XVII

Ideales en campos completos de conjuntos II.

Título original: Ideale in vollständigen Mengenkörpern II.
Von Alfred Tarski
Fundamenta Mathematicae (1939), 45-63 **33**(1945), 51-65.

§4. Ideales $\mathfrak{p}$-saturados[2]

La noción de ideal $\mathfrak{p}$-saturado representa una generalización del concepto de ideal primo.

Definición 4.1. Un ideal $\mathbf{I}$ *en un cuerpo* $\mathbf{K}$ *se llama* $\mathfrak{p}$*-saturado, en símbolos* $\mathbf{I} \in \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})$*, cuando todo sistema* $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{K} - \mathbf{I}$*, tal que la intersección* $X \cdot Y$ *de cualesquier conjuntos distintos* $X, Y \in \mathbf{S}$ *siempre pertenece a* $\mathbf{I}$*, tiene cardinalidad* $< \mathfrak{p}$.

Aquí daremos algunos teoremas sobre ideales $\mathfrak{p}$-saturados, sin demostrarlos formalmente.

Corolario 4.2. *Para cada cuerpo* $\mathbf{K}$ *se cumple* $\mathcal{S}_0(\mathbf{K}) = 0$*,* $\mathcal{S}_1(\mathbf{K}) = \{\mathbf{K}\}$ *y* $\mathcal{S}_2(\mathbf{K}) = \mathcal{P}(\mathbf{K}) + \{\mathbf{K}\}$*; si* $\mathfrak{p} \geq 2$*, entonces* $\mathcal{P}(\mathbf{K}) \subseteq \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K}) \subset \mathcal{I}(\mathbf{K})$*; si* $\mathfrak{p} > |\mathbf{K}|$*, entonces* $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K}) = \mathcal{I}(\mathbf{K})$.

[Por 3.1, 4.1].

Teorema 4.3. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo,* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t} \geq \aleph_0$*, y* $\mathfrak{p} \geq 2$*, entonces* $|\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})| = 2^{2^{\mathfrak{t}}}$.

[Por 2.29, 3.19, 4.2].

Teorema 4.4. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo arbitrario y* $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q}$*, entonces* $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K}) \subset \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}(\mathbf{K})$.

[Por 4.1].

[2] La primera parte de este trabajo, §§1-3, apareció en Fund. Math. **32**(1938), págs. 45-63; ahí se encuentran en particular los teoremas abajo citados, cuya enumeración comience con 1, 2 o 3 (por ejemplo 3.1 o 2.29).

Teorema 4.5. *Sea* $\mathfrak{p} = \aleph_0$ *o* $\aleph_0 \leq \mathfrak{p}^* < \mathfrak{p}$. *Para cada cuerpo* $\mathbf{K}$ *y todo ideal* $\mathbf{I} \in \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})$ *existe un número* $\mathfrak{q} < \mathfrak{p}$ *tal que* $\mathbf{I} \in \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}(\mathbf{K})$.

La demostración para $\mathfrak{p} = \aleph_0$ es sencilla, no así para $\mathfrak{p}^* < \mathfrak{p}$, que es realmente complicada; tenemos la intención de publicarla posteriormente.

Observación 4.6. La afirmación del teorema 4.5 se puede presentar de la siguiente forma (equivalente para cada $\mathfrak{p}$, aunque parezca un caso particular):

Si $\mathbf{K}$ *es un cuerpo arbitrario y* $|\mathbf{S}| < \mathfrak{p}$ *para cada sistema* $\mathbf{S} \subset \mathbf{K}$ *de conjuntos ajenos entre sí, entonces existe un número* $\mathfrak{q} < \mathfrak{p}$*, tal que* $|\mathbf{S}| < \mathfrak{q}$ *para todo sistema* $\mathbf{S} \subset \mathbf{K}$ *de conjuntos ajenos entre sí.*

El teorema 4.5 no se puede extender a ningún número $\mathfrak{p}$ de la forma $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^+$. El problema de si este teorema se cumple para números límite regulares, es decir para los así llamados cardinales inaccesibles en sentido amplio $\mathfrak{p} > \aleph_0$, permanece abierto (de hecho, no se sabe si en realidad existen tales números). [1]

Teorema 4.7. *Sean* $\mathbf{K}$ *un cuerpo arbitrario e* $\mathbf{I} \subset \mathbf{K}$ *un ideal. Para que* $\mathbf{I} \in \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})$*, es necesario que* $\mathbf{I}$ *satisfaga la siguiente condición:*

(i) cada sistema $\mathbf{S} \subset \mathbf{K} - \mathbf{I}$ *de conjuntos ajenos entre sí tiene cardinalidad* $< \mathfrak{p}$ *.*

Si $\mathfrak{p} \leq \aleph_0$ *o* $\mathbf{I} \in \mathcal{H}(\mathbf{K})$ *o* $\mathbf{I} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$ *para algún* $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{q}$*, entonces esta condición también es suficiente.*

La demostración no es difícil. La primera parte del teorema se obtiene inmediatamente de 2.5 y 4.1. Para fundamentar la segunda parte, se procede en forma indirecta, haciendo uso del teorema de buen orden y de los teoremas 2.5 y 2.11.

Observación 4.8. Un ideal $\mathbf{I}$ que satisface la condición (i) de 4.7, no es necesariamente $\mathfrak{p}$-saturado. Por ejemplo, sea $\mathbf{K}$ un cuerpo completo con

$$|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t} \geq \aleph_0, \quad \mathbf{I} = \underset{X}{E}[X \subseteq \sum(\mathbf{K}) \text{ y } |X| < \mathfrak{t}], \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{t}^+;$$

con seguridad se satisface la condición (i), no obstante se puede mostrar que $\mathbf{I}$ no es $\mathfrak{p}$-saturado.[2]

Corolario 4.9. *Para cada cuerpo completo* $\mathbf{K}$ *las siguientes condiciones son equivalentes: (i)* $\mathbf{I} \in \mathcal{H}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})$*; (ii)* $\mathbf{I} \in \mathcal{H}(\mathbf{K})$ *y* $|\sum(\mathbf{K}) - \sum(\mathbf{I})| < \mathfrak{p}$*; (iii) existe un conjunto* $Y \subset \sum(\mathbf{K})$*, para el que* $|Y| < \mathfrak{p}$ *e* $\mathbf{I} = E_X[X \subset \sum(\mathbf{K}) - Y]$*. En particular,* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t} < \mathfrak{p}$*, así que* $\mathcal{H}(\mathbf{K}) \subset \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})$*.*

[Por 2.9, 4.7].

Teorema 4.10.*Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo y* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t} \geq \aleph_0$*, entonces* $|\mathcal{H}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})| = \mathfrak{t}^{\mathfrak{p}}$ *para* $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{t}$ *e* $= 2^{\mathfrak{t}}$ *para* $\mathfrak{p} > \mathfrak{t}$*.*

[1] Véase mi trabajo en Fund. Math. **30**(1938), págs. 68 y siguientes, en particular p. 70, teorema 3.

[2] Esto se obtiene fácilmente de un teorema de Sierpiński sobre la descomposición de un conjunto en subconjuntos casi ajenos; véase W. Sierpiński, Fund. Math. **28**(1937), págs. 115 y siguientes.

[Por 1.16, 2.20, 4.9].

Teorema 4.11. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo y* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t} < \aleph_0$*, entonces* $|\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})| = |\mathcal{H}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})| = |\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})| = \sum_{\mathfrak{x}<\mathfrak{p}} \binom{\mathfrak{t}}{\mathfrak{x}}$ *para* $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{t}$ *e* $= 2^{\mathfrak{t}}$ *para* $\mathfrak{p} > \mathfrak{t}$ *(*$\mathfrak{m}$ *arbitrario).*

[Por 1.16, 2.13, 2.20, 4.9].

El siguiente teorema es un complemento a 3.14:

Teorema 4.12. Si $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo,*

$$\mathbf{I} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K}) - \mathcal{H}(\mathbf{K})$$

y $\mathfrak{p} \leq \aleph_0$ *o* $\mathfrak{m} > 2^{\underset{\smile}{\mathfrak{p}}}$*, entonces existe un ideal* $\mathbf{J}$ *tal que* $\mathbf{I} \subset \mathbf{J}$ *y*

$$\mathbf{J} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{P}(\mathbf{K}) - \mathcal{H}(\mathbf{K}).$$

Para la demostración se puede suponer, tomando en cuenta 2.12 y 4.5, que $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ y $\mathfrak{p} \neq \aleph_0$; entonces se tiene $\mathfrak{m} > 2^{\underset{\smile}{\mathfrak{p}}}$ para $\mathfrak{p} \leq \aleph_0$ y no es ncesario considerar particularmente el caso $\mathfrak{p} \leq \aleph_0$. Si $\mathfrak{m}$ no es un número límite, la demostración se basa en el lema 11 del trabajo *Überdeckungssätze...*, pág. 147 y es en gran medida análoga a la de 3.9. El caso de un número límite singular ($\mathfrak{m}^* < \mathfrak{m}$) se reduce al caso previo mediante 2.16; si $\mathfrak{m}$ es un número límite regular o $= \aleph_0$, se puede repetir toda la prueba de los lemas 10 y 12 del trabajo citado, págs 142 y siguientes, con modificaciones mínimas.

Observación 4.13. Con la hipótesis: $\mathfrak{p} \leq \aleph_0$ (pero no $\mathfrak{m} > 2^{\underset{\smile}{\mathfrak{p}}}$) se puede extender 4.12 a cuerpos arbitrarios; se debe suponer que $\mathbf{I} \neq \mathbf{K}$.

Los teoremas 3.14 y 4.12 siguen siendo válidos cuando en ellos se remplaza $\mathcal{H}(\mathbf{K})$ por $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}}(\mathbf{K})$ (donde $\mathfrak{n}$ es un número cardinal dado).

Basándonos en 4.12 podemos mejorar 3.9 de la siguiente forma:

Teorema 4.14. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo,* $\mathfrak{p} \leq \aleph_0$ *o* $\mathfrak{m} > 2^{\underset{\smile}{\mathfrak{p}}}$ *y el número* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t}$ *es accesible débilmente por* $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$*, entonces* $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K}) = \mathcal{H}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})$*.*

[Por 2.12, 3.9, 4.12].

En esencia 4.14 parafrasea el lema 12 de *Überdeckungssätze...*, pág. 149.

Teorema 4.15. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo,* $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{p}$ *y el número* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t}$ *es accesible fuertemente por un número* $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$*, entonces* $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K}) = \mathcal{H}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})$*.*

Considerando 2.12 y 4.4, al demostar este teorema se puede restringir al caso: $\mathfrak{t} \geq \mathfrak{m} = \mathfrak{p} \geq \aleph_0$. Si $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ no es un número límite, se infiere en forma análoga a la demostración de 3.9, con la diferencia de que en lugar de aplicar el segundo teorema de cubierta, se emplea la primera parte del corolario 1 del mismo trabajo (*Überdeckungssätze...*, pág. 150). Si $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ es un número límite, con ayuda de 1.18 y

1.20 se muestra que éste es un número límiute singular (es decir, $\mathfrak{p}^* < \mathfrak{p}$); en vista de 2.14 y 4.5 se reduce este caso al previo considerado.

Teorema 4.16. *Si se satisfacen las hipótesis de 4.14 o 4.15 y* $\mathfrak{t} \geq \aleph_0$*, entonces* $|\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})\cdot\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})| = \mathfrak{t}^{\underset{\smile}{\mathfrak{p}}}$ *para* $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{t}$ *e* $= 2^{\mathfrak{t}}$ *para* $\mathfrak{p} > \mathfrak{t}$.

[Por 4.10, 4.14, 4.15].

Observación 4.17. Aparte de los casos considerados en 4.14-4.16 (y un poco 4.11), la cardinalidad del sistema $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})$ y la naturaleza de los ideales asociados a este sistema son desconocidas; por ejemplo, no se sabe si las hipótesis sobre la accesibilidad del número $\mathfrak{t}$ en 4.14-4.16 es esencial, o si en 4.15 se puede remplazar la palabra "*fuertemente*" por "*débilmente*", etc.

Observación 4.18. Como ilustración queremos aplicar los resultados hasta ahora logrados al cuerpo $\mathbf{K}$ de todos los conjuntos de números reales (o, en general, a un cuerpo completo arbitrario $\mathbf{K}$ con $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$). Los sistemas $\mathcal{F}(\mathbf{K})$, $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$, para $\mathfrak{m} \leq \aleph_1$, $\mathcal{P}(\mathbf{K})$ y $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})$ para $\mathfrak{p} \geq 2$ son en este caso de cardinalidad $2^{2^{\mathfrak{c}}}$ (2.28, 2.29, 3.19, 4.3); el sistema $\mathcal{H}(\mathbf{K})$ tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$ (2.20). El sistema $\mathcal{H}(\mathbf{K})\cdot\mathcal{P}(\mathbf{K})$ coincide con $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})\cdot\mathcal{P}(\mathbf{K})$ para $\mathfrak{m} > \aleph_0$ y tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$ (3.7, 3.9); en forma análoga coinciden $\mathcal{H}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})$ con $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})$ para $\mathfrak{m} > \aleph_0 \geq \mathfrak{p} \geq 2$ y tienen igualmente la cardinalidad $\mathfrak{c}$ (4.10, 4.14). En general, el sistema $\mathcal{H}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}^{\underset{\smile}{\mathfrak{p}}}$ para $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{c}$ (4.10); en virtud de la hipótesis adicional, que $\mathfrak{c}$ es accesible fuertemete por[1] $\aleph_0$, este sistema coincide con $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})$ para $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{p} > \aleph_0$ (4.15). En cambio, no estamos en posibilidad de determinar la cardinalidad de $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K})$ para $\aleph_1 < \mathfrak{m} \leq \mathfrak{c}$ (si es que existe alguno de tales números $\mathfrak{m}$); tampoco se ha investigado hasta ahora la cardinalidad de $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})$ para $\aleph_0 < \mathfrak{m} < \mathfrak{p} \leq 2^{\mathfrak{c}}$.

§5. Aplicaciones a problema abstracto de medida.

Definición 5.1. Si $\mathbf{K}$ *es un cuerpo arbitrario, se denota una función* f *como función medida (finito aditiva) en* $\mathbf{K}$*, si satisface las sguientes condiciones:*

(i) El dominio de f *es idéntico a* $\mathbf{K}$*, el contradominio consisten en los reales no negativos;*

(ii) Si , $Y \in \mathbf{K}$ *y* $X \cdot Y = 0$*, entonces* $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$*;*

(iii) Existe un conjunto $X \in \mathbf{K}$ *con* $f(X) \neq 0$*;*

(iv) Si $X \in At(\mathbf{K})$*, entonces* $f(X) = 0$.

El problema abstracto de medida (en su versión más general en teoría de conjuntos) concierne a la existencia de funciones que satisfagan las condiciones dadas.[2]

[1] Respecto a esta hipótesis véase W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*. Monogr. Mat. 4. Warzawa-Lwów 1934, págs. 152 y siguientes.

[2] Véase, por ejemplo, *Überdeckungssätze...*, págs. 152 y siguientes, donde también se encuentre bibliografía adicional.

Mediante los siguientes teoremas se ilustra la estrecha relación que subsiste entre las funciones medida y cierto tipo de ideales.

Teorema 5.2. *Sean* $\mathbf{K}$ *un cuerpo arbitrario,* f *una función medida en* $\mathbf{K}$ *e* $\mathbf{I} = E_X[f(X) = 0]$. *Entonces se cumple:*

(i) $\mathbf{I} \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$*,* $\mathbf{I} \neq \mathbf{K}$ *y* $At(\mathbf{K}) \subset \mathbf{I}$*;*

(ii) Si $\sum(\mathbf{K}) \in \mathbf{K}$ *o, en particular, cuando* $\mathbf{K}$ *es completo, entonces* $\mathbf{I} \in \mathcal{S}_{\aleph_1}(\mathbf{K})$*.*

Demostración. (i) Se obtiene fácilmente de 2.4 y 5.1. Para probar (ii) suponemos que $\sum(\mathbf{K}) \in \mathbf{K}$ y que $\mathbf{I} \notin \mathcal{S}_{\aleph_1}(\mathbf{K})$. De acuerdo con 4.1 existe un sistema no numerable $\mathbf{S} \subset \mathbf{K} - \mathbf{I}$, tal que $X \cdot Y \in \mathbf{I}$ para conjuntos $X, Y \in \mathbf{S}$ cualesquiera. De esto se concluye en forma sabida que existe un número real $\varepsilon > 0$ y una sucesión infinita de conjuntos $X_1, \ldots, X_n, \ldots \in \mathbf{S}$ tales que $f(X_n) \geq \varepsilon$ para cada natural n. Hacemos: $Y_1 = X_1$ y $Y_n = X_n - (X_1 + \cdots + X_{n-1})$ para $n \geq 2$. Por 2.1 ocurre $Y_1, \ldots, Y_n, \ldots \in \mathbf{K}$. Además, se cumple:

$$X_n = Y_n + (X_1 \cdot X_n + \cdots + X_{n-1} \cdot X_n) \text{ y } Y_n \cdot (X_1 \cdot X_n + \cdots + X_{n-1} \cdot X_n) = 0$$

para $n \geq 2$, de donde se sigue, por 5.1(ii), $f(X_n) = f(Y_n) + f(X_1 \cdot X_n + \cdots + X_{n-1} \cdot X_n)$. Ahora, los conjuntos $X_1 \cdot X_n, \ldots, X_{n-1} \cdot X_n$ pertenecen a $\mathbf{I}$; por 2.5, también $X_1 \cdot X_n + \cdots + X_{n-1} \cdot X_n$ pertenece a $\mathbf{I}$, así que $f(X_1 \cdot X_n + \cdots + X_{n-1} \cdot X_n) = 0$. Por consiguiente, ocurre $f(X_n) = f(Y_n) \geq \varepsilon$ para cada n; ya que los conjuntos $Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$ son ajenos entre sí, de 5.1(ii) se deduce que $f(Y_1 + \cdots + Y_n) = f(Y_1) + \cdots + f(Y_n) \geq n \cdot \varepsilon$. Con ayuda de 5.1(i), (ii) de esto se logra: $f(\sum(\mathbf{K})) \geq n \cdot \varepsilon$; como esto se cumple para cada natural n, $f(\sum(\mathbf{K}))$ no puede ser un número real (finito), en contradicción con 5.1(i). Esto se opone a nuestra hipótesis y queda demostrado (ii).

Lema 5.3. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo arbitrario y* $\mathbf{I} \in \mathcal{S}_{\aleph_0}(\mathbf{K})$*, entonces existe un sistema finito* $\mathbf{S} \subset \mathbf{K} - \mathbf{I}$ *de conjuntos ajenos entre sí que satisface la siguiente condición: a todo conjunto* $X \in \mathbf{K}$ *le corresponde exactamente un sistema* $\mathbf{Y} \subset \mathbf{S}$ *tal que* $X - \sum(\mathbf{Y}) \in \mathbf{I}$ *y* $\sum(\mathbf{Y}) - X \in \mathbf{I}$*.*

Demostración. Sea $\mathfrak{p}$ el menor número para el que $\mathbf{I} \in \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})$; de 4.2 y 4.5 se obtiene que $1 \leq \mathfrak{p} < \aleph_0$. Según 4.7 existe un sistema $\mathbf{S} \subset \mathbf{K} - \mathbf{I}$ que consiste en $\mathfrak{p} - 1$ conjuntos ajenos entre sí; pero no existe tal sistema de cardinalidad $> \mathfrak{p} - 1$. Considere un conjunto arbitrario $X \in \mathbf{K}$ y hacemos

$$\mathbf{Y} = \underset{Z}{E}[Z \in \mathbf{S} \text{ y } Z - X \in \mathbf{I}]. \tag{1}$$

Como se muestra con facilidada, ocurre

$$X - \sum(\mathbf{S}) \in \mathbf{I}; \tag{2}$$

de lo contrario, tendríamos $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S} + \{X - \sum(\mathbf{S})\}$ un sistema $\subset \mathbf{K} - \mathbf{I}$ de conjuntos ajenos entre sí de cardinalidad $|\mathbf{S}| > \mathfrak{p} - 1$. En forma análoga se concluye de (1):

$$X \cdot Z \in \mathbf{I} \quad \text{para cada} \quad Z \in \mathbf{S} - \mathbf{Y}. \tag{3}$$

Ya que $\mathbf{S}$ es finito y

$$X - \sum(\mathbf{Y}) \subset X - \sum(\mathbf{S}) + \sum_{Z \in \mathbf{S}-\mathbf{Y}} (X \cdot Z),$$

entonces de (1) y (2) con ayuda de 2.4 y 2.5 deducimos: $X - \sum(\mathbf{Y}) \in \mathbf{I}$. De (1) y 2.5 se obtiene además que $\sum(\mathbf{Y}) - X \in \mathbf{I}$.

Ahora sea $\mathbf{Y}_1$ otro subsistema de $\mathbf{S}_1$ para el que $X - \sum(\mathbf{Y}_1) \in \mathbf{I}$ y $\sum(\mathbf{Y}_1) - X \in \mathbf{I}$. Entonces es claro que

$$\sum(\mathbf{Y}) - \sum(\mathbf{Y}_1) \subset \left(\sum(\mathbf{Y}) - X\right) + (X - \sum(\mathbf{Y}_1)) \in \mathbf{I},$$

por consiguiente $\sum(\mathbf{Y}) - \sum(\mathbf{Y}_1) \in \mathbf{I}$ y análogamente $\sum(\mathbf{Y}_1) - \sum(\mathbf{Y}) \in \mathbf{I}$. Puesto que el sistema $\mathbf{Y} + \mathbf{Y}_1 \subset \mathbf{K} - \mathbf{I}$ consiste en conjuntos ajenos entre sí, con esto logramos sin dificultad $\mathbf{Y} \subset \mathbf{Y}_1 \subset \mathbf{Y}$, es decir, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1$.

Por tanto, a cada conjunto $X \in \mathbf{K}$ le corresponde exactamente un sistema $\mathbf{Y} \subset \mathbf{S}$, para el que $X - \sum(\mathbf{Y}), \sum(\mathbf{Y}) - X \in \mathbf{I}$; el sistema $\mathcal{S}$ tiene entonces las propiedades requeridas.

Teorema 5.4. *Con las hipótesis de 5.2, para que la función f tome sólo una cantidad finita de valores distintos, respectivamente sólo dos distintos, es necesario y suficiente que $\mathbf{I} \in \mathcal{S}_{\aleph_0}(\mathbf{K})$, respectivamente $\mathbf{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$.*

Demostración. Supongamos adicionalmente que f sólo toma una cantidad finita de valores distintos. Sea a el menor y b el mayor número $x \neq 0$ para el que existe un conjunto $X \in \mathbf{K}$ con $f(X) = x$. Ahora, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una sucesión arbitraria de caonjuntos ajenos entre sí del sistema $\mathbf{K} - \mathbf{I}$, por 5.1(ii) ocurre claramente

$$b \geq f(X_1 + \cdots + X_n) = f(X_1) + \cdots + f(X_n) \geq n \cdot a,$$

donde $n \geq b/a$. De esto se obtiene fácilmente que no existe un sistema infinito de conjuntos ajenos entre sí; por 4.7 ocurre entonces $\mathbf{I} \in \mathcal{S}_{\aleph_0}(\mathbf{K})$.

Si, recíprocamente, $\mathbf{I} \in \mathcal{S}_{\aleph_0}(\mathbf{K})$, existe un sistema finito $\mathbf{S} \subset \mathbf{K}$ que satisface la conclusión de 5.3: a cada conjunto $X \in \mathbf{K}$ corresponde un sistema $\mathbf{Y} \subset \mathbf{S}$ para el que $X - \sum(\mathbf{Y}) \in \mathbf{I}$ y $\sum(\mathbf{Y}) - X \in \mathbf{I}$. En consonancia con 5.1(ii) de desprende de esto que:

$$f(X) = f(X \cdot \sum(\mathbf{Y})) + f(X - \sum(\mathbf{Y})) = f(X \cdot \sum(\mathbf{Y}))$$

y

$$f\left(\sum(\mathbf{Y})\right) = f\left(X \cdot \sum(\mathbf{Y})\right) + f\left(\sum(\mathbf{Y}) - X\right) = f\left(X \cdot \sum(\mathbf{Y})\right),$$

de donde $f(X) = f(\sum(\mathbf{Y}))$. El contradominio de f es entonces finito: consiste en los números $f(\sum(\mathbf{Y}))$, donde $\mathbf{Y} \subset \mathbf{S}$.

En el caso en que f sólo tome dos valores, respectivamente $\mathbf{I}$ es un ideal primo, el raonamiento es análogo, pero más sencillo (en lugar de 5.3, uno se apoya directamente en la definición 3.1). Con esto concluye la demostración.

El teorema 5.4 permite un recíproco en cierto sentido:

Teorema 5.5. *Sea* $\mathbf{K}$ *un cuerpo arbitrario. Si* $\mathbf{I} \in \mathcal{S}_{\aleph_0}(\mathbf{K})$, $\mathbf{I} \neq \mathbf{K}$ *y* $At(\mathbf{K}) \subset \mathbf{I}$*, existe una función medida* f *en* $\mathbf{K}$ *para la que* $\mathbf{I} = E_X[f(X) = 0]$*. En particular,* $\mathbf{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$ *y* $At(\mathbf{K}) \subset \mathbf{I}$*, así que la función medida* f *se puede determinar mediante las fórmulas:*

$$f(X) = 0 \quad para\ X \in \mathbf{I}, \quad f(X) = 1 \quad para\ X \in \mathbf{K} - \mathbf{I}.$$

Demostración. Sea $\mathbf{S}$ un sistema que satisface la afirmación de 5.3. Arbitrariamente asociamos a cada conjunto $Z \in \mathbf{S}$ un número $f(Z) > 0$ y ponemos: $f(X) = \sum_{Z \in \mathbf{Y}} f(Z)$ para $X \in \mathbf{K} - \mathbf{S}$, donde $\mathbf{Y}$ es aquel subsistema de $\mathbf{S}$ para el que $X - \sum(\mathbf{Y}), \sum(\mathbf{Y}) - X \in \mathbf{I}$ (cuando, en particular, $X \in \mathbf{I}$, entonces, como se corrobora con facilidad, $\mathbf{Y} = 0$, por lo que $f(X) = 0$). Sin dificultad se muestra, en base a 5.1, que la función así determinada f es una función medida en $\mathbf{K}$ y que $\mathbf{I} = \mathrm{E}_X[f(X) = 0]$, l.q.q.d.

Observación 5.6. Si se analizan las demostraciones de 5.4 y 5.3 con más detalle, se observa que ambos teoremas se pueden formular con más precisión. A saber, si f es una función medida en $\mathbf{K}$ y $\mathfrak{p}$ el menor número cardinal $\leq \aleph_0$ para el que $\mathbf{I} = \mathrm{E}_X[f(X) = 0] \in \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{K})$, entonces el rango de f tiene cardinalidad $\geq \mathfrak{p}$ y $\leq 2^{\mathfrak{p}-1}$; y de hecho, para cada número $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{m} \leq 2^{\mathfrak{p}-1}$ se puede dar una función medida f que toma exactamente $\mathfrak{m}$ valores distintos.

El problema de si en 5.5 se puede sustituir $\aleph_0$ por $\aleph_1$ está abierto aún.

Teorema 5.7. *Para cada cuerpo* $\mathbf{K}$ *las siguientes condiciones son equivalentes: (i) existe una función medida en* $\mathbf{K}$*; (ii) existe una función medida en* $\mathbf{K}$ *que sólo toma dos valores distintos; (iii) existe un sisema indfinito* $\mathbf{S} \subset \mathbf{K}$ *de conjuntos ajenos entre sí y un conjunto* $X \in \mathbf{K}$ *para los que* $\sum(\mathbf{S}) \subset X$*. Todas estas condiciones se satisfacen, cuando* $\mathbf{K}$ *es infinito y* $\sum(\mathbf{K})$ *pertenece a* $\mathbf{K}$.

[Por 3.15, 5.2(i), 5.5].

Observación 5.8. En 5.1 se puede sustituir la condición (iv) por la siguiente condición:

(iv') si $X, Y \in At(\mathbf{K})$, entonces $f(X) = f(Y)$.

La condición (iv) y la (iv') son equivalentes, cuando $\mathbf{K}$ contiene una cantidad infinita de átomos. No obstante, (iv') es, en general, más débil que (iv); como se muestra fácilmente, en cada cuerpo finito existen funciones que satisfacen las condiciones (i)-(iii) y (iv'), mientras que, por 5.17, sólo pueden existir funciones medida en el sentido original en cuerpos infinitos.

De 5.7 se deduce, en particular, la existencia de una función medida en cada cuerpo completo infinito. Pero se puede ir más alla, a saber, determinar la cantidad de funciones medida:

Teorema 5.9. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo y* $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t} \geq \aleph_0$*, entonces tanto el sistema* $\mathcal{M}$ *de las funciones de medida en* $\mathbf{K}$ *como el sistema* $\mathcal{M}_1$ *de aquellas funciones de medida que sólo toman* *dos valores, tienen cardinalidad*[1] $2^{2^{\mathfrak{t}}}$.

Demostración. Como consecuencia del teorema 3.6 en cada cuerpo completo $\mathbf{K}$ coincide el sistema de ideales primos que contienen los átomos de $\mathbf{K}$ con $\mathcal{P}(\mathbf{K}) - \mathcal{H}(\mathbf{K})$. De acuerdo con 5.5 se puede asociar unívocamente a cada ideal $\mathbf{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{K}) - \mathcal{H}(\mathbf{K})$ una función $f \in \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$, de donde $|\mathcal{P}(\mathbf{K}) - \mathcal{H}(\mathbf{K})| \leq |\mathcal{M}_1| \leq |\mathcal{M}|$. Por 3.7 y 3.19 $|\mathcal{P}(\mathbf{K}) - \mathcal{H}(\mathbf{K})| = 2^{2^{\mathfrak{t}}} - \mathfrak{t} = 2^{2^{\mathfrak{t}}}$, así que además $2^{2^{\mathfrak{t}}} \leq |\mathcal{M}_1| \leq |\mathcal{M}|$. Según los teoremas generales de la teoría de conjuntos, por otro lado, el sistema de funciones cuyo dominio es $\mathbf{K}$ y contradominio el conjunto de los números reales tiene cardinalidad $\mathfrak{c}^{2^{\mathfrak{t}}} = 2^{\aleph_0 \cdot 2^{\tau}} = 2^{2^{\mathfrak{t}}}$. De esto se sigue que $|\mathcal{M}| \leq 2^{2^{\mathfrak{t}}}$ y finalmente $|\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| = 2^{2^{\mathfrak{t}}}$ l.q.q.d.

Observación 5.10. Una función medida f en un cuerpo $\mathbf{K}$ es absoluta (o numerablemente) aditiva si junto con las condiciones (i)-(iv) de 5.1 también satisface la siguiente condición (una mejora de 5.1(ii)):

(ii') si $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ es una sucesión infinita de conjuntos ajenos entre sí del cuerpo $\mathbf{K}$, entonces $X_1 + \cdots + X_n \cdots \in \mathbf{K}$ y $f(X_1 + \cdots + X_n + \cdots) = f(X_1) + \cdots + f(X_n) + \cdots$.

Con las hipótesis de 5.2 la condición: $\mathbf{I} \in \mathcal{A}_{\aleph_1}(\mathbf{K})$ es claramente necesaria para que la función medida f sea absoluta aditiva. Cuando el cuerpo $\mathbf{K}$ es $\aleph_1$-aditivo y f sólo toma una cantidad finita de valores, con ayuda de 5.3 se puede mostrar que esta condición también es suficiente; esto nos permite extender el teorema 5.5 a funciones medida absoluto aditivas. En cambio el problema mencionada al final de 5.6 se resuelve en forma negativa para funciones medida absoluto aditivas: se puede dar un cuerpo $\mathbf{K}$ ($\aleph_1$-aditivo) y un ideal $\mathbf{I} \in \mathcal{A}_{\aleph_1}(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{S}_{\aleph_1}(\mathbf{K})$ tales que no existe ninguna función medida f absoluto aditiva en $\mathbf{K}$ para la que $\mathbf{I} \subset \mathrm{E}_X[f(X) = 0]$ (esto se cumple, por ejemplo, para el cuerpo de los conjuntos de Borel de un espacio euclideano y para el ideal $\mathbf{I}$ de los conjuntos de Borel de la primera categoría).[2]

El teorema 5.7 se puede completar de la siguiente forma:

Para que exista una función medida (finita) no absoluto aditiva en un cuerpo dado $\mathbf{K}$ *es necesario y suficiente que exista una sucesión infinita de conjuntos no vacíos ajenos entre sí* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \in \mathbf{K}$ *y un conjunto* $Y \in \mathbf{K}$ *tal que* $X_1 + \cdots + X_n + \cdots \subset Y$.

En cambio, no se ha producido un criterio general para asegurar la existencia de funciones medida absoluto aditivas. No obstante, se dispone de ciertos teoremas sobre la no existencia de tales funciones en cuerpos de conjuntos completos; estos teoremas se pueden derivar fácilmente de[3] 4.14 ($\mathfrak{m} = \aleph_1$, $\mathfrak{p} = \aleph_0$) y 4.15 ($\mathfrak{m} = \aleph_1$).

§6. Aplicaciones a la topología.

Para concluir queremos indicar algunas aplicaciones topológicas de los resultados de §§ 2 y 3.

Para ello requerimos la noción de isomorfía de dos cuerpos de conjuntos.

[1]Para $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}$ este teorema lo demostraron (con restricciones en el sistema $\mathcal{M}$) G. Fichtenholz y L. Kantorowitch en Stud. Math. **5**(1934), págs. 83 y siguientes.

[2]Esto se deduce de las investigaciones de E. Szpilrajn en Fund. Math. **21**(1933), págs. 226 y siguientes, y Fund. Math. **22**(1934), págs. 304 y siguientes.

[3]Véase pág. 132 nota de pie de página 2.

Definición 6.1. Se dice que la función F es un isomorfismo entre los cuerpos $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$, cuado el dominio de F es $\mathbf{K}_1$, el rango es $\mathbf{K}_2$ y las fórmulas: $X \subset Y$ y $F(X) \subset F(Y)$ son equivalentes para $X, Y \in \mathbf{K}_1$ arbitrario. Si existe una función F con esta propiedad, los cuerpos $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ se dicen isomorfos.

Corolario 6.2. *Cada función F que sea un isomorfismo entre los cuerpos $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ es biunívoca; si $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ son isomorfos, entonces $|\mathbf{K}_1| = |\mathbf{K}_2||$.*

[Por 6.1].

Corolario 6.3. Todo cuerpo $\mathbf{K}$ es isomorfo a sí mismo; si $\mathbf{K}_1$ es isomorfo a $\mathbf{K}_2$, también $\mathbf{K}_2$ lo es a $\mathbf{K}_1$; si $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ son isomorfos a $\mathbf{K}_3$, entonces son isomorfos entre sí.

[Por 6.1, 6.2].

Teorema 6.4. *Sea $\mathbf{K}_1$ un cuerpo arbitrario y $\mathbf{K}_2$ uno completo. Para que $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ sean isomorfos, es necesario y suficiente que satisfagen las siguientes condiciones:*

(i) *para cada conjunto no vacío $X \in \mathbf{K}_1$ existe un conjunto $Y \in At(\mathbf{K}_1)$, para el que $Y \subset X$;*

(ii) *para cada sistema $\mathbf{S} \subset \mathbf{K}_1$ existe un menor conjunto $X \in \mathbf{K}_1$ para el que $\mathbf{S} \subset E_Y[Y \subset X]$;*

(iii) $|At(\mathbf{K}_1)| = |\sum(\mathbf{K}_2)|$.

El teorema es conocido y su demostración sencilla.[1]

Observación 6.5. Un cuerpo que satisface la condición 6.4(i) se llama atómico; un cuerpo que satisface 6.4(ii) se puede nombrar absoluto aditivo (en el sentido amplio).

Corolario 6.6. Para que dos cuerpos completos $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ sean isomorfos es necesario y suficiente que $|\sum(\mathbf{K}_1)| = |\sum(\mathbf{K}_2)|$.

[Por 2.3, 6.4].

En lo sucesivo tendremos que tratar con ciertas nociones topológicas.[2] Llamamos a un conjunto R un espacio topológico, cuando a cada punto $x \in R$ le podemos asociar un sistema U_x de conjuntos $X \subset R$, llamados vecindades del punto x, de tal suerte que que se satisfagan los cuatro axiomas de Hausdorff. Con ayuda del concepto de vecindad se definen en forma cocnocida otras nociones topológicas. En particular, denotamos con $\overline{X}$ la cerradura de un conjunto $X \subset R$, con $Is(X)$ el conjunto de puntos aislados de X, con $\mathbf{F}(R)$, respectivamente $\mathbf{G}(R)$, el sistema de conjuntos cerrados, respectivamente abiertos $X \subset R$. También la noción de homeomorfismo entre dos espacios se supone conocida.

Nos interesarán espacios topológicos que satisfacen una o más de las siguientes condiciones:

[1]Véase mi trabajo en Fund. Math. **24**(1935), pág. 197 y siguiente.

[2]Para lo siguiente véase F. Hausorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, pág. 209 y siguientes. Todos los teoremas dados abajo se cumplen, por cierto, también para aquellos espacios en los que se cumplen los axiomas I-III de C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Mat. **8**, Warszawa-Lwow 1933, pág. 15.

$\mathfrak{B}_1$. Para cada sistema $\mathbf{S} \subset \mathbf{G}(R)$ con $\sum(\mathbf{S}) = R$ existe un subsistema finito $\mathbf{S}_1$ tal que $\sum(\mathbf{S}_1) = R$.

$\mathfrak{B}_2$. Para cualesquier conjuntos ajenos $X, Y \in \mathbf{F}(R)$ existe un conjunto $Z \in \mathbf{G}(R)$ para el que $X \subset Z$ y $Y \cdot \overline{Z} = 0$.

$\mathfrak{B}_2'$. Para cualesquier conjuntos ajenos $X, Y \in \mathbf{F}(R)$ existe un conjunto $Z \in \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$ para el que $X \subset Z$ y $Y \cdot Z = 0$.

$\mathfrak{B}_3$. Si $X \in \mathbf{G}(R)$, también $\overline{X} \in \mathbf{G}(R)$.

$\mathfrak{B}_3'$. Para cada sistema $\mathbf{S} \subset \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$ existe el menor conjunto $X \in \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$ para el que $\sum(S) \subset X$.

$\mathfrak{B}_4$. $\overline{Is(R)} = R$ (con otras palabras el conjunto $Is(R)$ es denso en el espacio R).

Un espacio topológico que satisface la condición $\mathfrak{B}_1$, respectivamente $\mathfrak{B}_2$, respectivamente $\mathfrak{B}_2'$, se llama *bicompacto*, respectivamente *normal*, respectivamente *0-dimensional*.

Lema 6.7. *Todo espacio topológico R que satisface las condiiones $\mathfrak{B}_2$ y $\mathfrak{B}_3$, también cumple con $\mathfrak{B}_2'$ y $\mathfrak{B}_3'$ y viceversa.*

Demostración. Supongamos que R satisface $\mathfrak{B}_2$ y $\mathfrak{B}_3$. Si $X, Y \in \mathbf{F}(R)$ y $X \cdot Y = 0$, por $\mathfrak{B}_2$ existe un conjunto $Z \in \mathbf{G}(R)$ para el que $X \subset Z$ y $Y \cdot \overline{Z} = 0$; según $\mathfrak{B}_3$ se tiene: $\overline{Z} \in \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$, $X \subset \overline{Z}$ y $Y \cdot \overline{Z} = 0$ y se satisface $\mathfrak{B}_2'$. Si además $\mathbf{S} \subset \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$, hacemos $X = \overline{\sum(\mathbf{S})}$ y se muestra fácilmente con ayuda de $\mathfrak{B}_3$, que X es el menor conjunto del sistema $\mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$ para el que ocurre $\sum(\mathbf{S}) \subset X$; con ello logramos $\mathfrak{B}_3'$.

Ahora supongamos que R satisface $\mathfrak{B}_2'$ y $\mathfrak{B}_3'$. De $\mathfrak{B}_2'$ se obtiene inmediatamente $\mathfrak{B}_2$. Para derivar $\mathfrak{B}_3$ consideremos un conjunto arbitrario $X \in \mathbf{G}(R)$; sea $\mathbf{S} = \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R) \cdot \mathrm{E}_Y[Y \subset X]$. Por $\mathfrak{B}_3'$ existe el menor $X_1 \in \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$, para el que $\sum(S) \subset X_1$. Supongamos que $X \not\subseteq X_1$. Entonces existe un elemento $x \in X - X_1$. Claramente se cumple $X - X_1 \in \mathbf{G}(R)$, por consiguiente $R - (X - X_1) \in \mathbf{F}(R)$ y también $\{x\} \in \mathbf{F}(R)$; los conjuntos $\{x\}$ y $R - (X - X_1)$ son ajenos. Por $\mathfrak{B}_2'$ existe un conjunto $Z \in \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$, pra el que $\{x\} \subset Z$ y $[R - (X - X_1)] \cdot Z = 0$. De esto se logra: $Z \neq 0$, $Z \subset X$ y $Z \cdot X_1 = 0$, de donde $Z \in \mathbf{S}$ y $Z \not\subseteq X_1$; pero esto es imposible ya que X_1 contiene los conjuntos del sistema $\mathbf{S}$. Hemos encontrado una contradicción a nuestra hipótesis y se cumple $X \subset X_1$; de esto se obtiene $\overline{X} \subset \overline{X_1} = X_1$ (ya que X_1 es cerrado). En forma análoga se puede lograr la inclusión inversa $X_1 \subset \overline{X}$ (si esto no se cumpliese, se podría construir un conjunto no vacío abierto y cerrado $Z \subset X \cdot X_1 \subset X_1 - Z$; lo cual es imposible, pues X_1 es el menor abierto y cerrado para el que $\sum(\mathbf{S}) \subset Z$). Las contenciones $\overline{X} \subset X_1$ y $X_1\overline{X}$ dan paso de inmediato a $\overline{X} = X_1$; así $\overline{X} \in \mathbf{G}(R)$. El espacio R satisface entonces la condición $\mathfrak{B}_3$, y concluye la demostración.

La posibilidad de aplicar la teoría de cuerpos de conjuntos a la topología se origina en los trabajos de Stone[1] Establecemos aquí los resultados reqeridos de Stone (están ligados al hecho elemental de que

[1]Véase M. H. Stone, Proc. Nat. Ac. Sc. **20**(1934), pág. 198, Teorema IV(1)-IV(2). Stone no menciona espacios 0-dimenscionales en el sentido de $\mathfrak{B}_3'$, sino de espacios totalmente disconexos; véase A. Mostowski, Fund. Math. **29**(1937), pág. 45, corolario 3c. En un trabajo nuevo de Stone, Trans. Am. Math. Soc. **41**(1937), pág. 375 y siguientes se encuentra una formulación más general del los resultados en cuestión.

en cada espacio topológico el sistema de conjuntos cerrados-abiertos conforman un cuerpo).

Teorema 6.8. *Sea* $\mathbf{K}$ *un cuerpo arbitrario que contiene a* $\sum(\mathbf{K})$ *como elemento. Hacemos:* $\mathcal{F}(X) = E_{\mathbf{I}}[\mathbf{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$ *y* $X \notin \mathbf{I}]$ *para cada* $X \in \mathbf{K}$ *y designamos como una vecindad de un ideal* $\mathbf{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{K})$ *cada conjunto* $\mathcal{U} = \mathcal{F}(X)$*, donde* $X \in \mathbf{K} - \mathbf{I}$*. Con esta convención, el conjunto* $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathbf{K})$ *se convierte en un espacio topológico 0-dimensional bicompacto; mediante la función* $\mathcal{F}$ *se establece un isomorfismo entre* $\mathbf{K}$ *y el cuerpo* $\mathbf{F}(\mathcal{R}) \cdot \mathbf{G}(\mathcal{R})$*.*

Teorema 6.9. *Si las hipótesis de 6.8 se satisfacen y hacemos* $\mathcal{G}(\mathbf{I}) = \sum_{X \in \mathbf{I}} \mathcal{F}(X)$ *para cada* $\mathbf{I} \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$*, entonces mediante la función* $\mathcal{G}$ *se aplica el sistema* $\mathcal{I}(\mathbf{K})$ *sobre el sistema* $\mathbf{G}(\mathcal{R})$ *en forma unívoca.*

Teorema 6.10. *Dos espacios topológicos 0-dimensionales bicompactos* R_1 *y* R_2 *son homeomorfos si y sólo si los cuerpos* $\mathbf{F}(R_1) \cdot \mathbf{G}(R_1)$ *y* $\mathbf{F}(R_2) \cdot \mathbf{G}(R_2)$ *son isomorfos.*

Ahora pretendemos establecer algunas propiedades de aquellos espacios topológicos, que por 6.8 están asociados a cuerpos completos. Lo primero que resalta es que para estos espacios las condiciones antes mencionadas $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_4$ son características (véase 6.12).

Lema 6.11. *Para cada espacio topológico 0-dimensional se cumple:*

(i) $At\,(\mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)) = E_{\{x\}}[x \in Is(R)]$;

(ii) El cuerpo $\mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$ *es isomorfo al cuerpo completo* $\mathbf{K}$ *si y sólo si* R *satisface las condiciones* $\mathfrak{B}_3$ *(respectivamente* $\mathfrak{B}_3'$*) y* $\mathfrak{B}_4$ *y donde* $|Is(R)| = |\sum(\mathbf{K})|$*.*

Demostración. Considerando 2.2 se cumple, primero, para un espacio R totalmente general:

(1) $\mathrm{E}_{\{x\}}[x \in Is(R)] \subset At(\mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R))$.

Si R es 0-dimensional, se cumple además:

(2) en cada conjunto no vacío $X \in \mathbf{G}(R)$ está contenido en un conjunto $Z \in \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$; cuando X consiste en más de un punto, entonces $Z \neq X$.

Si X, consiste en un sólo punto, entonces $X \in \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$ y hacemos simplemente $Z = X$. Pero si X contiene dos puntos distintos, digamos x, y, entonces $\{x\}$ y $R - X + \{y\}$ son conjuntos cerrados ajenos; por $\mathfrak{B}_2'$ existe un conjunto $Z \in \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$, para el que $\{x\} \subset Z$ y $(R - X + \{y\}) \cdot Z = 0$, por consiguiente $Z \neq 0$, $Z \subset X$ y $Z \neq X$.

De (1) y (2) se logra de inmediato con ayuda de 2.2 la primera parte de la afirmación. Para obtener la segunda parte, empleamos 6.4 con el cuerpo $\mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)$ y $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}$. Teniendo en cuenta (2) y la primera parte de la afirmación transformamos 6.4(i) en $\mathfrak{B}_4$ y 6.4(iii) en la fórmula: $|Is(R)| = |\sum(\mathbf{K})|$; 6.4(ii) coincide con la condición $\mathfrak{B}_3'$ que, para espacios 0-dimensionales es equivalente a $\mathfrak{B}_3$ (véase 6.7). Con esto queda demostrado el teorema.

Teorema 6.12. *Si* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo completo y se satisfacen las hipótesis de 6.8, entonces el espacio* $\mathcal{R}$ *satisface las condiciones* $\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_4$ *y ocurre* $|Is(\mathcal{R})| = |\sum(\mathbf{K})|$*.*

[Por 6.7, 6.8, 6.11].

Corolario[1] **6.13.** *Para cada número cardnal* $\mathfrak{t}$ *existe un espacio topólogico* R*, que satisface las condiciones* $\mathfrak{B}_1$*-*$\mathfrak{B}_4$ *y para el que se cumple* $|Is(R)| = \mathfrak{t}$*.*

[Por 6.12].

En particular, si hacemos $\mathfrak{t} = \aleph_0$ en este corolario, se logra un ejemplo de un espacio topológico separable normal no metrizable.

Teorema 6.14. *Dos espacios topólogicos* R_1 *y* R_2 *que satisfagan las condiciones* $\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_4$ *son homeomorfos si y sólo si* $|Is(R_1)| = |Is(R_2)|$*.*

Demostración. Sean $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ dos cuerpos completos para los que se cumple:

(1) $|Is(R_1)| = |\sum(\mathbf{K}_1)|$ y $|Is(R_2)| = |\sum(\mathbf{K}_2)|$.

De 6.7, 6.11 y (1) se deduce:

(2) $\mathbf{K}_1$ es isomorfo a $\mathbf{F}(R_1)\cdot\mathbf{G}(R_1)$ y $\mathbf{K}_2$ a $\mathbf{F}(R_2)\cdot\mathbf{G}(R_2)$.

Ahora consideremos las siguientes condiciones: (i) R_1 y R_2 son homeomorfos; (ii) $\mathbf{F}(R_1)\cdot\mathbf{G}(R_1)$ y $\mathbf{F}(R_2)\cdot\mathbf{G}(R_2)$ son isomorfos, (iii) $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ son isomorfos, (iv) $|Is(R_1)| = |Is(R_2)|$. Por 6.10 y 6.7 son (i) y (ii) equivalentes; por 6.3 y (2) son (iii) y (iv) equivalentes; de 6.6 y (1) se obtiene finalmente la equivalencia de (iii) y (iv). Por tanto, (i) y (iv) también son equivalentes, l.q.q.d.

Teorema 6.15. *Si el espacio topológico* R *satisface las condiciones* $\mathfrak{B}_1$*-*$\mathfrak{B}_4$ *y* $|Is(R)| = \mathfrak{t} \geq \aleph_0$*, entonces* $|R| = |\mathbf{F}(R)| = |\mathbf{G}(R)| = 2^{2^{\mathfrak{t}}}$ *y* $|\mathbf{F}(\mathbf{K})\cdot\mathbf{G}(R)| = 2^{\mathfrak{t}}$*.*

Demostración. Sea $\mathbf{K}$ un cuerpo completo con $|\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t}$; construiremos el espacio topológico $\mathcal{R}$ que satisface la afirmación de 6.8. Ya que $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathbf{K})$, por 3.19 $|\mathcal{R}| = 2^{2^{\mathfrak{t}}}$. El cuerpo $\mathbf{K}$ es isomorfo a $\mathbf{F}(\mathcal{R})\cdot\mathbf{G}(\mathcal{R})$; por 6.2 se cumple también $|\mathbf{F}(\mathcal{R})\cdot\mathbf{G}(\mathcal{R})| = 2^{\mathfrak{t}}$. De 6.9 se sigue además que $|\mathbf{F}(\mathcal{R})| = |\mathbf{G}(\mathcal{R}) = |\mathcal{T}(\mathcal{R})|$; considerando 2.29 se deduce que $|\mathcal{F}(R)| = |\mathcal{G}(R)| = 2^{2^{\mathfrak{t}}}$.

De acuerdo con el teorema 6.12 $\mathcal{R}$ satisface, por otro lado, las condiciones $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_4$ y se tiene $|Is(\mathcal{R})| = |\sum(\mathbf{K})| = \mathfrak{t}$, de donde se sigue $|Is(R)| = |Is(\mathcal{R})|$. Los espacios R y $\mathcal{R}$ son entonces, por 6.14, homeomorfos y con mayor razón equipotentes; igualmente los sistemas correspondientes $\mathbf{G}(R)$ y $\mathbf{G}(\mathcal{R})$, $\mathbf{F}(R)$ y $\mathbf{F}(\mathcal{R})$, etc. tiene la misma cardinalidad. De esto se deduce inmediatamente la afirmación del teorema en cuestión.

[1]Para los teoremas 6.13-6.15 véase la primera parte de la obra presente, pág. 113 nota de pie de página 1, junto con los trabajos ahí mencionados de Čech y Pospíšil, aquí un trabajo nuevo de Pospíšil: *On bicompact spaces*, Publ. Naturwiss. Fak. Brunn **270**(1939): en este trabajo se encuentran algunos teoremas de los resultados topológicos de naturaleza algebraica, que se pueden ver como generalizaciones de 2.29 y 3.19 (véase la primera parte del presente trabajo).

Observación 6.16. El caso $\mathfrak{t} < \aleph_0$ es trivial: en tal caso se tiene $R = Is(R)$ y $\mathbf{F}(R) = \mathbf{G}(R) = \mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R) = \mathrm{E}_X[X \subset R]$, por consiguiente $|R| = \mathfrak{t}$ y

$$|\mathbf{F}(R)| = |\mathbf{G}(R)| = |\mathbf{F}(R) \cdot \mathbf{G}(R)| = 2^{\mathfrak{t}}.$$

En relación con 6.14 se origina la pregunta de si en este teorema se puede sustituir la fórmula : $|Is(R_1)| = |Is(R_2)|$ por $|R_1| = |R_2|$. Para concluir queremos mostrar que este problema es equivalente a un problema indecidible de la aritmética cardinal:

Teorema 6.17.*Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) dos espacios topológicos arbitrarios R_1 y R_2 que satisfagan las condiciones $\mathfrak{B}_1$- $\mathfrak{B}_4$ y que sean equipotentes son homeomorfos;

(ii) Si $\mathfrak{t}_1$ y $\mathfrak{t}_2$ son dos números cardinales y ocurre $2^{\mathfrak{t}_1} = 2^{\mathfrak{t}_2}$, entonces $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2$.

Demostración. Supongamos que se cumple (i). Sea $2^{\mathfrak{t}_1} = 2^{\mathfrak{t}_2}$. Si $\mathfrak{t}_1 < \aleph_0$ o $\mathfrak{t}_2 < \aleph_0$, claramente se cumple $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2$. Pero si $\mathfrak{t}_1 \geq \aleph_0$ y $\mathfrak{t}_2 \geq \aleph_0$, deducimos de 6.13 y 6.15 que existen dos espacios topológicos R_1 y R_2 que satisfacen $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_4$ y para los que $|Is(R_2)| = \mathfrak{t}_1$, $|Is(R_2)| = \mathfrak{t}_2$, $|R_1| = 2^{2^{\mathfrak{t}_1}}$ y $|R_2| = 2^{2^{\mathfrak{t}_2}}$. Ya que $2^{2^{\mathfrak{t}_1}} = 2^{2^{\mathfrak{t}_2}}$, entonces R_1 y R_2 son equipotentes; por (i) son homeomorfos. Considerando 6.14 se sigue que $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2$; con esto logramos (ii). En forma enteramente análoga se deriva (ii) de (i).