XVI

Ideales en campos completos de conjuntos I.

Título original: Ideale in vollständigen Mengenkörpern I.
Von Alfred Tarski
Fundamenta Mathematicae (1939), 45-63 **32**(1939), 45-63.

Un sistema de conjuntos cerrado respecto a la suma y substracción se llama, como es sabido, cuerpo de conjuntos o simplemente un cuerpo; un cuerpo, que consiste en los subconjuntos de un conjunto dado, aquí será llamado completo. Por un ideal en un cuerpo dado entendemos cualquier subsistema del cuerpo no vacío, herditario y aditivo.

Uno encuentra ejemplos importantes de ideales tanto en la teoría general de conjuntos, como en distintas aplicaciones de la misma, en particular en la teoría de la medida y en la topología. Así, por ejemplo, podemos distinguir en cada cuerpo el ideal de los conjuntos finitos, respectivamente a lo más numerables; los conjuntos de medida cero (según Peano-Jordan o Lebesgue) conforman un ideal en el cuerpo de los conjuntos medibles; los conjuntos densos en ninguna parte, respectivamente los conjuntos de la primera categoría de un espacio topológico dan lugar a un ideal en el cuerpo completo que consiste en los conjuntos de este espacio.

Independientemente de las aplicaciones, la noción de ideal se abre paso, cuando consideramos la teoría de los cuerpos de conjuntos como una realización de las álgebras booleanas formales y estas últimas como una parte del álgebra abstracta general;[2] el destacado papel del concepto de ideal en las investigaciones algebraicas modernas es un hecho bien conocido.

En el presente trabajo nos ocuparemos mayormente de ideales en cuerpos completos (aunque, cuando sea posible, presentaremos los resultados en una forma más general y los trasladaremos a cuerpos arbitrarios). Consideramos algunas clases importantes de ideales, a saber, los ideales principales, los ideales $\mathfrak{m}$-aditivos, los ideales primos y los ideales $\mathfrak{p}$-saturados (esta última noción, que es una generalización del concepto de ideal primo, parece que es aquí donde por primera vez se trata); damos propiedades características de este tipo de ideales e investigamos como se relacionan entre sí, así como los métodos que se pueden emplear para construirlos. [3]

[2]Véase M. H. Stone, Trans. Am. Math. Soc. **40**(1936), págs. 37 y siguientes (donde también se da literatura adicional); A. Tarski, Ann. Soc. Pol. Math. **15**(1937), págs. 186 y siguientes.

[3]Las nociones de ideal $\mathfrak{m}$-aditivo y $\mathfrak{p}$-saturado las definí en mi comunicación en los C. R. Soc. Sc. Vars. **30**(1937),

Pero en primera instancia nos interesa el problema de la cardinalidad, es decir, cuestiones de la forma: ¿cuántos ideales de este o aquel tipo existen en el cuerpo dado? Para cuerpos completos se ha resuelto este problema casi totamente. Los teoremas fundamentales sobre la cantidad de ideales $\mathfrak{m}$-aditivos o arbitrarios los presenté en mi trbajo previo: *Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations elémentaires*, Fund. Math. **16**(1930), págs. 181 y siguientes, sin utilizar la forma algebraica de expresarse (en lo sucesivo se cita este trabajo como *Classes closes...*). Aquí formularemos otra vez los teoremas mencionados junto con nuevos resultados, que conciernen a ideales primos y $\mathfrak{p}$-saturados.

El trabajo comienza con observaciones auxiliares de la aritmética de números cardinales. En la investigación propiamente sobre ideales, confrontamos algunos teoremas de la teoría de conjuntos que parecen no tener nada que ver con la teoría de ideales, por ejemplo, teoremas sobre sistemas de conjuntos independientes[1] lo mismo que resultados de mi artículo: *Drei Überdeckungssätze der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math. **30**(1938), págs. 132 y siguientes (que en lo sucesivo se cita como Überdeckeungssätze...). Para concluir daremos algunas aplicaciones al problema abstracto de medida y a la topología general; se calculará, entre otras cosas, la cantidad de medidas finito aditivas en un conjunto arbitrario, y para cada cardinal infinito $\mathfrak{t}$ construiremos espacios 0-dimensionales de cardinalidad $2^{2^{\mathfrak{t}}}$, con $\mathfrak{t}$ puntos aislados y en los que el conjunto de puntos aislados es denso.[2]

§1. Nociones auxiliares y lemas de la aritmética cardinal.

Definición 1.1. Para cada número cardinal $\mathfrak{m}$ se denota mediante $\mathfrak{m}^+$ el menor cardinal $> \mathfrak{m}$.

Corolario 1.2. *Si $\mathfrak{m} < \aleph_0$, entonces $\mathfrak{m}^+ = \mathfrak{m} + 1$; si $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$, entonces $\mathfrak{m}^+ = \aleph_{\alpha+1}$.*

[Por 1.1].

Definición 1.3. Si $\mathfrak{m}$ es un número cardinal arbitrario, denotamos con $\mathfrak{m}^*$ el menor cardinal $\mathfrak{n}$ que satisface la siguiente condición: $\mathfrak{m}$ se puede representar en la forma $\mathfrak{m} = \sum_{n\in N} \mathfrak{X}_n$, donde $|N| = \mathfrak{n}$ y $\mathfrak{X}_n < \mathfrak{m}$ para cada $n \in N$.

Corolario 1.4. *Siempre ocurre $\mathfrak{m}^* \leq \mathfrak{m}$. Si $\mathfrak{m} \leq 2$, entonces $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}$; si $2 \leq \mathfrak{m} < \aleph_0$, entonces $\mathfrak{m}^* = 2$; si $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$, entonces $\mathfrak{m}^* = \aleph_{cf(\alpha)}$; en particular, si $\mathfrak{m} = \aleph_0$ o $\mathfrak{m} = \aleph_{\alpha+1}$, entonces $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}$.*

[Por 1.3].

págs. 160 y siguientes; las definiciones ahí dadas no son totalmente equivalentes con las de aquí. En la comunicación citada dí algunos de los resultados (y de hecho en una forma más general, pues ahí no tratamos con cuerpos completos, sino $\mathfrak{m}$-aditivos), sin demostración, aquí expuestos en lo sucesivo.

[1] Véase los lemas dados más adelante 2.25 y 3.16, así como la observación 3.17.

[2] El Sr. Stone llamó mi atención a los resultados topológicos estrechamente relacionados (aunque en una forma distinta) contenidos en los trabajos de E. Čech, Ann. of Math. **38**(1937), págs. 823 y siguientes, y B. Pospišil, ibid., págs. 845 y siguientes.

$cf(\alpha)$ denota, como es usual, al índice del menor número inicial, con él que ω_α es cofinal; véase, por ejemplo, *Classes closses...*, págs. 184 y siguientes (definición 2, lemas 1-3).

Corolario 1.5. *Si* $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, *entonces* $(\mathfrak{m}^+)^* = \mathfrak{m}^+$.

[Por 1.2, 1.4].

Observación 1.6. Un número $\mathfrak{m} \neq 0$, que no es de la forma $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^+$, se llama un número límite. Un número $\mathfrak{m}$ se llama regular o singular de acuerdo a si $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}$ o $\mathfrak{m}^* < \mathfrak{m}$.

Teorema 1.7. *Si* $\mathfrak{m} \geq 2$, *entonces* $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}^{\mathfrak{m}^*}$ *y, en general,* $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ *para cada* $\mathfrak{n} \geq \mathfrak{m}^*$.
Este es un resultado conocido de Zermelo.[1]

Teorema 1.8. *Si* $0 < \mathfrak{n} < \mathfrak{m}^*$, *entonces ocurre* $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{m}$ *o* $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \sum_{\mathfrak{x}<\mathfrak{m}} \mathfrak{X}^{\mathfrak{n}}$*; si además,* $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, *se cumple* $\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cdot \sum_{\mathfrak{x}<\mathfrak{m}} \mathfrak{X}^{\mathfrak{n}}$.
Demostración. El teorema se deduce fácilmente de dos fórmulas conocidas:[2]

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \qquad \text{para } \alpha \text{ y } \beta \text{ arbitrarios.}$$
$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \sum_{\xi<\alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\beta}, \quad \text{cuando } \alpha \text{ es un número límite y } \beta < cf(\alpha).$$

Definición 1.9. Si $\mathfrak{m}$ *y* $\mathfrak{n}$ *son dos números cardinales, denotamos la suma* $\sum_{\mathfrak{x}<\mathfrak{n}} \mathfrak{m}^{\mathfrak{x}}$ *con* $\mathfrak{m}^{\overset{\mathfrak{n}}{\smile}}$.

En *Classes closes...* (véase págs. 188 y siguientes, lemas 5-9) se dan diversas propiedades de la operación $\mathfrak{m}^{\overset{\mathfrak{n}}{\smile}}$. Para las consideraciones presentes, los siguientes teoremas son significativos:

Teorema 1.10. $\mathfrak{m}^{\overset{0}{\smile}} = 0$, $\mathfrak{m}^{\overset{1}{\smile}} = 1$*; si* $\mathfrak{n} \geq 2$, *entonces* $\mathfrak{m}^{\overset{\mathfrak{n}}{\smile}} \geq \mathfrak{m}$*; si* $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ *y* $2 \leq \aleph_0$, *entonces* $\mathfrak{m}^{\overset{\mathfrak{n}}{\smile}} = \mathfrak{m}$.

[Por 1.9].

Teorema 1.11. *Si* $\mathfrak{m}^{\overset{\mathfrak{n}}{\smile}} = \mathfrak{m}$ *y* $\mathfrak{n}^* < \mathfrak{n}$, *entonces* $\mathfrak{m}^{\overset{\mathfrak{n}^+}{\smile}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$.
Este teorema sedemostró (con otra formulación) en *Classes closes...*, lema 4b, págs. 187 y siguientes.

Teorema 1.12. *Si* $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}^*$, *entonces* $\mathfrak{m}^{\overset{\mathfrak{n}}{\smile}} > \mathfrak{m}$.

[Por 1.7, 1.9].

[1]Véase, por ejemplo, A. Schoenflies, *Entwiclung der Mengenlehre un ihrer Anwendungen*, Leipzig y Berlín 1913, págs. 66 y siguientes.
[2]La primera de estas fórmulas se origina por Hausdorff, la segunda por el autor; véase A. Tarski, Fund. Math. 7(1925), págs. 1 y siguientes.

Teorema 1.13. *Si* $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, *entonces* $(2^{\underset{\smile}{\mathfrak{m}}})^{\mathfrak{n}} = 2^{\underset{\smile}{\mathfrak{m}}}$ *para* $1 \leq \mathfrak{n} < \mathfrak{m}^*$ *y* $(2^{\underset{\smile}{\mathfrak{m}}})^{\underset{\smile}{\mathfrak{n}}} = 2^{\underset{\smile}{\mathfrak{m}}}$ *para* $2 \leq \mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}^*$.

Para una demostración véase *Classes closes...*, Lemas 7a y 8a, págs. 190 y siguientes.

Teorema 1.14. *Si* $\mathfrak{m} \neq 2$, *entonces (i)* $2^{\underset{\smile}{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{m}$ *ocurre si y sólo si (ii) no existe un número* $\mathfrak{n}$ *para el que* $\mathfrak{n} < \mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{n}}$. *Cada condición (i), (ii) tiene como consecuencia que: (iii) las fórmulas* $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}^*$ *y* $\mathfrak{m}^{\underset{\smile}{\mathfrak{n}}} > \mathfrak{m}$ *son equivalentes para todo* $\mathfrak{n}$.

Demostración. Podemos suponer que $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, de lo contrario la demostración es trivial. La equivalencia de (i) y (ii) se obtiene fácilmente por 1.9. Suponiendo la validez de (i), de 1.10 y 1.13 obtenemos: $\mathfrak{m}^{\underset{\smile}{\mathfrak{n}}} \leq \mathfrak{m}$ para cada $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}^*$. De esto por contrapositiva: si $\mathfrak{m}^{\underset{\smile}{\mathfrak{n}}} > \mathfrak{m}$, entonces $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}^*$; ya que la implicación inversa en 1.12 se ha propuesto, las fórmulas: $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}^*$ y $\mathfrak{m}^{\underset{\smile}{\mathfrak{n}}} > \mathfrak{m}$ son equivalentes para cada $\mathfrak{n}$. Con esto concluye la prueba.

Observación 1.15. Se puede demostrar que las condiciones (i)-(iii) de 1.14 son equivalentes, cuando $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ no es un número límite. De esto se sigue fácilmente la equivalencia de las tres afirmaciones:

Se cumple (i), respectivamente (ii), respectivamente (iii) para cada número cardinal $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$.

Cada una de estas tres afirmación representa una reformulación equivalente de la hípotesis álef de Cantor:

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \text{ para cada número ordinal } \alpha.$$

Aún sin la hipótesis de Cantor se puede mostrar que existen números límite $\mathfrak{m}$ que satisfacen las condiciones (i)-(iii) de 1.14; el menor entre ellos es $\aleph_0$, el siguiente es $\aleph_0 + 2^{\aleph_0} + 2^{2^{\aleph_0}} + \cdots$

Véase para ello *Classes closes..., págs. 193 y siguientes y 286.*

Teorema 1.16. Si M es un conjunto de cardinalidad $\mathfrak{m}$ *y* $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}^+$, *entonces la cardinalidad del sistema* $E_X[X \subset M$ *y* $|X| < \mathfrak{n}]$ *es igual a* $\sum_{\mathfrak{x}<\mathfrak{n}} \binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{x}}$ *o igual a* $\mathfrak{m}^{\underset{\smile}{\mathfrak{n}}}$, *según se tenga* $\mathfrak{m} < \aleph_0$ *o* $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$.

Para una demostración véase *Classes closes...*, págs. 195 y siguientes, lema 10b.

El símbolo $\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{x}}$ denota, como es usual, el $(\mathfrak{X} + 1)$-coeficiente en el desarrollo binomial de $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^{\mathfrak{m}}$. Con $E_x[B(x)]$ representamos el conjunto de cosas x, que satisfacen la condición $B(x)$. También usaremos el símbolo más general $E_{f(x)}[B(x)]$, y a saber, para denotar al conjunto de valores de la función $f(x)$, asociados al argumento x y que satisfacen la condición $B(x)$.

Definición 1.17. Diremos que el número cardinal $\mathfrak{n}$ *es fuertemente, repectivamente débilmente, accesible por el número cardinal* $\mathfrak{m}$, *cuando* $\mathfrak{n}$ *pertenece a cualquier sistema* $\mathfrak{K}$ *de números cardinales, que satisfagan las siguientes condiciones (i)-(iii) y (iv), respectivamente (v): (i)* $\mathfrak{m} \in \mathfrak{K}$; *(ii) si* $\mathfrak{p} \in \mathfrak{K}$ *y* $\mathfrak{p} \geq \mathfrak{q}$, *entonces* $\mathfrak{q} \in \mathfrak{K}$; *(iii) si* $|P| = \mathfrak{p} \in \mathfrak{K}$ *y* $\mathfrak{X}_p \in \mathfrak{K}$ *para cada* $p \in P$, *entonces también* $\sum_{p \in P} \mathfrak{X}_p \in \mathfrak{K}$; *(iv) si* $\mathfrak{p} \in \mathfrak{K}$, *también ocurre* $\mathfrak{p}^+ \in \mathfrak{K}$; *(v) si* $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathfrak{K}$, *entonces* $\mathfrak{p}^{\mathfrak{q}} \in \mathfrak{K}$.

Sobre esta definición y la cuestión de la relación entre números accesibles débiles y fuertes véase *Überdeckungssätze...*, págs. 132 y siguientes.

Teorema 1.18. *Si* $\mathfrak{m}$ *es un número cardinal arbitrario, entonces el sistema* $\mathfrak{K}$ *de los* $\mathfrak{m}$ *que son accesibles fuertes, respectivamente débiles, satisface las condiciones (i)-(iii) y (iv), respectivamente (i)-(iii) y (v), de la defínción 1.17.*

[Por 1.17.]

Teorema 1.19. *Si $\mathfrak{m} < \aleph_0$ y $\mathfrak{n}$ es accesible fuerte (o débil) por $\mathfrak{m}$, entonces $\mathfrak{n} < \aleph_0$.*

Demostración. Basta observar que el sistema $\mathfrak{K}$ de los cardinales finitos satisfacen las condiciones (i)-(v).

Teorema 1.20. Si $\mathfrak{n}$ es accesible fuerte por $\mathfrak{m}$, y además $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$ y no existe ningún número $\mathfrak{p}$, para el que $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^+$, entonces $\mathfrak{n}^* < \mathfrak{n}$.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{n}$; así que $\mathfrak{n}$ es un número límite regular $> \mathfrak{m}$ (véase 1.6). Entonces existe un número límite regular, el menor posible, $\mathfrak{n}_0 > \mathfrak{m}$. Sea $\mathfrak{K}$ el sistema de los números $\mathfrak{p} < \mathfrak{n}_0$. Con ayuda de 1.1 y 1.3 se muestra fácilmente que $\mathfrak{K}$ satisface las condiciones (i)-(iv) de 1.17. Por consiguiente, $\mathfrak{n} \in \mathfrak{K}$ y $\mathfrak{n} < \mathfrak{n}_0$, que se opone a nuestra hipótesis (y a la definición de $\mathfrak{n}_0$). Por tanto, $\mathfrak{n}^* \neq \mathfrak{n}$; por 1.4 $\mathfrak{n}^* < \mathfrak{n}$, l.q.q.d.

§2. Ideales, en particular ideales principales, e ideales $\mathfrak{m}$-aditivos.

Si M es un sistema arbitrario de conjuntos, denotamos con $\sum(M)$ la suma y con $\Pi(M)$ la intersección de los conjuntos del sistema. Igualmente usaremos los símbolos genéricos: $\sum_{x\in X} F(x)$ y $\Pi_{x\in X}F(x)$ en su significado usual.

Definición 2.1. Un sistema no vacío de conjuntos $\mathbf{K}$ es llamado un cuerpo de conjuntos o simplemente cuerpo, cuando para cada conjuntos X, Y, su suma y diferencia $X - Y$ también pertenecen a $\mathbf{K}$.
Un cuerpo de conjuntos $\mathbf{K}$ se llama completo, cuando consiste en los subconjuntos de un conjunto M.

Definición 2.2 Si $\mathbf{K}$ es un cuerpo, un conjunto $X \in \mathbf{K}$ no vacío se llama átomo (o conjunto atómico) en $\mathbf{K}$, en símbolos $X \in At(\mathbf{K})$, cuando no existe ningún conjunto distinto de 0 o X con $Y \subseteq X$ que pertenezca a $\mathbf{K}$.
$At(\mathbf{K})$ denota al sistema de todos los átomos de $\mathbf{K}$.

Corolario 2.3 *Si $\mathbf{K}$ es un cuerpo completo, entonces*

$$\mathbf{K} = \underset{X}{E}[X \subset \sum(\mathbf{K})] \quad y \quad At(\mathbf{K}) = \underset{\{x\}}{E}[x \in \sum(\mathbf{K})].$$

[Por 2.1, 2.2].

Definición 2.4. Si $\mathbf{K}$ es un cuerpo, entonces un sistema no vacío $\mathbf{I} \subset \mathbf{K}$ se llama ideal (en $\mathbf{K}$), en símbolos $\mathbf{I} \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$, cuando para cualesquier conjuntos X, Y en $\mathbf{I}$, su suma $X + Y$ pertenece a $\mathbf{I}$ y para cada conjunto X en $\mathbf{I}$ todo conjunto $Y \subseteq X$ es un elemento de $\mathbf{I}$.

Corolario 2.5. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo e* $\mathbf{I} \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$*, entonces* $\sum(X) \in \mathbf{I}$ *para cada sistema finito* $X \subseteq \mathbf{I}$*; en particular* $0 \in \mathbf{I}$.

[Por 2.1,2.4].

Corolario 2.6. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo, entonces* $\mathbf{K} \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$*; si* $\mathbf{K}$ *es completo (o, en general, si* $\sum(\mathbf{K}) \in \mathbf{K}$*), entonces* $\mathbf{K}$ *es el único ideal* $\mathbf{I}$*, para el que* $\sum(\mathbf{K}) \in \mathbf{I}$.

[Por 2.1, 2.4].

Corolario 2.7. *Sea* $\mathbf{K}$ *un cuerpo,* $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{K}$ *e* $\mathbf{I}$ *el sistema de conjuntos* $X \in \mathbf{K}$ *para el que exista un sistema finito* $\mathbf{Y} \subseteq S$ *tal que* $X \subseteq \sum(\mathbf{Y})$*. Entonces* $\mathbf{I} \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$*, y de hecho,* $\mathbf{I}$ *es el menor ideal* $\supset \mathbf{S}$.

[Por 2.1, 2.4].

Definición 2.8. Si $\mathbf{K}$ *es un cuerpo, un ideal* $\mathbf{I}$ *es un ideal principal (en* $\mathbf{K}$*), en símbolos* $\mathbf{I} \in \mathcal{H}(\mathbf{K})$*, si* $\mathbf{I}$ *consiste en todos los conjuntos* $X \in \mathbf{K}$ *que están contenidos en un conjunto* $M \in \mathbf{K}$.

Corolario 2.9. *Para cada cuerpo* $\mathbf{K}$ *las siguientes condiciones son equivalentes: (i)* $\mathbf{I} \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$*; (ii)* $\mathbf{I} \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$ *y* $\sum(\mathbf{I}) \in \mathbf{I}$*; (iii)* $\mathbf{I} = E_X[X \in \mathbf{K}$ *y* $X \subset \sum(\mathbf{I})]$*, donde* $\sum(\mathbf{I}) \in \mathbf{K}$.

[Por 2.4, 2.8].

El objetivo principal de la presente investigaciones se puede precisar de la siguiente forma: determinar la cardinalidad del sistema $\mathcal{I}(\mathbf{K})$ y ciertos subsistemas particulares de $\mathcal{I}(\mathbf{K})$, por ejemplo $\mathcal{H}(\mathbf{K})$, suponiendo que es conocida la cardinalidad del cuerpo $\mathbf{K}$ y del conjunto $\sum(\mathbf{K})$ (en cuerpos completos basta considerar la cardinalidad de $\sum(\mathbf{K})$, ya que claramente $|\mathbf{K}| = 2^{|\sum(\mathbf{K})|}$) Cuando se trata de cuerpos generales, sólo se pueden dar ciertas restricciones triviales para las cardinalidades buscadas:

Teorema 2.10. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo,* $|\mathbf{K}| = \mathfrak{q}$ *y* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t}$*, entonces* $|\mathcal{H}(\mathbf{K})| = \mathfrak{q} \leq 2^{\mathfrak{t}}$ *y* $\mathfrak{q} \leq |\mathcal{I}(\mathbf{K})| \leq 2^{\mathfrak{q}} \leq 2^{2^{\mathfrak{t}}}$.

[Por 2.4, 2.9].

Definición 2.11. Si $\mathbf{K}$ *es un cuerpo y* $\mathfrak{m}$ *es un cardinal arbitrario, un ideal* $\mathbf{I}$ *en* $\mathbf{K}$ *es llamado* $\mathfrak{m}$*-aditivo, en símbolos* $\mathbf{I} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$*, si* $\mathbf{I}$ *contiene junto con todos los conjuntos de un sistema* X *de cardinalidad* $|X| < \mathfrak{m}$ *a su suma* $\sum(X)$ *como elemento.*

Corolario 2.12. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo, entonces* $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \subset \mathcal{I}(\mathbf{K})$ *para* $\mathfrak{m}$ *arbitrario y* $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \supset \mathcal{H}(\mathbf{K})$ *para* $\mathfrak{m}$ *arbitrario y* $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) = \mathcal{H}(\mathbf{K})$ *para* $\mathfrak{m} > |\sum(\mathbf{K})|$.

Demostración. El teorema se obtiene fácilmente de 2.5, 2.8 y 2.11; sólo la derivación de la inclusión $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \subset \mathcal{H}(\mathbf{K})$ para $\mathfrak{m} > |\sum(\mathbf{K})|$ (en la segunda parte del teorema) puede ofrecer dificultades. Entonces sea $\mathbf{K}$ un cuerpo completo, $\mathfrak{m} > |\sum(\mathbf{K})|$ e $\mathbf{I} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$. Claramente a cada elemento $x \in \sum(\mathbf{I})$ se le puede asociar un conjunto $F(x)$, al que $x \in F(x) \in I$. Hacemos $\mathbf{X} = \mathrm{E}_{F(x)}[x \in \sum(\mathbf{I})]$. Evidentemente $\sum(\mathbf{X}) = \sum(\mathbf{I})$, $\mathbf{X} \subset \mathbf{I}$ y $|\mathbf{X}| \leq |\sum(\mathbf{I})| \leq |\sum(\mathbf{K}) < \mathfrak{m}$. Por la definición 2.11 también ocurre $\sum(\mathbf{X}) = \sum(\mathbf{I}) \in \mathbf{I}$, por lo que de 2.9, $\mathbf{I} \in \mathcal{H}(\mathbf{K})$, l.q.q.d.

Teorema 2.13. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo finito,* $\mathcal{F}(\mathbf{K}) = \mathcal{H}(\mathbf{K}) = \mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$ *para cada número* $\mathfrak{m}$.

[Por 2.4, 2.5, 2.9, 2.12].

Teorema 2.14. *Si* $\mathbf{K}$ *un cuerpo y* $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{n}$, *entonces* $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \subset \mathcal{A}_{\mathfrak{n}}(\mathbf{K})$.

[Por 2.11].

Teorema 2.15. *Sea* $\mathbf{K}$ *un cuerpo y* $\mathfrak{m}$ *un número que no es de la forma* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^+$. *Si* $\mathbf{I} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{n}}(\mathbf{K})$ *para cada* $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$, *entonces* $\mathbf{I} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$.

[Por 1.1, 2.11].

Teorema 2.16. *Sean* $\mathbf{K}$ *un cuerpo arbitrario,* $\mathfrak{m} = \sum_{n \in N} \mathfrak{X}_n$ *y* $N = \mathfrak{n}$. *Si* $\mathbf{I} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{n}^+}(\mathbf{K})$ *e* $\mathbf{I} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{X}_n^+}(\mathbf{K})$ *para cada* $n \in N$, *entonces* $I \in \mathcal{A}_{\mathfrak{m}^+}(\mathbf{K})$.

[Por 11, 2.11].

Corolario 2.17. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo arbitrario y* $\mathfrak{m}^* < \mathfrak{m}$, *entonces* $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}^+}(\mathbf{K}) = \mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$.

[Por 1.1, 1.3, 2.14, 2.16].

El siguiente teorema es una generalización de 2.7:

Teorema 2.18. *Sean* $\mathbf{K}$ *un cuerpo,* $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m} \geq \aleph_0$, $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{K}$ *e* $\mathbf{I}$ *el sistema de aquellos conjuntos* $X \in \mathbf{K}$ *para los que existe un sistema* $\mathbf{Y} \subset \mathbf{S}$ *con* $|\mathbf{Y}| < \mathfrak{m}$ *tal que* $X \subset \sum(\mathbf{Y})$. *Entonces* $\mathbf{I} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$, *y de hecho* $\mathbf{I}$ *es el menor ideal* $\supset \mathbf{S}$ $\mathfrak{m}$*-aditivo.*

La prueba no tiene dificultades; véase, por ejemplo, la demostración del lema 10 en *Überdeckungssätze...*, p. 143.

Observación 2.19. 1.5 y 2.17 aclaran que el teorema 2.18 sigue siendo válido cuando se sustituyen en él las fórmulas $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}$ por $\mathfrak{m}^* < \mathfrak{m}$ y simultáneamente $|\mathbf{Y}| < \mathfrak{m}$ por $|\mathbf{Y}| \leq \mathfrak{m}$.

Para determinar la cardinalidad del sistema $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$ de un cuerpo completo $\mathbf{K}$ debemos distinguir tres casos: $\mathfrak{m} > \mathfrak{t} = |\sum(\mathbf{K})|$, $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{t} < \mathfrak{t}^{\underset{\smile}{\mathfrak{m}}}$ (por 1.10 $t > \mathfrak{t}^{\underset{\smile}{\mathfrak{m}}}$ se cumple si y sólo si $\mathfrak{m} \leq 1$; prescindimos de este caso trivial considerando 2.12). En el primero, y con una hipótesis adicional también en el segundo caso, la cardinalidad de $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$ es "pequeña", y de hecho es igual a la cardinalidad de $\mathbf{K}$ (teoremas 2.20 y 2.23); esto se cumple también, cuando $\mathbf{K}$ es finito y $\mathfrak{m}$ arbitrario (2.21). En el tercer caso, suponiendo $\mathbf{K}$ infinito, la cardinalidad investigada es "grande": $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$ es equipotente al sistema de los subsistemas de $\mathbf{K}$; esto compete también al sistema $\mathcal{I}(\mathbf{K})$ (teoremas 2.28, 2.29).

Teorema 2.20. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo,* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t}$ *y* $\mathfrak{m} > \mathfrak{t}$, *entonces* $|\mathcal{H}(\mathbf{K})| = |\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})| = 2^{\mathfrak{t}}$.

[Por 2.10, 2.12].

Corolario 2.21. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t} < \aleph_0$, *y* $\mathfrak{m}$ *es arbitrario, entonces* $|\mathcal{I}(\mathbf{K})| = |\mathcal{H}(\mathbf{K})| = |\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})| = 2^{\mathfrak{t}}$.

[Por 2.13,2.20].

Teorema 2.22. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo,* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t} \geq \aleph_0$ *y* $\mathfrak{m} < \mathfrak{t}^*$, *entonces* $2^{\mathfrak{t}} \leq |\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})| \leq 2^{2^{\underset{\smile}{\mathfrak{t}}}}$.

La demostración, un tanto complicada, de este teorema se encuentra en *Classes closes...,* págs. 277-283 (teorema 70b).

Corolario 2.23. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo,* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t} = 2^{\underset{\smile}{\mathfrak{t}}} \geq \aleph_0$ *y* $\mathfrak{t}^{\underset{\smile}{\mathfrak{m}}} > \mathfrak{t}$ *(respectivamente,* $\mathfrak{m} > \mathfrak{t}^*$*), entonces* $|\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})| = 2^{\mathfrak{t}}$.

[Por 1.14, 2.22].

Observación 2.24. De 2.22 y 2.23 se deduce lo siguiente: si se supone la validez de la hipótesis del álef de Cantor o al menos se supone que el número $\mathfrak{t} = |\sum(\mathbf{K})|$ no contradice esa hipótesis (es decir, $2^{\underset{\smile}{\mathfrak{t}}} = \mathfrak{t}$), entonces en el caso $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{t} < \mathfrak{t}^{\underset{\smile}{\mathfrak{m}}}$ se puede determinar exactamente la cardinalidad del sistema $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$; en otros casos sólo se pueden establecer ciertas cotas y se debe sustituir ahí la fórmula $\mathfrak{t} < \mathfrak{t}^{\underset{\smile}{\mathfrak{m}}}$ por la lógicamente más fuerte $\mathfrak{m} > \mathfrak{t}^*$ (véase 1.12, 1.14 y 1.15). La posibilidad de completar en este punto lo que ahora sabemos parece muy pequeña; véase *Classes closes...*, págs. 285 y siguientes.

Lema 2.25.*Sea* $\mathbf{K}$ *un cuerpo completo,* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t} \geq \aleph_0$ *y* $\mathfrak{t}^{\underset{\smile}{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{t}$. *Entonces existe un sistema* $\mathbf{S} \subset \mathbf{K}$ *de cardinalidad* $2^{\mathfrak{t}}$ *que satisface la siguiente condición:*

(i) *si* $X \in \mathbf{S}$, $\mathbf{Y} \subset \mathbf{S}$, $|\mathbf{Y}| < \mathfrak{m}$ *y* $X \notin \mathbf{Y}$, *entonces* $X \nsubseteq \sum(\mathbf{Y})$.

Demostración. Este lema se demostró *Classes closes...*, págs. 259 y siguientes (lema 58); en vista de la demostración del teorema 3.16 abajo, vale la pena bosquejar las ideas de la prueba.

En virtud de $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t} \geq \aleph_0$ se cumple $\mathfrak{t} = 2 \cdot \mathfrak{t}$ y el conjunto $\sum(\mathbf{K})$ se puede descomponer en dos subconjuntos ajenos: $\sum(\mathbf{K}) = A + B$, tales que $|A| = |B| = \tau$. Sea f una función que aplica A sobre B unívoca. Denotemos con T el sistema de los conjuntos de la forma $X + (B - \mathrm{E}_{f(x)}[x \in X])$; entonce se cumple, como es fácil mostrar:

(1) $\mathbf{T} \subset \mathbf{K}$ y $|\mathbf{T}| = 2^{\mathfrak{t}}$;

(2) si $X, Y \in \mathbf{T}$ y $X \neq Y$, entonces $X \nsubseteq Y$.

A cada conjunto X le asociamos el conjunto (mas exactamente: el sistema de conjuntos) $X^{\times}$, determinado por la fórmula:

(3) $X^{\times} = \mathrm{E}_U[U \subset X \text{ y } |U| < \mathfrak{m}]$.

En particular, al conjunto $\sum(\mathbf{K})$ le asociamos $(\sum(\mathbf{K}))^{\times}$, cuya cardinalidad es igual a $\mathfrak{t}^{\underline{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{t}$ según (3) y 1.16. Sea $\mathcal{H}$ el sistema de subconjuntos de $(\sum(\mathbf{K}))^{\times}$; claramente se tiene:

(4) $\mathcal{H}$ es un cuerpo completo y $|\sum(\mathcal{H})| = \mathfrak{t}$.

Mediante la función $\mathbf{F}(X) = \mathbf{X}^{\times}$ se aplica un conjunto arbitrario $\mathbf{Y}$ en el sistema $\mathbf{Y}^{*} = \mathrm{E}_{\mathbf{X}^{\times}}[X \in \mathbf{Y}]$; de (3) se sigue que esta aplicación es biunívoca y que $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{Y}^{*}$ tienen la misma cardinalidad. En particular, sea $\mathcal{S} = \mathbf{T}^{*}$; por (1)

(5) $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ y $|\mathcal{S}| = 2^{\mathfrak{t}}$.

Ahora mostramos que $\mathcal{S}$ satisface la siguiente condición:

(6) Si $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{S}$, $|\mathcal{Y}| < \mathfrak{m}$ y $\mathbf{X} \notin \mathcal{Y}$, entonces $\mathbf{X} \nsubseteq \sum(\mathcal{Y})$.

A saber, es claro que $\mathbf{X}$ y $\mathcal{Y}$ son de la forma: $\mathbf{X} = X^{\times}$, $\mathcal{Y} = \mathbf{Y}^{*}$, donde $X \in \mathbf{T}$, $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{T}$, $|\mathbf{Y}| < \mathfrak{m}$ y $X \notin \mathbf{Y}$. Si $Z \in \mathbf{Y}$, entonces $X, Z \in \mathbf{T}$ y $X \neq Z$, y por (2) $X - Z \neq 0$. Escogemos de cada conjunto $X - Z$ un elemento determinado $f(Z)$ para formar el conjunto $U = \mathrm{E}_{f(Z)}[Z \in \mathbf{Y}]$. Es claro que $U \subseteq X$ y que $|U| \leq |\mathbf{Y}| < \mathfrak{m}$, y por (3) $U \in X^{\times} = \mathbf{X}$. Por otro lado, $U \nsubseteq Z$ (ya que $f(Z) \in U - Z$), por lo que $U \notin Z^{\times}$ para todo $Z \in \mathbf{Y}$, así que U no pertenece a ningún sistema de conjuntos $\mathbf{Y}^{*} = \mathcal{Y}$. De esto se infiere que $\mathbf{X}$ no está contenido en la suma $\sum(\mathcal{Y})$, lo que demuestra (6).

De (4)-(6) se deduce que hemos logrado construir un sistema $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ de cardinalidad $2^{\mathfrak{t}}$, en un cuerpo completo $\mathcal{H}$ con $|\sum(\mathcal{H})| = \mathfrak{t}$, que satisface la condición (i) del teorema en cuestión. Ahora es claro que este resultado se puede trasladar a cualquier cuerpo completo $\mathbf{K}'$ con $|\sum(\mathbf{K}')| = \mathfrak{t}$, en particular al cuerpo original $\mathbf{K}$. Con ello concluye la demostración.

Lema 2.26. *Sean $\mathbf{K}$ un cuerpo arbitrario y $\mathfrak{m}^{*} = \mathfrak{m} \geq \aleph_0$. Existe un sistema $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{K}$ de cardinalidad $\geq \mathfrak{n}$, que satisface la condición (i) de 2.25, entonces $|\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})| \geq 2^{\mathfrak{n}}$.*

Demostración. Según el teorema 2.18, a cada sistema $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{S}$ se puede asociar un ideal determinado $\mathbf{I}(\mathbf{X}) \in \mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{X})$, a saber, el menor ideal $\supset \mathbf{X}$ $\mathfrak{m}$-aditivo; de (i) se concluye que dos sistemas distintos $\mathbf{X} \subset \mathbf{S}$ y $\mathbf{Y} \subset \mathbf{S}$ corresponden a dos ideales distintos $\mathbf{I}(\mathbf{X})$ e $\mathbf{I}(\mathbf{Y})$. El sistema $\mathrm{E}_{\mathbf{X}}[\mathbf{X} \subset \mathbf{S}]$, cuya cardinalidad es claramente $\geq 2^{\mathfrak{n}}$, se aplica mediante la función $\mathbf{I}(\mathbf{X})$ biunívocamente sobre un subsistema de $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$; de esto se deduce inmediatamente la desigualdad propuesta.

Observación 2.27. De 2.23 y 2.26 se observa que la hipótesis $\mathfrak{t}^{\underline{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{t}$ en 2.25 no se puede eliminar o debilitar significativamente, digamos sustituirla por $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{t}$: si a saber, $\mathfrak{t}^{\underline{\mathfrak{m}}} > \mathfrak{t}$ y se cumple $2^{\underline{\mathfrak{t}}} = \mathfrak{t}$ y $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}$ (lo que ocurre, por ejemplo, para $\mathfrak{t} = \aleph_0 + 2^{\aleph_0} + 2^{2^{\aleph_0}} + \cdots$ y $\mathfrak{m} = \aleph_1$), entonces cada sistema $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{K}$ que satisfaga la condición (i) de 2.25, debe ser de ardinalidad $< 2^{\mathfrak{t}}$. Con la hipótesis de los álef de Cantor se puede invertir 2.25 en cierto sentido: si $\mathbf{K}$ es un cuerpo completo, $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t} \geq \aleph_0$ y $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}$, se sigue que la fórmula: $\mathfrak{t}^{\underline{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{t}$ es una condición necesaria y suficiente para la existencia de un sistema $\mathbf{S}$, que satisfaga la afirmación de 2.25.

Teorema 2.28. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo,* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t} \geq \aleph_0$ *y* $\mathfrak{t}^{\underline{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{t}$, *entonces* $|\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})| = 2^{2^{\mathfrak{t}}}$.

Demostración. De 2.10 y 2.12 se deuce de inmediato que $|\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})| \leq 2^{2^{\mathfrak{t}}}$. Si $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m} \geq \aleph_0$, obtenemos la desigualdad inversa $|\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})| \geq 2^{2^{\mathfrak{t}}}$ directamente de 2.25 y 2.26 (para $\mathfrak{n} = 2^{\mathfrak{t}}$). Si $\mathfrak{m}^* < \mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, aplicamos 2.25 y 2.26 no al número $\mathfrak{m}$, sino a $\mathfrak{m}^+$, tomando en cuenta 1.5, 1.11 y 2.17. En forma análoga, en el caso $\mathfrak{m} < \aleph_0$ se remplaza el número $\mathfrak{m}$ por $\aleph_0$ (tomando en cuenta 1.4, 1.10 y 2.12). Entonces el teorema se cumple también para cada $\mathfrak{m}$.

Véase *Classes closes...*, págs. 265 y siguientes, Teorema XI.

Corolario 2.29. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo y* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t} \geq \aleph_0$, *entonces* $|\mathcal{I}(\mathbf{K})| = 2^{2^{\mathfrak{t}}}$.

[Por 1.10, 2.12, 2.28].

§3. Ideales primos.

Definición[1] *3.1. Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo, un ideal* $\mathbf{I}$ *es llamado primo (en* $\mathbf{K}$*), en símbolos* $\mathbf{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$, *si* $\mathbf{I} \neq \mathbf{K}$ *y se satisface la siguiente condición: si* $X, Y \in \mathbf{K}$ *y* $X \cdot Y \in \mathbf{I}$, *entonces* $X \in \mathbf{I}$ *o* $Y \in \mathbf{I}$.

Teorema 3.2. *Si* $\mathbf{K}$ *un cuerpo arbitrario e* $\mathbf{I} \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes: (i)* $\mathbf{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$; *(ii)* $\mathbf{I} \neq \mathbf{K}$ *y el sistema* $\mathbf{K} - \mathbf{I}$ *no contiene dos conjuntos ajenos como elementos; (iii)* $\mathbf{I} \neq \mathbf{K}$ *y no existe* $\mathbf{J} \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$ *tal que* $\mathbf{J} \neq \mathbf{K}$, $\mathbf{J} \neq \mathbf{I}$ *y* $\mathbf{J} \supset \mathbf{I}$. *Cuando además* $\mathbf{K}$ *es completo (o en general, cuando* $\sum(\mathbf{K}) \in \mathbf{K}$*), estas condiciones son equivalentes a la siguiente: (iv) si* $X \in \mathbf{K}$, *entonces exactamente uno de los conjuntos* X, $\sum(\mathbf{K}) - X$ *pertenece a* $\mathbf{I}$.

El teorema es conocido y su demostración no ofrece dificultades.

Teorema 3.3. *Sea* $\mathbf{K}$ *un cuerpo completo (o en general un cuerpo que contiene como elemento a* $\sum(\mathbf{K})$*). Para que* $\mathbf{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$ *es necesario y suficiente que* $\mathbf{I}$ *satisfaga las siguientes condiciones: (i)* $\mathbf{I} \subset \mathbf{K}$; *(ii) no existe un sistema finito* $\mathbf{X} \subset \mathbf{I}$, *tal que* $\sum(\mathbf{X}) = \sum(\mathbf{K})$; *(iii) para cada conjunto* $Y \in \mathbf{K} - \mathbf{I}$ *existe un conjunto* $X \in \mathbf{I}$ *tal que* $X + Y = \sum(\mathbf{K})$.

[1] Sobre esta definición y los teoremas 3.2 y 3.6 véase M. H. Stone, Trans. Am. Math. Soc. **40**(1936), págs. 74 y siguientes.

Demostración. Supongamos, adicionalmente, que $\mathbf{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$. Por 2.4 y 3.1 ocurre entonces $\mathbf{I} \subset \mathbf{K}$. Si existiese un sistema finito $\mathbf{X} \subset \mathbf{I}$ con $\sum(\mathbf{X}) = \sum \mathbf{K})$, por 2.5 y 2.6 ocurriría $\mathbf{I} = \mathbf{K}$, en oposición a 3.1. Si, finalmente, $Y \in \mathbf{K} - \mathbf{I}$, por 3.2 (iv) $X = \sum(\mathbf{K}) - Y \in \mathbf{I}$ y claramente se cumple $X + Y = \sum(\mathbf{K})$. $\mathbf{I}$ satisface así las condiciones (i)-(iii).

Ahora supongamos que $\mathbf{I}$ satisface estas tres condiciones. De (ii) se sigue que $\mathbf{I} \neq \mathbf{K}$, ya que, por ejemplo, $\sum(\mathbf{K}) \in \mathbf{K} - \mathbf{I}$; por (iii) se deduce que $\mathbf{I}$ no es vacío. Sea $X \in \mathbf{I}$, $Y \subset X$ y $Y \in \mathbf{K}$; de no pertenencer Y a $\mathbf{I}$, existiría por (iii) un conjunto $X_1 \in \mathbf{I}$, para el que se cumpliría $X_1 + Y = \sum(\mathbf{K})$; con mayor razón se tendría $X_1 + X = \sum(\mathbf{K})$, en contradicción a (ii). Así que $\mathbf{I}$ contiene junto con cada conjunto X todo conjunto $Y \subset X$ como elemento. En forma análoga se muestra que $\mathbf{I}$ contiene como elemento junto con cualesquier dos conjuntos X, Y también a $X + Y$. En concordancia con 2.4 tenemos $\mathbf{I} \in \mathcal{I}(\mathbf{X})$. Ahora supongamos que $\mathbf{K} - \mathbf{I}$ contiene como elementos dos conjuntos ajenos Y_1 y Y_2. Por (iii) existen dos conjuntos $X_1, X_2 \in \mathbf{J}$, tales que $X_1 + Y_1 = X_2 + Y_2 = \sum(\mathbf{K})$; ya que $Y_1 \cdot Y_2 = 0$ y $(X_1 + Y_1) \cdot (X_2 + Y_2) \subset X_1 + X_2$, se infiere que $X_1 + X_2 = \sum(\mathbf{K})$, que otra vez contradice la condición (ii). $\mathbf{I}$ satisface, así, la condición 3.2(ii) y es un ideal primo en $\mathbf{K}$ l.q.q.d.

El siguiente teorema es una generalización de 3.3:

Teorema 3.4. *Sea* $\mathbf{K}$ *un cuerpo completo y* $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$. *Para que* $\mathbf{I} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{P}(\mathbf{K})$ *es necesario y suficiente que* $\mathbf{I}$ *satisfaga (i) y (iii) de 3.3 así como la siguiente propiedad: (ii) no existe un sistema* $\mathbf{X} \subset \mathbf{I}$ *de cardinalidad* $< \mathfrak{m}$*, para el que* $\sum(\mathbf{X}) = \sum(\mathbf{K})$.

Demostración. análoga a 3.3.

Observación 3.5. La condición (iii) en 3.3 y 3.4 se puede sustituir por la siguiente condición (más débil): *no existe un sistema* $\mathbf{J} \subset \mathbf{K}$ *que contenga a* $\mathbf{I}$ *propiamente y simultáneamente satisfaga la condición (ii) (para* $\mathbf{I} = \mathbf{J}$*); con otras palabras:* $\mathbf{I}$ *es un subsistema de* $\mathbf{K}$ *saturado respecto a la condición (ii).*

El teorema 3.3 se puede generalizar aún más como a continuación. Se considera un núemro arbitrario $\mathfrak{n} \geq 2$ y $\leq \aleph_0$, y demos a las condiciones (ii) y (iii) la siguiente forma: *(ii) no existe un sistema* $\mathbf{X} \subset \mathbf{I}$ *con* $|\mathbf{X}| < \mathfrak{n} + 2$*, tal que* $\sum(\mathbf{X}) = \sum(\mathbf{K})$*; (iii) para cada conjunto* $Y \in \mathbf{K} - \mathbf{I}$ *existe un sistema* $\mathbf{X} \subset \mathbf{I}$ *con* $|\mathbf{X}| < \mathfrak{n}$ *tal que* $\sum(\mathbf{X}) + Y = \sum(\mathbf{K})$.

El teorema 3.3 se puede extender a cuerpos arbitrarios, pero la formulación de las condiciones (ii) y (iii) adquiere una complicación; (ii) afirma entonces, por ejemplo: *existe un conjunto* $Z \in \mathbf{K}$*, tal que* $Z \nsubseteq \sum(\mathbf{X})$ *para cada sistema finito* $\mathbf{X} \subset \mathbf{I}$.

Teorema 3.6. *Para cada cuerpo* $\mathbf{K}$ *las siguientes afirmaciones son equivalentes: (i)* $\mathbf{I} \in \mathcal{H}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{P}(\mathbf{K})$*; (ii)* $\mathbf{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$, $\sum(\mathbf{I}) \neq \sum(\mathbf{K})$ *y* $\sum(\mathbf{I}), \sum(\mathbf{K}) \in \mathbf{K}$*; (iii)* $\mathbf{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$, $At(\mathbf{K}) \nsubseteq \mathbf{I}$ *y* $\sum(\mathbf{K}) \in \mathbf{K}$*; (iv)* $\mathbf{I} \in \mathcal{H}(\mathbf{K})$ *y* $\sum(\mathbf{K}) - \sum(\mathbf{I}) \in At(\mathbf{K})$*. Si el cuerpo* $\mathbf{K}$ *es completo, se pueden eliminar las fórmulas; en (ii)* $\sum(\mathbf{I}), \sum(\mathbf{K}) \in \mathbf{K}$*, en (iii)* $\sum(\mathbf{K}) \in \mathbf{K}$ *y adicional a (i)-(iv) aparece la siguiente condición equivalente adicional: (v) existe un elemento* $y \in \sum(\mathbf{K})$ *tal que* $\mathbf{I} = E_{\mathbf{X}}[X \subseteq \sum(\mathbf{K}) - \{y\}]$.

El teorema se obtiene fácilmente de las correspondientes nociones y definiciones (con ayuda de 2.3, 2.9 y 3.9).

Teorema 3.7. Si $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo y* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t}$*, entonces* $|\mathcal{H}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{P}(\mathbf{K})| = \mathfrak{t}$.

[Por 3.6].

Corolario 3.8. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo,* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t} < \aleph_0$ *y* $\mathfrak{m}$ *es arbitrario, entonces* $|\mathcal{P}(\mathbf{K}) = |\mathcal{H}(\mathbf{K})\cdot\mathcal{P}(\mathbf{K})| = |\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})\cdot\mathcal{P}(\mathbf{K})| = \mathfrak{t}$.

[Por 2.13, 3.1, 3.7].

Ahora mostraremos que la fórmula: $|\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})\cdot\mathcal{P}(\mathbf{K})| = \mathfrak{t}$, que ocurre en 3.8 sólo para $\mathfrak{t} < \aleph_0$, se cumple respecto a muchas hipótesis más generales (teorema 3.10).

Teorema 3.9. *Si* $\mathbf{K}$ *un cuerpo completo,* $\mathfrak{m}$ *un número cardinal y el número* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t}$ *es accesible débilmente por un número* $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$*, entonces cada ideal primo* $\mathfrak{m}$*-aditivo en* $\mathbf{K}$ *es principal, por lo que* $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})\cdot\mathcal{P}(\mathbf{K}) = \mathcal{H}(\mathbf{K})\cdot\mathcal{P}(\mathbf{K})$.

Demostración. Suponemos que el teorema no se cumple, que existe un ideal primo $\mathbf{I}$ $\mathfrak{m}$-aditivo que no es principal. Por 2.13, el cuerpo $\mathbf{K}$ y el número $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t}$ deben ser infinitos; por 1.19 y considerando las hipótesis del teorema deducimos que $\mathfrak{n}$ también debe ser infinito.

El número $\mathfrak{n}$, el conjunto $N = \sum(\mathbf{K})$ y el sistema de conjuntos $\mathbf{I}$ satisfacen las siguientes condiciones: (1) La cardinalidad del conjunto N es accesible débilmente por $\mathfrak{n} \geq \aleph_0$; (2) no existe una pareja de subconjuntos de N ajenos que pertenezcan a $\mathbf{I}$ (por 3.2 (ii)); (3) $N \subset \sum(\mathbf{I})$ (por 3.6 (ii)). Según (1)-(3) se satisfacen las hipótesis del segundo teorema de cubierta de mi trabajo *Überdeckungssätze...*, pág. 149 (para $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ y $\mathbf{S} = \mathbf{I}$); la afirmación de ese teorema proporciona un sistema $\mathbf{X} \subset \mathbf{I}$ para el que $|\mathbf{X}| \leq \mathfrak{n}$ y $N = \sum(\mathbf{K}) \subset \sum(\mathbf{X})$. Ya que $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ y $\sum(\mathbf{X}) \subset \sum(\mathbf{I}) \subset \sum(\mathbf{K})$, por lo que además se cumple $|\mathbf{X}| < \mathfrak{m}$ y $\sum(\mathbf{X}) = \sum(\mathbf{K})$; en consonancia con 2.11 se deduce de esto que $\sum(\mathbf{K}) \in \mathbf{I}$. En vista de 2.6 esta fórmula tiene como consecuencia que $\mathbf{I} = \mathbf{K}$; de acuerdo con 3.1 $\mathbf{I}$ no es un ideal primo.

Con ello se contradice nuestra hipótesis; así que no existe un ideal $\mathbf{I} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})\cdot\mathcal{P}(\mathbf{K}) - \mathcal{H}(\mathbf{K})$. Por tanto, considerando 2.12: $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})\cdot\mathcal{P}(\mathbf{K}) = \mathcal{H}(\mathbf{K})\cdot\mathcal{P}(\mathbf{K})$, l.q.q.d.

Teorema 3.10. *Con las hipótesis de 3.9 se cumple* $|\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})\cdot\mathcal{P}(\mathbf{K})| = \mathfrak{t}$.

[Por 3.7, 3.9]

Se origina el problema de si la accesibilidad del número $\mathfrak{t}$ en 3.9 y 3.10 es esencial. Este problema sólo se ha resuleto totalmente hasta ahora sólo en el caso no trivial más simple: $\mathfrak{t} \geq \aleph_0 \geq \mathfrak{m}$ (por cierto, este es el único caso práctico importante: no se sabe si existen realmente número que no sean accesibles por[1] $\aleph_0$). En el caso mencionado el sistema $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})\cdot\mathcal{P}(\mathbf{K})$ es idéntico a $\mathcal{P}(\mathbf{K})$ según 2.12, pero de ninguna manera coincide con $\mathcal{H}(\mathbf{K})\cdot\mathcal{P}(\mathbf{K})$ (teorema 3.15) y tiene una cardinalidad sensiblemente mayor, a saber $2^{2^{\mathfrak{t}}}$ (teorema 3.19).

Para lograr este resultado, debemos realizar una serie de preparativos.

Teorema 3.11. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo arbitrario,* $\mathbf{I} \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$ *e* $\mathbf{I} \neq \mathbf{K}$*, entonces existe un ideal* $\mathbf{J} \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$ *para el que* $\mathbf{I} \supset \mathbf{J}$.

[1]Véase, por ejemplo, A. Tarski, Fund. Math. **30**(1938), p. 84.

Este importante teorema se denota como *el teorema fundamental de la teoría de ideales* Son conocidas diversas variaciones de este teorema;[1] Se puede efectuar una demostración más sencilla basándonos en 3.3.

Observación 3.12. Se puede mejorar el teorema 3.11 de la siguiente forma:
En un cuerpo arbitrario $\mathbf{K}$ *cada ideal* $\mathbf{I} \neq \mathbf{K}$ *es idéntico con la intersección de los ideales primos* $\mathbf{J} \supset \mathbf{I}$. [2]

Corolario 3.13. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo (o en general, un cuerpo que contenga a* $\sum(\mathbf{K})$ *como elemento) y si el sistema* $\mathbf{S} \subset \mathbf{K}$ *satisface la condición (ii) de 3.3 (para* $\mathbf{I} = \mathbf{S}$*), entonces existe un ideal* $\mathbf{J} \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$ *para el que* $\mathbf{S} \subset \mathbf{J}$.

Teorema 3.14. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo arbitrario,* $\mathbf{I} \in \mathcal{I}(\mathbf{K}) - \mathcal{H}(\mathbf{K})$ *e* $\mathbf{I} \neq \mathbf{K}$*, entonces existe un ideal* $\mathbf{J} \in \mathcal{P}(\mathbf{K}) - \mathcal{H}(\mathbf{K})$*, para el que* $\mathbf{I} \subset \mathbf{J}$ *(cuando* $\sum(\mathbf{K}) \in \mathbf{K}$ *o en particular cuando* $\mathbf{K}$ *es completo, la hipótesis:* $\mathbf{I} \neq \mathbf{K}$ *es superflua).*

Demostración. Si $\sum(\mathbf{K}) \notin \mathbf{K}$, de 3.6 se infiere que $\mathcal{H}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{P}(\mathbf{K}) = 0$, y la afirmación del teorema se desprende inmediatamente de 3.11. Si $\sum(\mathbf{K}) \in \mathbf{K}$, hacemos

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} + \mathbf{K} \cdot \underset{X}{\mathrm{E}}[X \in \sum(\mathbf{K}) - \sum(\mathbf{I})].$$

Se verifica con facilidad que $\mathbf{S}$ satisface la condición (ii) de 3.3: de lo contrario existiría un sistema finito $\mathbf{X}_1 \subset \mathbf{I}$ para el que $\sum(\mathbf{X}_1) = \sum(\mathbf{I})$, por lo que $\mathbf{I}$ sería un ideal principal, de acuerdo con 2.5 y 2.9. Por 3.13 existe entonces un ideal primo $\mathbf{J} \supset \mathbf{S} \supset \mathbf{I}$. De la definición de $\mathbf{S}$ se concluye que $\sum(\mathbf{J}) \notin \mathbf{K}$ o, por 2.1, $\sum(\mathbf{K}) - \sum(\mathbf{J}) \in \mathbf{S} \subset \mathbf{J}$, por consiguiente $\sum(\mathbf{K}) - \sum(\mathbf{J}) = 0$; según 3.6 no es entonces $\mathbf{J}$ un ideal principal y la demostración concluye.

Teorema 3.15. *Para cada cuerpo* $\mathbf{K}$ *son equivalentes las siguientes condiciones: (i)* $\mathcal{P}(\mathbf{K}) \not\subseteq \mathcal{H}(\mathbf{K})$*; (ii)* $\mathcal{I}(\mathbf{K}) \not\subseteq \mathcal{H}(\mathbf{K})$*; (iii)* $\mathbf{K}$ *es infinito. Por otro lado, las siguientes condicones son equivalentes: (iv) existe un ideal* $\mathbf{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$ *para el que* $At(\mathbf{K}) \subset \mathbf{I}$*; (v) existe un ideal* $\mathbf{I} \neq \mathbf{K}$ *para el que* $At(\mathbf{K}) \subset \mathbf{I}$*; (vi) existe un sistema infinito* $\mathbf{S} \subset \mathbf{K}$ *de conjuntos ajenos entre sí y un conjunto* $X \in \mathbf{K}$ *para los que* $\sum(\mathbf{S}) \subset X$*. Cuando* $\sum(\mathbf{K}) \in \mathbf{K}$ *o, en particular, cuando* $\mathbf{K}$ *es completo, las condicones (i)-(vi) son equivalentes.*

Demostración. (ii) se sigue directamente de (i) considerando 3.1; (iii) se logra a partir de (ii) teniendo en cuenta 2.13. Si se cumple (iii), es sabido que existe un sistema infinito $\mathbf{S} \subset \mathbf{K}$ de conjuntos ajenos entre sí;[3] claramente se puede suponer que $\sum(\mathbf{S}) \neq \sum(\mathbf{K})$. Siguiendo a 2.7 construimos el menor ideal $\mathbf{I} \supset \mathbf{S}$. Como se concluye fácilmente, $\mathbf{I} \notin \mathcal{H}(\mathbf{K})$ e $\mathbf{I} \neq \mathbf{K}$, pues $\sum(\mathbf{I}) = \sum(\mathbf{S}) \notin \mathbf{I}$ y $\neq \sum(\mathbf{K})$ (véase

[1]Véase A. Tarski, Fund. Math. **15**(1930), p. 47 Lema 4; J. von Neumann y M. H. Stone, Fund. Math. **25**(1935), págs. 365 y siguientes, teorema 14.
[2]Véase M. H. Stone, op. cit., págs. 105 y siguientes teorema 66; A. Tarski, Fund. Math. **26**(1936), p. 285, teorema 36 así como Ann. Soc. Pol. Math. **15**(1937), p. 188.
[3]Véase A. Tarski, Fund. Math. **6**(1024), págs. 94 y siguiente (un resultado de Kuratowski).

2.9). Por 3.14 se puede extender $\mathbf{I}$ a un ideal $\mathbf{J} \in \mathscr{P}(\mathbf{K}) - \mathscr{H}(\mathbf{K})$; de esta forma logramos (i). En efecto, las condiciones (i)-(iii) son equivalentes.

Ahora derivamos (vi) de (iv). Sea $\mathbf{I} \in \mathscr{P}(\mathbf{K})$ y suponga $At(\mathbf{K}) \subset \mathbf{I}$. En consonancia con 3.1, se tiene $\mathbf{I} \neq \mathbf{K}$, por lo qe existe un conjunto $X \in \mathbf{K} - \mathbf{I}$. Consideremos el sistema $\mathbf{S} = At(\mathbf{K}) \cdot \mathrm{E}_Y[Y \subset X]$. De 2.2 se reconoce de inmediato que dos átomos son idénticos o ajenos; si $\mathbf{S}$ es infinito, entonces se satisface (iv). De ser $\mathbf{S}$ finito, no puede ocurrir $X = \sum(\mathbf{S})$, ya que por 2.5 X debería pertenecer a $\mathbf{I}$; el conjunto $X - \sum(\mathbf{S})$ no es entonces vacío y no contiene átomos. Por 2.1 se cumple $X - \sum(\mathbf{S}) \in \mathbf{K}$, por lo que se puede dar fácilmente un sistema infinito $\mathbf{S}_1 \subset \mathbf{K}$ de conjuntos ajenos entre sí, tal que $\sum(\mathbf{S}_1) \subset X - \sum(\mathbf{S}) \subset X$ (de 2.2 se obtiene claramente que $X - \sum(\mathbf{S})$ se puede descomponer en dos subconjuntos ajenos $X_1, X_2 \in \mathbf{K}$, uno de ellos, digamos X_2, a su vez se puede descomponer en dos conjuntos ajenos $X_{2,1}, X_{2,2} \in \mathbf{K}$, etc. etc.) La condición (vi) se satisface.– Ahora supongamos que se cumple (vi); sea $\mathbf{S} \subset \mathbf{K}$ un sistema infinito de conjuntos ajenos entre sí y $\sum(\mathbf{S}) \subset X \in \mathbf{K}$. Hacemos $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S} + At(\mathbf{K})$ y construimos, conforme a 2.7, el menor ideal $\mathbf{I} \subset \mathbf{S}_1$. Como se muestra sin dificultad, $X \notin \mathbf{I}$ (de lo contrario, una suma infinita de conjuntos de $\mathbf{S}$ estaría contenida en una suma finita de átomos, lo cual está excluido por 2.2). Por tanto, $\mathbf{I} \neq \mathbf{K}$ y se cumple (v). De (v) se obtiene finalmente (iv) por 3.11.

Si $\sum(\mathbf{K}) \in \mathbf{K}$, de 3.6 se sigue que las condiciones (i) y (iv), y por tanto las condiciones (i)-(vi), son equivalentes.

Ahora damos una mejora de 2.25:

Lema 3.16. *Con las hipótesis de 2.25 existe un sistema* $\mathbf{S} \subset \mathbf{K}$ *de cardinalidad* $2^{\mathfrak{t}}$ *que satisface la siguiente condición:*

(i) si $\mathbf{X} \subset \mathbf{S}$, $|\mathbf{X}| < \mathfrak{m}$, $\mathbf{Y} \subset \mathbf{S}$, $|\mathbf{Y}| < \mathfrak{m}$ *y* $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = 0$, *entonces* $\Pi(\mathbf{X}) \nsubseteq \sum(\mathbf{Y})$.

Demostración. Sea $\mathbf{S}'$ un sistema que satisface la afirmación de 2.25 (para $\mathbf{S} = \mathbf{S}'$). Construimos el sistema $\mathbf{T} = \mathrm{E}_{\sum(\mathbf{K})-X}[X \in \mathbf{S}']$. Como se observa fácilmente, $\mathbf{T}$ satisface las siguientes condiciones:

(1) $\mathbf{T} \subset \mathbf{K}$ y $|\mathbf{T}| = 2^{\mathfrak{t}}$;

(2) Si $\mathbf{X} \subset \mathbf{T}$, $|\mathbf{X}| < \mathfrak{m}$, $Y \in \mathbf{T}$ y $Y \notin \mathbf{X}$, entonces $\Pi(\mathbf{X}) \nsubseteq Y$.

En lo sucesivo se repite casi textualmente la prueba de 2.25: se toma como punto de partida este sistema $\mathbf{T}$, se aplican las operaciones $X^{\times}$ y Y^{*} a $\sum(\mathbf{K})$ y $\mathbf{T}$, de esta forma se logra un sistema $\mathbf{S}$ que posee las propiedades requeridas.[1]

Observación 3.17. Un sistema $\mathbf{S}$ que satisface la condición (i) de 2.25, respectivamente 3.16, se denota en lo sucesivo como un sistema de conjuntos $\mathfrak{m}$-independiente en extenso, respectivamente en estrecho.

[1] El lema 3.16 para $\mathfrak{m} = \aleph_0$ fue propuesto F. Hausdorff en Stud. Math. **6**(1936), págs 18 y siguiente; dos de sus casos particulares ($\mathfrak{t} = \aleph_0$ y $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}$) se demostraron antes por G. Fichtenholz y L. Kantorovitch en Stud. Math. **5** (1934), págs. 80 y siguientes. La demostración arriba bosquejada de 2.25 y 3.16 está relacionada estrechamente a la de Hausdorff (como se mencionó en la pág. 53, el autor en *Classes closes...* (1930), págs 259 y siguientes, utilizó el razonamiento aquí empleado).

La observación 2.27 se puede aplicar a 3.16.

Lema 3.18. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo (o en general, un cuerpo para el que* $\sum(\mathbf{K}) \in \mathbf{K}$*) y existe un sistema* $\mathbf{S} \subset \mathbf{K}$ *de cardinalidad* $\geq \mathfrak{n}$ *que satisface la condición (i) de 3.16 para* $\mathfrak{m} = \aleph_0$*, entonces* $|\mathscr{P}(\mathbf{K})| \geq 2^{\mathfrak{n}}$.

Demostración. Como se muestra fácilmente, la condición (i) de 3.16 implica la siguiente propiedad del sistema $\mathbf{S}$:

(1) No existen un subsistema finito ajeno entre sí $\mathbf{X} \subset \mathbf{S}$ y un $\mathbf{Y} \subset \mathbf{S}$ tales que $\sum(\mathbf{X}) + \sum_{Z \in \mathbf{Y}}(\sum(\mathbf{K}) - Z) = \sum(\mathbf{K})$;

(2) si $X \in \mathbf{S}$, entonces $\sum(\mathbf{K}) - X \notin \mathbf{S}$.

Denotamos mediante $\mathfrak{S}$ el sistema de sistemas de conjuntos de la forma $F(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z} + \mathrm{E}_{\sum(\mathbf{K})-U}[U \in \mathbf{S} - \mathbf{Z}]$, donde $\mathbf{Z} \subset \mathbf{S}$. De (2) se deduce que la función $F(\mathbf{Z})$ aplica biunívocamente el sistema $\mathrm{E}_{\mathbf{Z}}[\mathbf{Z} \subset \mathbf{S}]$ sobre el sistema $\mathfrak{S}$; ya que $|\mathbf{S}| \geq \mathfrak{n}$ inferimos:

(3) $|\mathfrak{S}| \geq 2^{\mathfrak{n}}$.

Con ayuda de (1) se prueba sin dificultad que $\mathfrak{S}$ satisface las siguientes condiciones:

(4) Si $\mathbf{Z} \in \mathfrak{S}$, entonces $\mathbf{Z} \subset \mathbf{K}$ y no existe un sistema finito $\mathbf{X} \subset \mathbf{Z}$ para el que $\sum(\mathbf{X}) = \sum(\mathbf{K})$;

(5) Si $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 \in \mathfrak{S}$ y $\mathbf{Z}_1 \neq \mathbf{Z}_2$, existe un conjunto $U \in \mathbf{K}$ tal que $U \in \mathbf{Z}_1$ y $\sum(\mathbf{K}) - U \in \mathbf{Z}_2$.

En vista de 3.13 y toamndo en cuenta (4) se puede asociar un ideal primo $P(\mathbf{Z}) \supset \mathbf{Z}$ a cada sitema $\mathbf{Z}$; si $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 \in \mathfrak{S}$ y $\mathbf{Z}_1 \neq \mathbf{Z}_2$, se deduce de (5) y 3.2(iv) que también ocurre $P(\mathbf{Z}_1) \neq P(\mathbf{Z}_2)$. La función $P(\mathbf{Z})$ aplica entonces en forma unívoca el sistema $\mathfrak{S}$ sobre un subsistema de $\mathscr{P}(\mathbf{K})$; por (3) se cumple también $|\mathscr{P}(\mathbf{K})| \geq 2^{\mathfrak{n}}$, l.q.q.d.

Teorema 3.19. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo y* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t} \geq \aleph_0$*, entonces* $|\mathscr{P}(\mathbf{K})| = 2^{2^{\mathfrak{t}}}$.

[Por 1.10, 3.16, 3.18, 2.10, 3.1]

Observación. 3.20. Ahora resumimos los resultados 2.20, 2.21, 2.23, 2.28, 2.29, 3.7, 3.8, 3.10 y 3.19 que conciernen a la cantidad de ideales:

Sea $\mathbf{K}$ un cuerpo completo, $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t}$ y $\mathfrak{m}$ un número cardinal arbitrario.

I. $\mathfrak{t} < \aleph_0$.

(i) El sistema $\mathscr{I}(\mathbf{K}) = \mathscr{H}(\mathbf{K}) = \mathscr{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$ tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{t}}$.

(ii) El sistema $\mathscr{P}(\mathbf{K}) = \mathscr{H}(\mathbf{K}) \cdot \mathscr{P}(\mathbf{K}) = \mathscr{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \cdot \mathscr{P}(\mathbf{K})$ tiene cardinalidad $\mathfrak{t}$.

II. $\mathfrak{t} \geq \aleph_0$.

(i) El sistema $\mathscr{I}(\mathbf{K}) = \mathscr{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$ para $\mathfrak{m} \leq \aleph_0$ tiene cardinalidad $2^{2^{\mathfrak{t}}}$.

(ii) El sistema $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$ para $\mathfrak{t}^{\underset{\smile}{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{t}$ tiene cardinalidad $2^{2^{\mathfrak{t}}}$.

(iii) El sistema $\mathcal{P}(\mathbf{K}) = \mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{P}(\mathbf{K})$ para $\mathfrak{m} \leq \aleph_0$ tiene cardinalidad $2^{2^{\mathfrak{t}}}$.

(iv) El sistema $\mathcal{H}(\mathbf{K}) = \mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$ para $\mathfrak{m} > \mathfrak{t}$ tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{t}}$.

(v) El sistema $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$ para $\mathfrak{t}^{\underset{\smile}{\mathfrak{m}}} > \mathfrak{t} = 2^{\underset{\smile}{\mathfrak{m}}}$ tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{t}}$.

(vi) El sistema $\mathcal{H}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{P}(\mathbf{K})$ tiene cardinalidad $\mathfrak{t}$ y, con la hipótesis de que $\mathfrak{t}$ es accesible débilmente por un número $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$, es idéntico a $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{P}(\mathbf{K})$.

Para agotar el círculo de problemas, resta 1. liberar el caso II(v) de la condición $\mathfrak{t} = 2^{\underset{\smile}{\mathfrak{t}}}$; 2. investigar la cardinalidad $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{P}(\mathbf{K})$ en elcaso II, donde $\mathfrak{m} > \aleph_0$ y $\mathfrak{t}$ no accesible débilmente por algún número $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$.

Ambos problemas son seguramente difíciles (véase 2.24).