo, para $\mathfrak{m} = \aleph =$ la cardinalidad del continuo, además para cada $\mathfrak{m}$ que aparece en la serie de los álef (respecto a esto Bernstein ha dado el teorema sin demostración pág. 40).

La demostración se obtiene de algunas observaciones sobre $2^{\mathfrak{m}}$. Esta potencia denota primero a la cardinalidad del conjunto de las funciones bivaluadas de los elementos m (de todas las “valuaciones” de

M con dos valores), es decir, $f(m) = \pm 1$, entonces la totalidad de las funciones $f(m)$ tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{m}}$. Cada una de tales funciones determina en forma unívoca e invertible los elementos p, para los que $f(p) = +1$; seguidamente $2^{\mathfrak{m}}$ también es la cardinalidad del conjunto $\{P\}$ de los subconjuntos P de M. De esto se sigue, por cierto, fcílmente[1] que $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$. Ya que cada elemento m es un P, $\{P\}$ contiene un subconjunto de cardinalidad $\mathfrak{m}$. Si tuviese $\{P\}$ mismo la cardinalidad $\mathfrak{m}$, se podría poner en la forma $\{P_m\} \sim \{m\}$, entonces se podría encontrar un nuevo P, distinto de los P_m, si se conforma P de todos los elementos p, que no aparecen en el correspondiente P_p, de tal forma que los conjuntos P y P_m no tienen en común al elemento m. Para lo siguiente necesitamos la observación de que también el conjunto $\{S\}$ de los subconjuntos S, equipotentes al conjunto total M, tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{m}}$. Ya que cada número cardinal transfinito es igual a su doble ($\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}$), se puede descomponer M en dos subconjuntos A, B de cardinalidad $\mathfrak{m}$; la totalidad de los subconjuntos de M, que consisten de A y de un subconjunto de B, tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{m}}$ y es una parte de $\{S\}$, como $\{S\}$ es a su vez una parte del conjunto $\{P\}$ de cardinalidad $2^{\mathfrak{m}}$; por el teorema de equivalencia $\{S\}$ tiene así la cardinalidad $2^{\mathfrak{m}}$.

La demostración del teorema n) se efectua en dos partes, de acuerdo el teorema de equivalencia; se debe mostrar que la carinalidad de la clase de tipos $[\mathfrak{m}]$ (el conjunto de los tipos de cardinalidad $\mathfrak{m}$) $\leq 2^{\mathfrak{m}}$, y entonces que ella es $\geq 2^{\mathfrak{m}}$. La primera parte se completa exactamente como lo hace F. Bernstein mediante una "función de orden". se considera la función bivaluada de parejas $f(m,n) = \pm 1$, y se establece que $f(m,n) = +1$ es equivalente con $m < n$, $f(m,n) = -1$ es equivalente con $m > n$. Cada tipo τ de cardinalidad $\mathfrak{m}$ se puede caracterizar en una cantidad infinita de formas mediante una de tales funciones de orden de las parejas de elementos de M. Recíprocamente no toda función $f(m,n)$ representa un tipo τ, para ello se requiere, en general, que $f(n,m) = -f(m,n)$ y que si $f(m,n) = f(n,p)$ también $f(m,n) = f(m,p)$. Si ocurren estas relaciones binarias y ternarias, entonces $f(m,n)$ representa a un tipo determinado τ. Seguidamente la colección de las funciones $f(m,n)$ cuya cardinalidad $2^{\mathfrak{mm}} = 2^{\mathfrak{m}}$, tiene un subconjunto de la cardinalidad de la clase tipo $[\mathfrak{m}]$; la cardinalida de esta clase tipo es $\leq 2^{\mathfrak{m}}$.

Para la segunda parte de la prueba echamos mano de la hipótesis de que M es estratificado; sea m un elemento de M, A_m la sección correspondiente a m, $S = \{s\}$ un subconjunto de M equivalente con M. Además sea R un conjunto no estratificado, para el cual ninguno de sus segmentos iniciales o finales es estratificado; escogemos en particular que R sea numerable y denso en todas partes de tipo η. Consideremos el conjunto ordenado $T = \{R + A_s\}$, que se origina de S cunado se sustituye cada elemento s por el conjunto ordenado $R + A_s$. La cardinalidad de $R + A_s$ es $\leq \aleph_0 + \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, así que la cardinalidad de T está (ya que S tiene cardinalidad $\mathfrak{m}$) entre $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$, es decir T es un conjunto ordenado de cardinalidad $\mathfrak{m}$, su tipo τ pertenece a la clase de tipos $[\mathfrak{m}]$. Ahora se debe mostrar que estos tipos τ son distintos entre sí, esto es, que T y T' no pueden ser similares entre sí, cuando S y S' son distintos. Esto se basa en la estructura particular de T, por medio de la cual los segmentos A_s no se mezclan con su entorno, si no que se destacan como conjuntos *estratificados*, mientras que cada segmento que extiende a A_s no es estratificado. Así si dos conjuntos de la forma T son similares entre sí, los segmentos completos A_s deben corresponderse como imágenes. Pero si S y S' son distintos, existe al menos un elemento m, que pertenece a S pero no a S' (o viceversa), y que entonces al segmento $R + A_m$ contenido en T no le corresponde nada similar en T'. Por consiguiente, la relación entre S y T es unívocamente inveible, y la clase de tipos $[\mathfrak{m}]$ contiene un conjunto $\{T\} \sim \{\tau\}$ equivalente a $\{S\}$,

[1] Véase Cantor, Berichte d. D. M. V. I, pág. 77, además Schoenflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmanigfaltigkeiten pág. 26, Teorema VII.

es decir, un subconjunto de cardinalidd $2^{\mathfrak{m}}$; la cardinalidad de la clase de tipos $[\mathfrak{m}]$ es $\geq 2^{\mathfrak{m}}$. Con esto queda demostrado el teorema n).

Listo para impresión el 12.XII.1901