XVI

Mahlo: Sobre Conjuntos Lineales Transfinitos

Título original: Über lineare transfinite Mengen
Von Paul Mahlo
Berichte Königl. Ges. Wiss. zu Leipzig Math. Kl. **63**(1911), 187-225.

Considerando el desarrollo actual de la teoría de conjuntos, aun quedan sin resolverse muchas de las preguntas más importantes. Entre ellas el problema de la cardinalidad, ciertas paradojas y la admisibilidad del axioma de elección. Por ello aparecen no totalmente inútiles investigaciones, como la siguiente que en su mayor parte consideran la aplicación de conjuntos lineales con subconjuntos bien ordenados de cardinalidad arbitrariamente grande. Si suponemos que los conjuntos considerados no contienen subconjuntos de tipo ω_λ o ω_λ^*, si ω_λ es un número inicial suficientemente grande, entonces aparecen muchos problemas para los cuales el uso del axioma de elección parece no generar objeciones. Por el contrario, se hace aparente que muchas demostraciones no se pueden llevar a cabo cuando involucran ciertos números transfinitos, hasta ahora desconocidos, que se investigarán en el capítulo II, los ρ_0-números. En tal caso, el éxito de elecciones arbitrarias repetidas es difícil de sobrestimar. Así, en los teoremas 16, 17 y 24 existen excepciones condicionadas por ρ_0-números, cuya real veracidad no podemos probar. La existencia misma de los ρ_0-números es aceptable, naturalmente sólo cuando no conduce a contradicciones, y parece que es este el caso.– Las propiedades de límite se toman en forma relativa, en el sentido de que existe la posibilidad sin restricción de colocar elementos entre un conjunto bien ordenado que no tenga un mayor elemento, y su límite.

Puesto que el contenido de cada capítulo se bosqueja al inicio del mismo, se hará aquí una breve revisión sobre el contenido. El capítulo I presente las definiciones de algunas nociones cuyo uso no es aún generalizado, mientras que otras definiciones están dispersas en el texto. El siguiente capítulo se dedica al estudio de números iniciales regulares; mediante su clasificación en varias clases logramos conocer una de sus propiedades características, cuya ausencia sirve para definir los ρ_0-números. Los capítulos III y IV se dedican a los conjuntos densos. Investigamos en el capítulo III propiedades tales como cuándo un conjunto denso se corresponde siempre (respectivamente, no necesariamente) con sus propias secciones infinitas. Despues de que intentemos aplicar esto a la homogeneidad en subconjuntos del continuo así como a la cardinalidad de secciones de conjuntos densos, trataremos con detalle algunos problemas respecto al genero de conjuntos densos, que no pueden aparecer entre los conjuntos irreducibles investigados por el Sr. Hausdorff [1]. Aquí como en los capítulos siguientes no se resuelven completamente algunos problemas por la aparición de ρ_0-números y quedan abiertas algunas curiosas posibilidades. En el capítulo IV estudiamos la descomposición de un conjunto denso en tantos como sea posible subconjuntos densos ajenos entre sí. Ya que no sabemos si 2^α es un álef, se investigan análogos a los subconjuntos de Baire de primera categoría del continuo.

XVI.1 I. Terminología.

Respecto a la notación de los siguientes teoremas, alguna ya se ha establecido desde hace tiempo, otra, en particular la intodocida por el Sr. Hausdorff, no se ha generalizado y finalmente alguna es completamente nueva. Las nociones del primer tipo se supondran conocidas, mientras que el significado de las del segundo grupo se exponen en detalle por comodidad; por el contrario las definiciones que sólo se usan una vez así como las nociones nuevas se introducen conforme se necesiten.

1) Por transfinitos o "números" llamamos además de al cero, al tipo de cada conjunto bien ordenado finito o infinito.

2) En una sucesión de transfinitos: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\nu, \ldots$ siempre se supondrá, mientras no se diga lo contario, que $\alpha_\mu < \alpha_\nu$, si $\mu < \nu$.

3) El límite α de una sucesión de números α_ν en el tipo de un número límite es el menor número mayor que cada α_ν.

4) Una sección en el tipo β de la sucesión de elementos $m_0, m_1, \ldots$ es cualquier sucesión de los m_ν con $\nu < \gamma < \beta$, si $0 < \gamma$.

5) El menor número de cardinalidad $\aleph_\alpha$ se conoce como el número inicial ω_α.

6) Cada número inicial que sea el límite solo de una sucesión de números en su tipo se llama regular (π_0-número); cualquier otro número inicial es singular.

7) Un conjunto cuyo tipo inverso es el número α tiene tipo α^* y esta ordenado a la inversa.

8) Los conjuntos lineales $M = A + B + C$ consisten en los elementos de sus secciones A, B, C; cada elemento de M pertenece solamente a una sección; en M los elementos de una misma sección se ordenan como en esa sección, dos elementos de secciones distintas se ordenan como las secciones en el orden A, B, C; calquiera de las secciones puede ser vacía.

9) En cada conjunto M, dos elementos son vecinos, cuando no hay ningún elemento de M entre ellos; entre todos los elementos de las secciones A y B (ambos no vacíos) del conjunto $M = A + B$ se encuentra un hueco de M, si A carece de mayor elemento y B no tiene menor elemento.

10) Cualquiera de las secciones A, B, C del conjunto $M = A + B + C$ se llama un segmento S de M, si cada una de sus secciones vecinas son no vacías en el lado donde S tiene un elemento más exterior y éste es un punto extremo de S.

11) Dos secciones de un conjunto están separadas, cuando no tienen elementos en común.

12) Un conjunto infinito es denso, cuando no tiene elementos vecinos entre sí.

[1] Mat. Ann., Vol. **65** (1908), págs. 435–505.

13) Un conjunto denso sin huecos es continuo.

14) Una sección B (vacía o no) que se sustituye o remplaza por una sección B' se dice que transforma el conjunto $A+B+C$ en el conjunto $A+B'+C$, donde A y C son también secciones; la sustitución se puede efectuar independientemente en un conjunto de secciones ajenas entre sí del mismo conjunto por conjuntos arbitrarios; huecos distintos se consideran secciones ajenas entre sí.

15) La sustitución de cada hueco de un conjunto denso M por un elemento genera[1] la cerradura $[M]$ de M.

16) Cada conjunto, que entre cada pareja de elementos de un conjunto denso M tiene un elemento, se conoce como denso en M o denso en todas partes.

17) Cada conjunto que no sea denso en ningún segmento del conjunto denso M es denso en ninguna parte en M.

18) Un primer elemento al igual que un último elemento de un conjunto es un elemento frontera de él; un conjunto sin elementos frontera no está acotado, un conjunto con dos elementos frontera está acotado.

19) Si un elemento m o un hueco l del conjunto denso M sucede inmediatamente a un subconjunto N de M con tipo el número inicial ω_α, entonce éste se llama un ω_α-límite, respectivamente un ω_α-hueco; si el elemento m, respectivamente el hueco l, precede inmediatamente a un subconjunto N de M con tipo ω_β^*, entonces éste es un ω_β^*-límite respectivamente un ω_β^*-hueco; si ocurren ambas situaciones simultáneamente, entonces m, respectivamente l, es un $\omega_\alpha\omega_\beta^*$-límite, respectivamente un $\omega_\alpha\omega_\beta^*$-hueco, y a él como a M les asociamos siempre el carácter $c_{\alpha\beta}$ para ω_α y ω_β regulares.

20) El conjunto de caracteres $c_{\alpha\beta}$ de M se llama el genero W de M.

21) Si cada segmento de M tiene el mismo genero, entonces M es irreducible; en caso contrario M es reducible.

22) Un elemento de M con carácter $c_{\alpha\alpha}$ es un límite simétrico de M; en forma análoga, se definen los huecos simétricos.

23) Cada conjunto acotado sin huecos es cerrado.

XVI.2 II. Sobre la teoría de los transfinitos.

El estudio de números iniciales regulares ω_α, en particular aquellos con índice límite, nos conduce al hallazgo de ciertas sucesiones de transfinitos con ω_α como límite. Mediante ciertas sucesiones en ω_α reconocemos la posibilidad de una clasificación de los ω_α en dos clases, de acuerdo a si existe, para ω_α, una sucesión "ρ_0-ajena" o no; en el último caso ω_α se llama un ρ_0-número. Con ayuda de principios análogos podemos clasificar el conjunto mismo de los ρ_0-números ξ en clases, que se distinguen mediante propiedades especiales de ciertas sucesiones de números que tienen a ξ como límite. En lo sucesivo responderemos a la pregunta de en qué condiciones podemos suponer la existencia de ρ_0-números.

Los transfinitos del Sr. Georg Cantor se encasillan en dos clases, los números intermedios y los números límite; como *número intermedio* se denotan cada número que no sea límite, pues cada

[1]Dado que nunca usaremos la cerradura como subconjunto de un conjunto, no hablamos de "una cerradura" de M.

uno de ellos está entre dos números vecinos uno mayor que él y uno menor; en particular ningún número precede inmediatamente a un número límite, donde contabilizamos al cero también entre los números límite. Dada una sucesión de transfinitos α_ν en el tipo de un número límite β, menor que uno de los α_ν, su límite α sucede inmediatamente a todos los α_ν. Naturalmente cada número límite α se puede representar como el límite de la sucesión de todos los números ν que lo preceden, y éste tiene el tipo $\beta = \alpha$, y no $\beta < \alpha$. Si un número límite es el límite solo de una sucesión de números α_ν en el tipo α, éste se llama un número inicial regular. Según nuestros conocimientos actuales, esta definición pierde sentido si ν recorre la totalidad W de los transfinitos, porque W no aparece libre de contradicciones.[1]

Puesto que en lo sucesivo afirmamos la existencia de ciertos transfinitos hasta ahora desconocidos, nos vemos obligados por lo contradictorio de la noción de W, a dar condiciones tan completas como sea posible para la existencia de un nuevo transfinito. Esto es necesario principalmente a que dado que para los números iniciales ω y Ω de la segunda y tercera clase o entre los números iniciales regulares con índice límite > 0 (véase más adelante) no se ha encontrado contradicción alguna, cada nuevo número genera una mayor desconfianza. Por ello le atribuimos existencia a un transfinito, en cuya definición no podamos encontrar ninguna contradicción, cuando podamos establecer su igualdad o diferencia con alguno de los transfinitos ya definidos. Esta condición necesaria es también suficiente, pues propicia el orden entre transfinitos arbitrarios; en caso contrario, para un número α el menor posible, existiría un número β, el menor posible, para los cuales no se puede determinar una relación de orden entre ellos. Si existiese un número $\gamma < \beta$ mayor que α, se tendría también $\beta > \alpha$, es decir, el orden queda determinado; así que α sólo puede ser mayor a todos los números $\gamma < \beta$, por lo que se cumple $\alpha \geq \beta$. Si, de acuerdo a nuestra condición de existencia, no se cumple $\alpha = \beta$, entonces $\alpha > \beta$, y esto contradice nuestra suposición, pues supusimos que β es el menor número que no es comparable con α. La condición anterior puede ser inútil en la practica, si por el desconocimiento de ciertos transfinitos se oculta una contradicción en la definición de los transfinitos supuestos.

Retomemos ahora nuestro análisis de los números iniciales regulares, que llamamos *"π_0-números"* y enumerémoslos mediante los transfinitos:

$$\begin{aligned} &\pi_{0,0} = 0, \quad \pi_{1,0} = \omega, \quad \pi_{2,0} = \Omega, \ldots \\ &\pi_{n,0} = \omega_{n-1}, \ldots \quad \pi_{\omega,0} = \omega_{\omega+1}, \ldots; \\ &\pi_{\mu,0} < \pi_{\nu,0}, \quad \text{si} \quad \mu < \nu. \end{aligned}$$

El límite de una sucesión de π_0-números es un número inicial, pero no necesariamente un π_0-número; así, el límite ω_ω de los π_0-números ω_n con n finito es un límite de un conjunto contable de números, por lo que no es un número inicial regular. Para ν un número límite > 0 se cumple en general que $\nu < \pi_{\nu,0}$.

Si podemos continuar la sucesión de estos π_0-números $\pi_{\nu,0}$ con índice límite y siempre apreciamos que $\nu < \pi_{\nu,0}$, nada nos impide colectar estos $\pi_{\nu,0}$ en una clase y que a todos ellos les suceda un π_0-número $\pi_{1,1}$, cuyo índice es un número límite[2]. Si $\pi_{1,1}$ como primer π_0-número > 0 es

[1] N. del T. Es decir, W no es conjunto.
[2] Math. Ann. Vol. **6**(1908), pág. 443.

igual a su índice, se puede distinguir del resto de transfinitos, y puesto que hasta ahora no hemos encontrado una contradicción en la noción de $\pi_{1,1}$, le atribuimos existencia como transfinito.

Aquí existe la posibilidad de considerar transfinitos mayores a $\pi_{1,1}$. Para ello debemos argumentar la existencia no sólo de otros números intermedios y límite, en particular regulares y singulares, si no también la de más π_0-números que coincidan con su índice y que designaremos π_1-números. También enumeramos los π_1-números según su magnitud mediante transfinitos:

$$\pi_{0,1} = 0, \quad \pi_{1,1}, \pi_{2,1}, \ldots; \; \pi_{\mu,1} < \pi_{\nu,1}, \quad \text{si} \quad \mu < \nu.$$

Los π_1-números conforman un subconjunto de los π_0-números por los que no debe sorprendernos si el límite de una sucesión de π_1-números no es a su vez un π_0-número. Por ejemplo, la sucesión de los $\pi_{n,1}$ con n finito de ninguna manera tiene a $\pi_{\omega,1}$ como límite, sino a un númeo inicial singular $\beta < \pi_{\omega,1}$. Consideremos una sucesión arbitraria de π_1-números en el tipo de un número límite γ menor que uno de ellos y sea β su límite así como α el límite de sus índices como π_1-números. Como se verifica fácilmente, β es un número inicial singular idéntico a su índice: $\beta = \omega_\beta$. Ahora, si existen una sucesión infinita en β y números iniciales regulares $\pi_{\nu,0}$ sucesores inmediatos, cuyo ν, si es un número límite, nunca coincide con $\pi_{\nu,0}$, y hacemos $\pi_{\alpha,1}$ como el primero que sucede a la clase de todos estos π_0-números que sea un π_0-número e idéntico con su índice.

A continuación, si el índice $\nu > 0$ de un π_1-número $\pi_{\nu,1}$ es un número límite, se cumple $\nu < \pi_{\nu,1}$. La totalidad de los π_1-números $\pi_{\nu,1}$ con índice límite $\nu < \pi_{\nu,1}$, que suceden a un número λ los podemos colectar en una clase, y hacemos que un π_1-número $\pi_{\mu,2}$, que como π_1-número tenga como índice un número límite, sea el sucesor de la totalidad de los números en la clase. La totalidad de los números así definidos la llamamos los π_2-números y enumeramos a estos de acuerdo a su magnitud mediante transfinitos:

$$\pi_{0,2} = 0, \quad \pi_{1,2}, \pi_{2,2}, \ldots; \; \pi_{\mu,2} < \pi_{\nu,2}, \quad \text{si} \quad \mu < \nu.$$

Para lograr un π_2-número $\pi_{\alpha,2}$ con índice límite se efectúan los mismos razonamientos, que para el correspondiente $\pi_{\alpha,1}$, si ponemos $\pi_{\nu,1}$ en lugar de $\pi_{\nu,0}$.

Ahora nos damos cuenta de que no es difícil considerar otro tipo de números $\pi_{\mu,\nu}$ aparte de los $\pi_{\mu,0}, \pi_{\mu,1}, \pi_{\mu,2}$. Observemos que en el dominio hasta ahora considerado ($\nu = 0$ y 1), para $\pi_{\mu,\nu+1} = \alpha$ siempre se cumple la ecuación $\alpha = \pi_{\alpha,\nu}$, lo que nos da motivo para:

Definición. "Cada transfinito, que sea un π_N-número $\pi_{M,N}$ para todo $N < \nu$ que coincida con su índice, será un π_ν-número $\pi_{\mu,\nu}$; la totalidad de los π_ν-números la enumeramos de acuerdo a su magnitud mediante transfinitos:

$$\pi_{0,\nu} = 0, \pi_{1,\nu}, \pi_{2,\nu}, \ldots; \; \pi_{\lambda,\nu} < \pi_{\mu,\nu}, \quad \text{si } \lambda < \mu.$$

Los números iniciales regulares que nos sirven aquí para enumerar son los π_0-números."

Entre los π_0-números se cumple el teorema de que cada sucesión de ellos sin mayor elemento tiene un π_1-número como límite o ni siquiera un π_0-número, sino un número inicial singular. Supongamos que una sucesión de π_ν-números en el tipo de un π_0-número γ no tuviése un $\pi_{\nu+1}$-número como límite, sino un π_λ-número $\pi_{\varkappa,\lambda}$ con $\varkappa < \pi_{\varkappa,\lambda}$ y $0 \leq \lambda \leq \nu$; además, sea $\pi_{\varkappa,\lambda}$ el menor π_0-número, para el cual es posible tal representación. Ya que los π_ν-números son a la vez

π_λ-números y en su sucesión no tienen a un $\pi_{\lambda+1}$-número como límite, γ es menor que un número de la sucesión; como cada π_0-número es el límite sólo de una sucesión en su tipo, $\pi_{\varkappa,\lambda}$ no puede ser el límite de la sucesión de los π_λ-números. Supongamos que tomamos a $\pi_{\varkappa,\lambda}$ como el menor π_0-número con otra representación; ya que el límite de una sucesión de tipo arbitrario es también el límite de una sucesión en el tipo de un π_0-número, se cumple en general el:

Teorema 1. El límite de una sucesión de π_ν-números es un $\pi_{\nu+1}$-número o no es siquiera un π_0-número.

Ahora es claro que cada número $\pi_{\mu+1,0}$, que por tanto no es un π_1-número, es el límite de la sucesión de los números de la $(\mu+1)$ clase de números, que empieza con $\pi_{\mu,0}+1$, y ninguna sección de esta sucesión tiene un número inicial como límite.

Sean ahora ν un número intermedio $\nu'+1$ y μ menor que $\pi_{\mu,\nu}$; si al número $\pi_{\mu,\nu}$ le precede un mayor π_ν-número, le llamamos β; si μ es un número límite, sea entonces β el límite de los π_ν-números $\pi_{\mu,\nu}$ predecesores con μ menor que $\pi_{\mu,\nu}$. La sucesión de los $\pi_{\nu'}$-números mayores que β y menores que $\pi_{\mu,\nu}$ genera una sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ con $\pi_{\mu,\nu}$ como límite, de la cual ninguna sección, según el teorema 1, tiene como límite a un π_0-número, pues entre β y $\pi_{\mu,\nu}$ no existen π_ν-números.

Además, sea ν un número límite y $\mu < \pi_{\mu,\nu}$, pero para $\mu = 1$, no se cumple $\nu = \pi_{1,\nu}$. Para μ un número intermedio $\mu'+1$ sea $\beta = \pi_{\mu',\nu}+\nu+1$; para μ un número límite tome β como el límite de la sucesión de los π_ν-números menores que $\pi_{\mu,\nu}$. Formamos la sucesión

$$\alpha_{00}, \alpha_{10}, \ldots \alpha_{\varepsilon 0}, \ldots; \alpha_{01}, \alpha_{11}, \ldots \alpha_{\varepsilon 1}, \ldots; \ldots \alpha_{0\xi}, \alpha_{1\xi}, \ldots \alpha_{\varepsilon\xi}, \ldots; \ldots$$

donde α_{00} es el menor π_0-número mayor que β y, en general, $\alpha_{\varepsilon\xi}$ es el menor π_ε-número mayor que todos los $\alpha_{\varepsilon'\xi'}$ que le anteceden; ε recorre todos los valores menores que ν, ξ todos los valores menores que $\pi_{\mu,\nu}$. Ya que siempre se cumple $\beta > \nu$, ninguna sección de la sucesión, cuando ésta no tenga como tipo a un múltiplo de ν, puede tener un π_0-número como límite; en caso contrario sería este límite mayor que ν y el límite de una sucesión con tipo $< \nu$. Por el teorema 1 ninguna sección en el tipo $\nu \cdot \gamma$ tiene a un π_0-número como límite, porque este π_0-número sería al mismo tiempo el límite de π_λ-números para un $\lambda < \nu$ arbitrariamente grande, pero entre β y $\pi_{\mu,\nu}$ no existen π_ν-números.

Para concluir consideremos el menor π_ξ-número α, para el cual $\pi_{1,\xi} = \xi$. Lo representamos como el límite de la sucesión de los números $\pi_{\mu,\mu} < \alpha$ con $\mu > 0$; si alguna sección de esta sucesión en el tipo del número límite $\gamma < \alpha$ tuviese un π_0-número como límite, según el teorema 1, este límite sólo podría ser $\pi_{1,\gamma}$, de tal suerte que α no sería el menor número de su clase.

Resumimos nuestros resultados:

Teorema 2. Cada número $\alpha = \pi_{\mu,\nu}$ con $\mu < \alpha$ y $\nu < \alpha$ así como el menor número $\xi = \pi_{1,\xi}$ admiten una representación como límite de una sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, en la que ninguna sección tiene un π_0-número como límite.

Todavía podríamos extender arbitrariamente nuestro dominio de trabajo y llegaríamos a los mismos resultados, en tanto sólo operemos con los números que se obtienen sucesivamente. Pero a la vez tiempo se puede colectar la totalidad de los números así generados en una clase y definir el número $\rho_{1,0}$ como el primer número $\pi_{\mu,\nu}$ que suceda a todos ellos con la siguiente propiedad: $\rho_{1,0}$ es el límite de una sucesión de números $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, y deben existir $\rho_{1,0}$ secciones de esta sucesión con π_0-números como límite. Encima de $\rho_{1,0}$ se debe continuar el proceso de formación de números intermedios y límite, en particular, de π_ν-números con ν arbitrariamente grande; igualmente podemos definir más números con propiedades correspondientes a las de $\rho_{1,0}$, que llamaremos ρ_0-números y los enumeraremos, según su magnitud, mediante transfinitos:

$$\rho_{0,0} = 0, \rho_{1,0}, \rho_{2,0}, \ldots; \rho_{\lambda,0} < \rho_{\mu,0}, \quad \text{si } \lambda < \mu.$$

Cada ρ_0-número $\alpha > 0$ satisface claramente la ecuación $\pi_{1,\alpha} = \alpha$. Aún definimos:

Definición. Cada sucesión de transfinitos, en la cual ninguna sección tiene como límite un π_0-número, se dice ρ_0-ajena.

Ahora podemos probar el teorema:

Teorema 3. Cada π_0-número α, que sea el límite de una sucesión $\beta_0, \beta_1, \ldots$, que no contiene α secciones distintas con π_0-números como límite, es también el límite de una sucesión ρ_0-ajena de números $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$.

Demostración. Sea α el menor π_0-número, que no comparte esta propiedad. Si en $\alpha = \pi_{M,N}$ para $M < \alpha$ el número N toma un valor arbitrario pero $< \alpha$, entonces nuestra afirmación está demostrada usando la sucesión del teorema 2. Si por el contrario $\pi_{1,\alpha} = \alpha$, entonces buscamos en la sucesión de los β_ν la menor sección de un tipo $\pi_{\gamma,\gamma}$ tal que a lo sumo en secciones más pequeñas el límite de la secci'on es un π_0-número; por lo que el límite de nuestra sección es mayor que $\pi_{\gamma,\gamma}$. Pero $\pi_{\gamma,\gamma}$ no puede ser un ρ_0-número δ, pues éste tiene sólo las formas $\pi_{1,\delta}$ y $\pi_{\delta,\varepsilon}$ con $\varepsilon < \delta$; dado que α es el menor número de su clase, existe una sucesión ρ_0-ajena $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ con $\pi_{\gamma,\gamma}$ como límite. Ahora, sea ξ el menor índice ν, para el que $\beta_\nu > \pi_{\gamma,\gamma}$, entonces la sucesión

$$\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_\mu(\mu < \xi), \ldots \beta_\xi, \beta_{\xi+1}, \ldots \beta_{\xi+\nu}, \ldots$$

tiene claramente la propiedad de la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ para α. La contradicción de que α es el menor número que no posee ninguna sucesión ρ_0-ajena, muestra que el teorema 3 se cumple.

De lo anterior se deduce que aparte de los π_0-números que se pueden representar como límites de sucesiones ρ_0-ajenas y de los ρ_0-números, no existe ningún otro π_0-número. La cuestión de la existencia de los ρ_0-números conduce a otros problemas interesantes. De no existir los ρ_0-números, se podría esperar la existencia de una sucesión, para la cual ninguna sección tiene a un π_0-número como límite y en la que cada número β es menor que un miembro de la sucesión; la existencia de tal sucesión no significa una contradicción con la existencia de ρ_0-números. Por otro lado, se podría suponer que cada una de tales sucesiones $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ puede contener una cantidad arbitraria de secciones con límite un π_0-número; no es difícil mostrar que deben aparecer una cantidad arbitraria de números iniciales singulares $\beta = \omega_\beta$ como límite de secciones; pues, por ejemplo, cada sucesión $\beta_0, \beta_1, \ldots$, donde $\beta_0 = \alpha_\nu$, $\beta_{\mu+1} = \alpha_{\gamma+1}$ y $\gamma = \omega_{\beta_\mu}$ tiene uno de tales números β como ω-límite; la existencia de secciones de la sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ con π_0-números como límite no es, por el contrario, fácil de probar. Entre estas sucesiones $\{\alpha_\nu\}$ y las sucesiones ρ_0-ajenas arriba construidas existe una gran diferencia, pues sólo la última está en un dominio acotado de números. Ya que, sin embargo, no se conoce ninguna contradicción real con la siguiente definición de ρ_0-número y menos existe duda respecto a su igualdad o diferencia con otros números ya definidos, suponemos que su definición y existencia no da lugar a contradicciones.

Definición. Un número $\pi_{\mu,\nu} = \alpha$ es un ρ_0-número, si cada sucesión de transfinitos con α como límite tiene α secciones distintas con límite π_0-números. Enumeramos los ρ_0-números de acuerdo a su magnitud mediante transfinitos: $\rho_{0,0} = 0$, $\rho_{1,0}$, $\rho_{2,0}$, $\ldots$; $\rho_{\lambda,0} < \rho_{\mu,0}$, si $\lambda < \mu$.

Ahora, si el límite α de una sucesión de ρ_0-números es un π_0-número, entonces el límite α debe ser, por el teorema 1, un π_α-número, pues cada ρ_0-número es una solución de la ecuación $\pi_{1,\xi} = \xi$ y los números ξ crecen monótonamente para los ρ_0-números de nuestra sucesión. Pero por ningún motivo es necesario que α sea un ρ_0-número; porque tomemos esto como necesario y sea α el menor límite de una sucesión de ρ_0-números, que simultáneamente sea un π_0-número, entonces existe por la definición de α como ρ_0-número una menor sección de la sucesión de estos ρ_0-números con un π_0-número $\beta < \alpha$ como límite; β es entonces un límite más pequeño que α de ρ_0-números y al mismo tiempo un π_0-número, mientras que α debería ser el menor de tales límites; por ello se sigue necesariamente nuestra afirmación. Que hayamos hecho que a la totalidad de los ρ_0-números $\pi_{\nu,0}$ con ν como número límite para el cual el límite de la sucesión de los ρ_0-números predecesores no es un π_0-número, suceda un ρ_0-número $\rho_{\alpha,0}$ para el que el límite de la sucesión de los ρ_0-números predecesores sea un π_0-número $\alpha = \pi_{1,\alpha} < \rho_{\alpha,0}$, no necesita, por lo anterior, mayor explicación, ni tampoco la formación de números $\pi_{1,\alpha}$ mayores con la propiedad correspondiente.

Entonces podemos definir, además de los ρ_0-números, los números $\rho_{1^-}, \rho_{2^-}, \ldots, \rho_{\nu^-}, \ldots$, exactamente como definimos los $\pi_{1^-}, \pi_{2^-}, \ldots \pi_{\nu^-}, \ldots$ partiendo de los π_0-números; en la definición de $\pi_{\mu,\nu}$ sólo se debe remplazar π por ρ y en lugar del significado de los π_0-números dar el de los ρ_0-números. Aquí reconocemos fácilmente que cada uno de los ρ_0-, respectivamente ρ_ν-números, obtenidos sucesivamente se puede representar como límite de una sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, en la que ninguna sección tiene un ρ_0-número como límite. Esto propicia la introducción de una clase superior de números α, que también son ρ_0-números, pero para los cuales cada sucesión con límite α tiene también α secciones diferentes con límite un ρ_0-número. No es difícil ver que este proceso se puede continuar una cantidad infinita de veces, lo que expresamos mediante la definición de nuevas clases de números.

Definición. Sea $\pi_{\lambda,\mu,\nu}$ el $(\lambda+1)$-número de su clase según su magnitud, considerando a λ como la única variable, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ Además, sea $\pi_{\lambda,\mu,\nu}$ el menor número para el cual se cumple la ecuación $\pi_{\xi,\mu',\nu} = \xi$ para toda $\mu' < \mu$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$. Finalmente sea $\alpha = \pi_{\lambda,\mu,\nu}$ con $\lambda < \alpha$ un número que es límite sólo de sucesiones en el tipo α, tales que para cada $\nu' < \nu$ hay α secciones diferentes con números $\pi_{\lambda',\mu',\nu'}$ como límite, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. Los $\pi_{\lambda,0,0}$ son los números iniciales regulares entre los cuales el primero es $\pi_{0,0,0} = 0$.

Se reconoce sin dificultad, que los números arriba definidos $\pi_{\mu,\nu}$, respectivamente $\rho_{\mu,\nu}$, son idénticos a los números $\pi_{\mu,\nu,0}$ respectivamente $\pi_{\mu,\nu,1}$. Más aún, siempre se cumple $\pi_{0,\mu,\nu} = 0$. Finalmente mediante inducción transfinita se muestra fácilmente la existencia (en el sentido antes mencionado) de los números $\pi_{\lambda,\mu,\nu}$ que no son números $\pi_{\lambda',\mu',\nu+1}$. Ahora probamos:

Teorema 4. Cada número $\alpha = \pi_{\lambda,\mu,\nu} > 0$ se puede escribir de tal manera que $\lambda < \alpha$, y siempre se cumple que $\nu + \mu \leq \alpha$.

Demostración. Sea $\lambda = \pi_{\lambda,\mu,\nu}$. Puesto que para $\mu' < \mu''$ siempre se tiene $\pi_{1,\mu',\nu} < \pi_{1,\mu'',\nu}$, existen números $\pi_{1,\mu',\nu} < \pi_{1,\mu,\nu}$ en el tipo μ, por lo que se cumple $\mu < \lambda$; entonces la ecuación $\lambda = \pi_{\lambda,\mu',\nu}$ se puede satisfacer a lo sumo para una sucesión de números $\mu' > \mu$ en el tipo λ; si este es el caso, λ también es un número $\pi_{\varkappa,\lambda,\nu}$; ya que la sucesión de números $\pi_{1,\mu',\nu}$ con $0 < \mu' < \lambda$ tiene entonces tipo λ, ocurren $\varkappa = 1$ y $\lambda = \pi_{1,\lambda,\nu}$. En general, para algún $\mu' < \lambda$ se cumple $\lambda = \pi_{\lambda',\mu',\nu}$, donde $0 < \lambda' < \lambda$ y λ' puede tomar cada uno de estos valores. Ahora supongamos que en $\alpha = \pi_{\lambda,\mu,\nu}$ ya se tiene $\lambda < \alpha$, donde μ es el mayor posible; si $\lambda > 1$, entonces siempre μ y

ν deben ser menores que α; en tal caso:

$$\mu \leq \pi_{1,\mu,\nu} < \pi_{\lambda,\mu,\nu};$$
$$\nu \leq \pi_{1,0,\nu} < \pi_{\lambda,\mu,\nu};$$

de donde se sigue, como se sabe, que $\nu + \mu < \alpha$. Si $\lambda = 1$, entonces siempre se cumple $\pi_{1,\mu,\nu} > \mu$, que para $\mu = 0$ se cumple, y para $\mu > 0$ se sigue de

$$\mu \leq \pi_{1,0,\mu} < \pi_{1,\mu,\mu}.$$

Por ello a lo sumo uno de los números μ y ν es igual a α; si $\mu = \alpha$, entonces $\nu < \alpha$, así que $\nu + \mu = \alpha$; si $\nu = \alpha$, necesariamente $\alpha = \pi_{1,0,\alpha}$, pues en caso contrario se deduciría:

$$\alpha \leq \pi_{1,0,\alpha} < \pi_{1,\mu,\alpha} = \pi_{\lambda,\mu,\nu},$$

con lo que también en este caso tenemos $\nu + \mu = \alpha$. Con ello queda demostrado el teorema 4.

El siguiente teorema 5 es una generalización del teorema 1.

Teorema 5. Cada límite α de una sucesión de números $\pi_{\lambda,\mu,\nu}$ con única variable λ es un número $\pi_{\lambda',\mu+1,\nu}$ o no es siquiera un número $\pi_{\lambda',0,\nu}$.

Demostración. Ya sea que α satisface la ecuación $\pi_{\xi,\mu,\nu} = \xi$; en cuyo caso también tiene la forma $\pi_{\lambda',\mu+1,\nu}$. O α es al menos un número $\gamma = \pi_{\lambda',\mu',\nu}$ con $0 \leq \mu' \leq \mu$ y $\lambda' < \alpha$. Los números $\pi_{\lambda,\mu,\nu}$, cuyo límite es α, son también, puesto que $\mu' \leq \mu$, números $\pi_{\Lambda,\mu',\nu}$ con variable Λ y sus sucesión tiene el tipo del π_0-número γ. Si permitimos que Λ recorra la totalidad de los números $< \lambda'$, entonces esta sucesión de los $\pi_{\Lambda,\mu',\nu}$ tiene también el límite α; pero esta totalidad tiene un tipo $\gamma < \alpha$, porque α no es un número $\pi_{\varkappa,\mu'+1,\nu}$, así que α aparece como un número inicial singular. Con ello queda demostrado el teorema 5.

En casos especiales, sucesiones de números $\pi_{\lambda,\mu,\nu}$ con λ como única variable pueden tener como límite números $\gamma = \pi_{\lambda',\mu',\nu'}$ con λ' y μ' arbitrariamente grandes, pero con $\nu' < \nu$; también se debe satisfacer la ecuación $\gamma = \pi_{1,\gamma,\nu'}$. Porque supongamos que un número $\alpha = \pi_{\lambda,\mu,\nu}$ es el límite de una sucesión de números $\pi_{\lambda',\mu',\nu}$, entonces por la definición de los números $\pi_{\lambda,\mu,\nu}$ deben existir para cada $\nu' < \nu$ α secciones de esta sucesión con números $\pi_{\lambda',\mu',\nu'}$ como limite. Ahora demostraremos el:

Teorema 6. Cada número $\alpha = \pi_{\lambda,\mu,\nu} > 0$, que no sea un número $\pi_{\lambda',\mu',\nu+1}$, se puede representar como el límite de una sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, de la cual ninguna sección tiene un número $\pi_{\lambda',\mu',\nu}$ como límite.

Demostración. Primero conducimos una demostración directa para el caso en que $\mu < \alpha$. De antemano suponemos, por el teorema 4, que $\lambda < \alpha$. Si $\pi_{\lambda,0,\nu}$ no es un número $\pi_{\lambda',1,\nu}$, sea β el mayor entre todos los números $\pi_{\lambda',0,\nu}$ predecesores del número $\pi_{\lambda,0,\nu}$ o el límite de su sucesión; sea $\alpha_1, \alpha_1, \ldots$ la sucesión para α de todos los números entre β y $\pi_{\lambda,0,\nu}$.

Si además $0 < \mu < \alpha$ y μ es un número intermedio $\mu' + 1$, sea entonces β el mayor, respectivamente el límite, de la sucesión de los números $\pi_{\lambda',\mu,\nu}$ predecesores a α o finalmente, para $\lambda = 1$ el número μ. Aquí la sucesión de todos los números $\pi_{\lambda',\mu',\nu}$ entre β y α proporciona la sucesión buscada $\alpha_0, \alpha_1, \ldots,$ en el Teorema 5 que no puede tener un número $\pi_{\lambda',0,\nu}$ como límite; porque este sería también un número $\pi_{\lambda',\mu,\nu}$, de los cuales no existe ninguno entre β y α.

Si finalmente $0 < \mu < \alpha$ y μ es un número límite, sea β el mayor, respectivamente el límite de la sucesión de los números $\pi_{\lambda',\mu,\nu}$ que anteceden a α o, para $\lambda = 1$, el número $\mu + 1$, de tal suerte que siempre se tiene $\beta > \mu$. Entonces formamos $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ como la sucesión:

$$\alpha_{00}, \alpha_{10}, \ldots \alpha_{\varepsilon 0}, \ldots; \alpha_{01}, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{\varepsilon 1}, \ldots; \ldots \alpha_{0\xi}, \alpha_{1\xi}, \ldots \alpha_{\varepsilon\xi}, \ldots; \ldots$$

donde α_{00} es el menor número $\pi_{\lambda',0,\nu} > \beta$ y para los restantes $\alpha_{\varepsilon\xi}$ es el menor número $\pi_{\lambda',\varepsilon,\nu}$ mayor que todos los predecesores $\alpha_{\varepsilon'\xi'}$; ε recorre todos los valores $< \mu$ y ξ todos los valores $< \alpha$. Ninguna sección de esta sucesión puede tener un número $\pi_{\lambda',0,\nu}$ como límite, cuando la sección no tiene un múltiplo de μ como tipo; pues tal número sería también el límite de una sucesión de tipo $< \mu < \beta$. Por el teorema 5 esto es imposible para secciones en el tipo $\mu \cdot \gamma$, porque sus límites pertenecen a sucesiones de números $\pi_{\lambda',\mu',\nu}$ con $\mu' < \mu$ arbitrariamente grande, por lo que ellos deben ser números $\pi_{\lambda',\mu,\nu}$, de los cuales ninguno está entre β y α.

Para números $\alpha = \pi_{1,\alpha,\nu}$ conducimos una demostración indirecta; consideremos una sucesión $\beta_0, \beta_1, \ldots$ con α como límite, que tiene al menos una sección, pero no α distintas, que tenga como límite un número $\pi_{\lambda',\mu',\nu}$; esto es posible porque α no es un número $\pi_{\lambda',\mu',\nu+1}$. Entonces existe una sección, la menor posible, en el tipo $\pi_{\gamma,\gamma,\nu}$ tal que sólo secciones menores tienen como límite un número $\pi_{\lambda',\mu',\nu}$; el límite de la sección en el tipo $\pi_{\gamma,\gamma,\nu}$ es mayor que $\pi_{\gamma,\gamma,\nu}$. Pero $\pi_{\gamma,\gamma,\nu}$ no puede ser un número $\mu' = \pi_{1,\mu',\nu}$, pues éste solo puede tener las formas $\xi = \pi_{1,\xi,\nu}$ y $\pi_{\xi,\eta,\nu}$ con $\eta < \xi$. Así que con lo anterior ya se ha construido una sucesión $\alpha'_0, \alpha'_1, \ldots$ para $\pi_{\gamma,\gamma,\nu} = \alpha'$. Ahora, sea ε el menor índice, tal que $\beta_\varepsilon > \pi_{\gamma,\gamma,\nu}$, entonces la sucesión:

$$\alpha'_0, \alpha'_1, \ldots \alpha'_\delta (\delta < \varepsilon), \ldots \beta_\varepsilon, \beta_{\varepsilon+1}, \ldots \beta_{\varepsilon+\xi}, \ldots$$

tiene claramente la propiedad de la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ para $\alpha = \pi_{1,\alpha,\nu}$, cuya existencia afirma el teorema 6. Con ello queda demostrado el teorema 6.

En los números $\pi_{\lambda,\mu,\nu}$ el índice λ sirve esencialmente para la “enumeración”. El índice μ debe amontonar en cierta medida la propiedad presente en los números contabiliizados, μ sirve para el “apilamiento” que puede extenderse a una o más etapas; μ nos proporciona comodas formulaciones y demostraciones en todos los teoremas. El índice ν, finalmente, nos da la posibilidad, para numeros iniciales regulares como punto de partida, mediante un nuevo principio, de lograr números significativamente mayores; esta “concentración” puede efectuarse en una o más etapas. Podemos suponer que con estos tres principios no se agota la totalidad de los transfinitos; al momento no parece posible un ascenso adicional, pero posiblemente se hará viable una “continuación” de las ahora conocidas secciones o “elementos” de la totalidad W de todos los transfinitos con nuevos principios.

XVI.3 III. Propiedades planas y rugosas de los conjuntos densos

Este capítulo esta dedicado al estudio de las propiedades $\mathfrak{E}$ de conjuntos densos M con especial atención a si estas propiedades pueden ser distintas en una zona pequeña a lo que ocurre en la zona completa o en M; en un caso extremo M se llama rugoso para $\mathfrak{E}$. Como primer ejemplo se considera la homogeneidad de subconjuntos M del continuo con cardinalidad $\mathfrak{c}$ considerados en cada uno de sus segmentos; con la suposición $\mathfrak{c} = \aleph_\alpha$ se demostrará la existencia de $\aleph_{\alpha+1}$ de tales tipos homogéneos; por el contrario, la existencia de conjuntos rugosos para homogeneidad posiblemente sólo se pueda bosquejar. Con la hipótesis de que $2^{\aleph_\alpha}$ siempre es un álef, trataremos en forma similar la cardinalidad en partes de conjuntos densos; esta investigación se puede extender inmediatamente a propiedades con valores crecientes en un conjunto bien ordenado, que en un subsegmento no excedan al valor en el segmento. El resto de las observaciones se dedican al genero de conjuntos densos. Primero construimos ejemplos de conjuntos que son rugosos respecto al genero. En los conjuntos M rugosos respecto al genero la suma $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ de las cardinalidades $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ de los conjuntos con distintos α, respectivamente β, en el carácter $c_{\alpha,\beta}$ de M debe alcanzar al menos un cierto[1] mínimo ($\geq \aleph_{\overline{\sigma}}$). Si η_α es un cierto tipo de Hausdorff, que contiene tipos lineales arbitrarios de cada cardinalidad $\leq \aleph_\alpha$, entonces un conjunto rugoso respecto al genero tiene como cota superior el número $\alpha = \overline{\sigma}$ para α subconjuntos contenidos en cada segmento de tipo η_α. Para $\overline{\sigma}$ tan sólo como ρ_0-número α no necesariamente alcanza este valor $\overline{\sigma}$, y salvo quizá en este caso, ninguna clase de límite simétrico en un segmento de la cerradura $[M]$ es necesariamente densa; el que los ρ_0-números respresentan aquí una excepción, aún no lo podemos decidir. Para ciertos valores suficientemente grandes α, respectivamente β, de los $c_{\alpha\beta}$ de los conjuntos densos M rugosos respecto al genero se puede probar la igualdad de genero en ciertos segmentos de M. Mientras que al genero de un conjunto no rugoso respecto al genero no se le puede despojar de algún carácter, sin que éste pierda la propiedad de ser el genero de un conjunto denso, para los conjuntos rugosos respecto al genero se puede apartar hasta $\aleph_{\overline{\sigma}}$, en muchos ocasiones más[2], caracteres.

En todas las investigaciones sobre conjuntos densos supondremos que los tipos de sus subconjuntos bien ordenados u ordenados a la inversa no exceden una cierta cota arbitraria ω_λ, respectivamente ω_λ^*, Las investigaciones del Sr. Hausdorff sobre tales conjuntos densos tratan principalmente con conjuntos, cuyas propiedades consideradas son las misma en cada segmento, por ejemplo, la homogeneidad o la irreducibilidad. Para estudiar fenómenos más complicados en el dominio de los conjuntos densos, utilizamos la siguiente definición.

Definición. Un conjunto denso M es ***plano***, respecto a la propiedad $\mathfrak{E}(S)$ definida en pedazos infinitos S, si $\mathfrak{E}(S)$ es la misma para todo S; ***rugoso***, cuando para cada S y uno de sus pedazos infinitos S' se cumple que $\mathfrak{E}(S) \neq \mathfrak{E}(S')$; ***casi plano***, cuando M no es rugoso en ningún S respecto a $\mathfrak{E}$; ***casi rugoso***, cuando M contiene S planos y rugosos respecto a $\mathfrak{E}$.

De esto se sigue que cada pedazo[3] S de M es junto con M, respecto a una propiedad, plano respectivamente rugoso. Sea $\mathfrak{E}$ la continuidad para un S continuo dentro de M, y para un S en algún lugar dentro de M discontinuo, la discontinuidad; entonces un conjunto continuo M, lo mismo que un conjunto discontinuo en cada segmento, es plano; para esta $\mathfrak{E}$ ningún M puede ser rugoso; más aún, respecto a $\mathfrak{E}$ cada M es plano o casi plano. Si substituimos un subconjunto denso en ninguna parte de elementos de un M plano respecto a $\mathfrak{E}$ por un conjunto plano respecto a $\mathfrak{E}$ y si $\mathfrak{E}$ está definida par el conjunto así producido, éste es plano o casi plano; por el contrario, si M y los conjuntos susbtituidos son rugosos respecto a $\mathfrak{E}$, también el conjunto producido es rugoso. Si sustituimos en un conjunto arbitrario M conjuntos densos planos, respectivamente rugosos,

[1] Compárese el teorema 15 respectivamente el teorema 20.
[2] Compárese el teorema 15 respectivamente el teorema 20.
[3] No necesariamente cada pedazo infinito de M es un S, por ejemplo, para la homogeneidad se consideran sólo pedazos no acotados como S.

respcto a $\mathfrak{E}$ densos en un subconjunto de M denso en ninguna parte, el conjunto que se genera es plano o casi plano, respectivamente rugoso, respecto a $\mathfrak{E}$.

Ahora, sean M casi plano o casi rugoso respecto a una $\mathfrak{E}$ y m uno de sus elementos en el interior de un pedazo S, que sea plano o rugoso. Podemos entonces, avanzando desde m hacia la izquierda y derecha, localizar elementos $s_1, s_2, \ldots$ en el tipo σ^* con primer elemento o límite s, respectivamente elementos $s'_1, s'_2, \ldots$ en el tipo σ' con último elemento o límite s' (s y s' siempre existen al menos para un $[M]$ acotado), donde σ y σ' son transfinitos y el subconjunto de M en cada segmento (s_μ, s'_ν) es plano, respectivamente rugoso, respecto a $\mathfrak{E}$; si s'' está en M a la izquierda de s o a la derecha de s', entonces el segmento (s'', m) de M nunca es plano, respectivamente rugoso. El que el segmento (s, s') pueda ser plano, depende de $\mathfrak{E}$ y no se puede decidir en general; en cualquier caso ningún segmento que contenga a s o s' como punto interior puede ser plano o rugoso. Sea $P = \{p\}$ el conjunto de elementos de la cerradura $[M]$ de M tales que ningún pedazo de M con elementos en ambos lados de p es plano o rugoso respecto a $\mathfrak{E}$. Cada p es evidentemente un s o s' o su punto frontera. P es denso en ninguna parte en M y cada uno de sus pedazos acotados es cerrado. Porque cada subconjunto Q de los p en tipo ω_α, respectivamente ω^*_β, al que le sucedan dos elementos de M, respectivamente antecedan, tiene un $p = p'$ como ω_α-límite, respectivamente ω^*_β-límite, pues cada pedazo de $[M]$ que contenga a p' como punto interior contiene puntos de Q. Así que cada pedazo acotado de P es cerrado. Si P no fuese denso en ninguna parte en $[M]$, habría un segmento S de M denso en todas partes, necesariamente continuo; entonces P no contendría ningún s o s' dentro de S, por lo que no contendría ningún elemento frontera de los s y s', y por ello ningún elemento; en consecuencia, P no es denso en ningún segmento de $[M]$. Entonces se cumple el:

Teorema 7. El conjunto $P = \{p\}$ de los elementos de $[M]$ para los que ningún pedazo de M con p como punto interior sea plano o rugoso respecto a $\mathfrak{E}$, es denso en ninguna parte en $[M]$ y cada pedazo acotado de P es cerrado.

Ahora analizamos casos especiales de $\mathfrak{E}$. Primero investigamos la *homogeneidad*[1] en el dominio de los subconjuntos M del continuo. Sea M denso en todas partes en el continuo, homogeneo y de tipo μ; los segmentos de M acotados por un elemento m de M tienen tipo μ, de tal forma que $\mu = \mu + 1 + \mu$. El tipo η del conjunto de los números racionales es homogéneo, lo mismo que el tipo ι de su complemento así como el del continuo mismo. No es difícil demostar[2] que existen subconjuntos homogéneos del continuo de cardinalidad $\aleph_1$ y que estos, en particular, no tienen un subconjunto perfecto. Es evidente que un conjunto arbitrario en el continuo denso en todas partes y no numerable no *necesariamente* es homogéneo, pero no podemos probar en general que éste deba contener un segmento homogéneo. Sea $\mathfrak{E}$ el tipo de los segmentos considerados de M; si M es rugoso respecto a $\mathfrak{E}$, se le llama *anti homogéneo*; cuando M no contiene ningún subconjunto no numerable homogéneo, lo llamamos *totalmente no homogéneo*. La existencia de conjuntos anti homogéneos y totalmente no homogéneos es por el momento realmente problemática. Sin embargo, mostraremos la existencia de $\aleph_{\alpha+1}$ tipos homogéneos de cardinalidad $\mathfrak{c}$ con la sola hipótesis $\mathfrak{c} = \aleph_\alpha$, esencialmente mediante el método de construcción de conjuntos totalmente imperfectos[3]

[1] Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. W., Leipzig, Volumen **58**(1906), pág. 135. N. del T. se refiere al rabajo de Hausdorff *Untersuchungen über Ordnungstypen.*

[2] Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. W., Leipzig, Volumen **61**(1909), pág. 121.

[3] Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. W., Leipzig, Volumen **60**(1908), pág. 325.

debido al Sr. Bernstein. También utlizamos:

Teorema 8. El conjunto de subconjuntos del continuo de un tipo arbitrario μ tiene a lo sumo la cardinalidad del continuo.

Demostración. Sean A y B subconjuntos del continuo de tipo μ y fijemos una aplicación de similaridad Γ de A sobre B; esta aplicación se determina también mediante $\aleph_0$ parejas de elementos de A y B. Con A' denotamos el conjunto de puntos aislados de A, que corresponde al conjunto B' de B según Γ; el conjunto B'' de elementos aislados de B que no están en B' corresponde a A'' de A. Si una derivación de A y B es perfecta, entonces A y B contienen posiblemente una componente densa en sí misma, que mediante A', A'', B', B'' no se ha aplicado; sea entonces A''' un subconjunto de tipo η, que es denso en esta componente A y le corresponde el subconjunto B''' ed B; puesto que las componentes densas siempres están en pedazos grandes sin elementos de A', A'' respectivamente B', B'', la aplicación de A sobre B se determina totalmente mediante $A' + A'' + A''' = \overline{A}$ y $B' + B'' + B''' = \overline{B}$. Ahora, $\overline{A}$ al igual que $\overline{B}$ son a lo sumo numerables; por consiguiente cada conjunto arbitrario B de tipo μ se aplica en un subconjunto A del mismo tipo determinado por un subconjunto a lo sumo numerable. El conjunto de todas las aplicaciones equivalentes de $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$ tiene a lo sumo la cardinalidad $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c} = \mathfrak{d}_1$, de la misma forma se escogen una cantidad numerable de subconjuntos arbitrarios del continuo, entre ellos $\overline{A}$ y $\overline{B}$, en a lo sumo $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c} = \mathfrak{d}_2$ formas distintas. Por tanto, el conjunto de conjuntos B de tipo μ, que se aplican sobre A mediante un $\overline{B}$ y $\overline{A}$, tiene a lo sumo la cardinalidad $\mathfrak{d}_1 \cdot \mathfrak{d}_2^2 = \mathfrak{c}$, de donde se sigue el teorema 8.

Aún necesitamos el siguiente:

Teorema 9. El conjunto de a lo sumo $\aleph_\beta$ conjuntos M_μ de cardinalidad $\aleph_\beta$ contiene un subconjunto T de cardinalidad $\aleph_\beta$, que no contiene a ninguno de los M_μ como subconjunto.

Demostración. El índice μ recorre todos los números $0, 1, 2, \ldots$ debajo de $\gamma \leq \omega_\beta$. Si $\gamma < \omega_\beta$, sea $M_\mu = M_\rho$, cuando $\mu = \gamma \cdot \lambda + \rho$ para cada $\lambda = 0, 1, \ldots < \omega_\beta$ y cada $\rho < \gamma$; entonces μ toma cada valor $< \omega_\beta$. Los elementos de M_μ se ordenan en el tipo ω_β: $M_\mu = \{m_{\mu,0}, m_{\mu,1}, \ldots m_{\mu,\nu}, \ldots, \nu < \omega_\beta\}$. Definimos los conjuntos $T_{\delta,1}$ y $T_{\delta,2}$, para todos los números $\delta \leq \omega_\beta$, $T_{\delta,i}$ consiste en los m_{ε,ν_i} con $\varepsilon \leq \nu$ $(i = 1$ y $2)$; m_{δ,ν_i} se determina para cada $\delta < \omega_\beta$, a saber, como un elemento de M_δ distinto de los m_{ε,ν_k} ya elegidos y de menor índice $(\nu_1 < \nu_2)$. Según esto el conjunto $T_{\delta,i}$ siempre tiene la cardinalidad de $\delta + 1$ y para $\delta \leq \omega_\beta$ arbitrario, $T_{\delta,1}$ y $T_{\delta,2}$ no tienen elementos en común; además, $T_{\omega_\beta,1}$ no contiene al elemento m_{μ,ν_2}, $T_{\omega_\beta,2}$ no contiene al elemento m_{μ,ν_1} de M_μ, de tal suerte que $T_{\omega_\beta,i}$ no contiene un M_μ como subconjunto; ya que los $T_{\omega_\beta,i}$ tienen la cardinalidad $\aleph_\beta$, ambos tienen la propiedad del conjunto T del teorema 9.

Sea ahora un "$\mathfrak{c}$-conjunto", un subconjunto del continuo, para el que cada segmento tiene la cardinalidad del continuo. Mostraremos cómo partiendo de un $\mathfrak{c}$-conjunto T denso en ninguna parte en el continuo, podemos lograr un $\mathfrak{c}$-conjunto homogéneo. Sean S el menor intervalo que se obtiene de un $\mathfrak{c}$-conjunto denso en ninguna parte perfecto N en J mediante la remoción del elemento frotera unilateral y $T = T_1$ un $\mathfrak{c}$-subconjunto de S arbitrario denso en S. Construimos los conjuntos $T_2, T_3, \ldots T_\nu, \ldots, \nu < \omega$; para cada T_ν existen ciertos intervalos entre los elementos de T_ν, los mayores posibles, sin elementos de T_ν; formamos el intervalo J geométricamente similar a T en cada J_ν y hacemos $T_{\nu+1}$ el conjunto de elementos de T_ν y de elementos de T que en su totalidad corresponden a los elementos de J_ν. El conjunto T_ω de elementos distintos en los T_ν es un conjunto homogéneo M y lo mismo se cumple para su conjunto complementario M' dentro de a J, como se demuestra sin dificultad; sea S_ω el conjunto T_ω, para el que $T = S$. Según el Sr. Baire M es de la primera categoría y M' de la segunda.

Ahora, sea $\aleph_\beta = \aleph_{\alpha'}$ la cardinalidad del continuo; además, supongamos que el conjunto de tipos homogéneos de $\mathfrak{c}$-conjuntos tiene cardinalidad $\mathfrak{k} \leq \aleph_\alpha$. Ya que los huecos son densos en todas partes en el tipo de cada $\mathfrak{c}$-conjunto homogéneo, excepto en el tipo del continuo, y hay $\mathfrak{c}$ de tales $\mathfrak{c}$-conjuntos homogéneos en cada conjunto perfecto denso en ninguna parte, como los que contienen a S, existen $\mathfrak{c}$-conjuntos homogéneos de cada tipo, cuya intersección M_μ con S tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$. Puesto que se supuso $\mathfrak{k} \leq \mathfrak{c}$, así como por el teorema 8), se pueden ordenar los conjuntos M_μ en el tipo ω_α: $\mu = 0, 1, 2, \ldots < \omega_\alpha$, e igualmente los elementos $m_{\mu,\nu}$ de M_μ, $\nu = 0, 1, 2, \ldots < \omega_\alpha$. Se forman los conjuntos $T = T_{\omega_\alpha,1}$ del teorema 9) a partir de estos conjuntos $M_\mu = \{m_{\mu,\nu}\}$; dado que cada segmento de S contiene un conjunto perfecto denso en ninguna parte y por tanto también contiene $\mathfrak{c}$ $\mathfrak{c}$-conjuntos homogéneos pertenecientes a S, T es un $\mathfrak{c}$-conjunto denso en S; así que mediante este T podemos formar un conjunto homogéneo T_ω. En vista de que T_ω tiene como intersección con S al $\mathfrak{c}$-conjunto T, T debe ser alguno de los M_μ, lo que está excludio por la construcción de T. Esta contradicción a $\mathfrak{k} \leq \aleph_\alpha$ comprueba la existencia de al menos $\aleph_{\alpha+1}$ tipos homogéneos de $\mathfrak{c}$-conjuntos; con ello se demuestra el:

Teorema 10. Si la cardinalidad del continuo es igual a $\aleph_\alpha$, existen al menos $\aleph_{\alpha+1}$ tipos homogéneos de subconjuntos del continuo con esa cardinalidad.

Aún no podemos responder a la pregunta sobre la existencia de $\mathfrak{c}$-conjunto anti homogéneos, pero podemos bosquejar un caso en el que se pueden construir tales conjuntos. Suponemos que tenemos $\aleph_0$ conjuntos homogéneos M_r densos en todas partes en un intervalo J del continuo, r es un número racional, $0 \leq \mu \leq 1$; si $r < r'$, M_r es un subconjunto de $M_{r'}$ sin subconjuntos del tipo de $M_{r'}$. Sea J el intervalo $(0, 1)$, formamos un conjunto M como la colección de todos los números x de J tales que $x < r$ y x pertenece a un $M_{r'}$ con $r' \leq x$. Si algún segemento (rr'') de M fuese homogéneo, con $r < r' < r'' < r'''$, entonces el segmento $(r''r''')$ contendría un segmento de $M_{r''}$, mientras que cada $\mathfrak{c}$-tipo que aparecen en (rr') esta contenido en $M_{r'}$, que por hipótesis no tiene subconjuntos del tipo del conjunto $M_{r''}$. En consecuencia, M sería antihomogéneo.

Como una propiedad $\mathfrak{E}$ adicional a investigar de los conjuntos densos escogemos la cardinalidad. Aquí subsisten numerosos problemas sin resolver, especialnmente, si $2^{\aleph_\alpha}$ siempre es un álef. Si hacemos esta hipótesis, la sucesión de posibles valores de $\mathfrak{E}$ sería un conjunto bien ordenado. Ahora podemos mostrar que siempre hay un pedazo de M plano respecto a $\mathfrak{E}$, si $\mathfrak{E}$ toma como valores un conjunto bien ordenado: $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \ldots \mathfrak{E}_\alpha, \ldots$, $\mathfrak{E}$ sólo está definida para pedazos infinitos, y toma un valor, en cada pedazo de un conjunto denso, con índice no mayor que el del conjunto entero. Digamos que M tiene la propiedad $\mathfrak{E}_\alpha$. Cada pedazo de M tiene la propiedad $\mathfrak{E}_\alpha$, de tal suerte que M es plano respecto a $\mathfrak{E}$, o existe un pedazo S_1 de M para el cual $\mathfrak{E} = \nu_{\alpha_1}$, y $\alpha > \alpha_1$. Podemos proceder con S_1 igual que para M, y obtener una sucesión de pedazos $S_1, S_2, \ldots S_\nu, \ldots$ con las propiedades $\mathfrak{E}_{\alpha_1}, \mathfrak{E}_{\alpha_2}, \ldots \mathfrak{E}_{\alpha_\nu}, \ldots$, donde $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_\nu > \cdots$. Puesto que los α_ν son transfinitos, esta sucesión debe ser finita; si α_μ es el menor miembro, S_μ debe ser plano respecto a $\mathfrak{E}$. De ello se sigue que M no puede ser rugoso respecto a $\mathfrak{E}$, sino solamente plano o casi plano. Que el conjunto P del teorema 7) pueda ser vacío, cuando M no es plano respecto a $\mathfrak{E}$, se logra fácilmente del ejemplo de un conjunto de tipo $\eta \cdot \Omega$ ($\Omega = \omega_1$), si $\mathfrak{E}$ significa cardinalidad. Con lo demostrado podemos formular los teoremas:

Teorema 11. Si $\mathfrak{E}$ es la cardinalidad de un conjunto y $2^{\aleph_\alpha}$ es un álef, entonces M es plano o casi plano respecto a $\mathfrak{E}$.

Teorema 12. Si $\mathfrak{E}$ sólo está definida en pedazos infinitos y toma valores en un conjunto bien ordenado: $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \dots \mathfrak{E}_\alpha, \dots$ de tal suerte que siempre se cumple la relación $\alpha \geq \alpha_1$ entre el valor $\mathfrak{E}_\alpha$ de cada conjunto denso N y el valor $\mathfrak{E}_{\alpha_1}$ de cada uno de sus pedazos, entonces M es plano o casi plano respecto a $\mathfrak{E}$.

Ahora consideramos propiedades de conjuntos densos M asociadas a los caracteres $c_{\alpha\beta}$ de los elementos y huecos de M; sea $W = \{c_{\alpha\beta}\}$ el genero del conjunto M, que en general consideraremos reducible, pero no plano para W. Si caracterizamos la propiedad $\mathfrak{E}$ de cada pedazo de M mediante su genero, $\mathfrak{E}$ está definida sólo para pedazos infinitos; un ejemplo sencillo muestra de inmediato la existencia de conjuntos M rugoso respecto al genero.

Para ello construimos una sucesión de conjuntos $G_0, G_1, \dots G_\alpha, \dots$, α un transfinito arbitrario. Sea G_0 de tipo $1 + \omega^* + \omega + 1$. G_α siempre debe ser cerrado. El conjunto $G_{\alpha+1}$ lo obtenemos si introducimos un conjunto de tipo $\omega^*_{\alpha+1} + \omega_{\alpha+1}$ entre cualesquier dos elementos vecinos a y b de G_α. Para α un número límite, G_α consiste en los elementos de todos los $G_{\alpha'}$ con $\alpha' < \alpha$, con el mismo orden, y en el conjunto de todas las parejas que se hayan introducido en cada hueco del primer conjunto. Sea $\omega(1+\gamma) = \alpha$, denotamos con H_γ un conjunto que se obtiene de G_α eliminando los elementos frontera y fusionando cada pareja de elementos vecinos en un sólo elemento. Cada uno de los conjuntos continuos $H_0, H_1, \dots H_\gamma, \dots$ es rugoso para $\mathfrak{E}$ cuando ésta es el genero. En caso contrario existiría un segmento S de H_γ plano respecto a $\mathfrak{E}$. Primero determinamos el G_α con menor índice $\overline{\alpha}$ a partir de la construcción de H_γ, de tal suerte que el subconjunto de H_γ entre la pareja de elementos vecinos de $G_{\overline{\alpha}}$ pertenece a S; cuando no existe $G_{\overline{\alpha}}$ con $\overline{\alpha} < \omega(1+\gamma)$, entonces S no sería un segmento, lo que se comprueba con facilidad. Sea ω_β un número inicial, tal que ningún $G_{\alpha'}$ con $\alpha' < \omega(1+\gamma)$, cuyos elementos pertenecen a H_γ, tenga carácter $c_{\beta\beta}$. Cada elemento h de H_γ con otro carácter es límite bilateral de un $G_{\alpha'}$ con menor posible $\alpha' < \omega(1+\gamma)$; α' siempre es un sucesor. Si $\alpha' = \omega \cdot \delta + 1$, h tiene carácter $c_{\alpha'\varepsilon}$ o $c_{\varepsilon\alpha'}$ con $\varepsilon \leq \alpha'$; sino h es un $\omega_{\alpha'}$- o un $\omega^*_{\alpha'}$-límite, y, si no ocurren ambos simultáneamente, h es un ω_ε- o un ω^*_ε-límite con ω_ε regular $< \omega_{\alpha'}$. De los números $\overline{\alpha} + 1$ y $\overline{\alpha} + 2$ al menos uno es distinto de β; digamos que éste es ζ; puesto que S contiene $c_{\zeta\zeta}$-límites y estos son densos en ninguna parte en S, ya que todos pertenecen a G_ζ, S no es plano respecto al genero, de donde se sigue la rugosidad respecto al genero de H_γ. Con ello se demuestra el:

Teorema 13. Cada uno de los conjuntos H_γ, γ un transfinito arbitrario, es rugoso respecto al genero.

Ya que cada conjunto irreducible respecto al genero es plano y se ha demostrado la existencia de conjuntos rugosos respecto al genero, puede ocurrir que un conjunto denso sea casi rugoso respecto al genero en el caso más general.

Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ las cardinalidades del conjunto de los α, respectivamente β, en los $c_{\alpha\beta}$ de W; además, sea $c_{\sigma\sigma}$ el carácter simétrico $c_{\alpha\alpha}$ de W con menor α. Si $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} < \aleph_\sigma$, M debe ser casi plano respecto al genero, como ahora mostraremos. Si los ω^*_β-límites son densos en un pedazo de un M continuo, entonces también son densos allí los ω^*_γ-límites con $\gamma < \beta$, pues cada ω^*_β-sucesión contiene ω^*_γ-sucesiones. Si $\mathfrak{E}$ es el mayor valor o el límite $\overline{\alpha}$ en el α de $c_{\alpha,\beta}$ para β fijo en un segmento S de M, entonces $\mathfrak{E}$ tomo sólo un conjunto bien ordenado de valores y en cada segmento S_1 de S el valor $\mathfrak{E}_1$ es un transfinito $\overline{\alpha}_1 \leq \overline{\alpha}$, de tal forma que M es casi plano para $\overline{\alpha}$ según el teorema 12. Si $\mathfrak{a}$ o $\mathfrak{b}$ son igual a 1, entonces α, respectivamente β, toma sólo el valor

0; por ejemplo, $\mathfrak{b} = 1$, $\beta = 0$. Entonces existe un segemento S de M que es lano para $\overline{\alpha}$; los $c_{\alpha 0}$-elementos de L son densos en S para cada $\alpha \leq \overline{\alpha}$ y S es irreducible. Por el contrario, es fácil construir conjuntos rugosos respecto al genero para los cuales $\mathfrak{b} = 2$.

Suponga ahora que el conjunto de caracteres $c_\nu = c_{\alpha\beta}$ de un conjunto continuo M rugoso respecto al genero está ordenado en el tipo del menor número posible, un número inicial ω_γ: $c_1, c_2, \ldots$; se tiene $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \aleph_\gamma$. Además, recordemos que un segemento no contiene sus puntos extremos, de donde se obtiene el sentido de la siguiente definición:

Definición. Un segmento S' está dentro del segemento S, si los dos extremos de S' pertencen a S.

Consideremos ahora una sucesión de segmentos $S_0, S_1, \ldots$ de M, donde S_ν está dentro de S_μ para $\mu < \nu$. Sea S_0 arbitrario. Para ν un número límite, sea S_ν el mayor segemento dentro de todos los S_μ con $\mu < \nu$. Para ν arbitraria suponga que los $c_\varkappa$-elementos, para cada $\varkappa < \lambda$, son densos en S_ν o que no hay en absoluto, pero que esto no es cierto para $\varkappa = \lambda$; entonces sea $S_{\nu+1}$ un segmento de S_ν en el que no existan c_λ-elementos. Si existe algún S_ν y un $\lambda < \omega_\gamma$, entonces también existe $S_{\nu+1}$. Puesto que λ puede tomar a lo más $\aleph_\gamma$ valores para ν creciente, se determinan a lo más $\aleph_\gamma$ segmentos S_ν; pero si $\gamma < \sigma$, nunca puede converger el conjunto de los S_ν a un punto de M; de lo contrario $c_{\sigma\sigma}$ no sería el $c_{\alpha\alpha}$ de M con el menor índice α. Así que existe, para $\gamma < \sigma$, un S_ν de mayor índice $\nu = N$, en el que los $c_\varkappa$-elementos para cada $\varkappa$ son densos en todas partes o no existen. Por lo tanto, S_N es irreducible y dado que S_0 fue arbitrario, se sigue que cada M con $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} < \aleph_\sigma$ es casi plano respecto al genero.

Antes de formular este resultado, lo queremos generalizar. Si los $c_{\sigma\sigma}$-elementos no son, en M, densos en todas partes, corresponde incorporar el valor $\sigma = \sigma'$ de un segemento de M, que puede ser mayor que el valor para M; puesto que el valor $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ de este segmento es a lo más igual que el de M, mientras que su valor σ es al menos igual al de M, puede ocurrir que su σ-valor siga a una mayor cota inferior del valor $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ de un M rugoso respecto al genero. Ahora consideremos la totalidad de los valores posibles $\sigma = \sigma'$ de tal M, de tal forma que el conjunto de los $c_{\alpha\alpha}$-elementos de M con $\sigma < \sigma'$ es denso en ninguna parte en M, así que el tipo ς_0 de los valores ν en la sucesión $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots \sigma'_\nu, \ldots$ sólo puede ser un número sucesor o un π_1-número, y en el último caso coincide con el límite σ'_0 de los σ'_ν. De lo contrario el número límite $\varsigma_0 \leq \sigma'_0$ es el límite de una sucesión con tipo un π_0-número $\omega_\delta \leq \varsigma_0$ y para $\varsigma_0 = \sigma'_0$ siempre se cumple $\delta < \sigma'_0$ porque $\varsigma_0 = \sigma'_0 = \delta$ implica la igualdad de δ y ω_δ, así que δ sería un π_1-número y el caso que se pensó posible aparece. Supongamos que éste está excluido y que σ'_0 es el límite de una sucesión $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots$ en tipo ω_δ, donde $\varkappa_0 > \delta$. Entonces existiría una sucesión de segmentos S_ν de M, ν en tipo $\omega_\delta + 1$ y S_ν dentro de S_μ para cada $\mu < \nu$. Para ν un número límite, sea S_ν el mayor de tales segmentos de M. Sean S_1 un segmento sin $c_{\alpha\alpha}$-elementos para cada $\alpha < \varkappa_0$, en caso contrario un segemento arbitrario de M, $S_{\nu+1}$ un segemento de S_ν libre de $c_{\alpha\alpha}$-elementos de M para cada $\alpha < \aleph_\nu$. Puesto que S_1 no tiene $c_{\alpha\alpha}$-elementos con $\alpha \leq \delta$, y ν sólo puede tomar valores $\nu \leq \omega_\delta$, el conjunto de los S_ν no puede tener un punto de M como límite y existir, para cada uno de estos ν. Ya que cada segmento de M contiene un segmento S_1 y existe necesariamente S_{ω_δ} libre de $c_{\sigma'\sigma'}$-elementos, los ς_0 valores $\sigma' = \sigma$, no pueden ser la totalidad de los σ', por lo que ς_0 sólo puede ser, cuando es un número límite, un π_1-número. La presencia de segmentos irreducibles en M no impide aparentemente la validez del siguiente:

Teorema 14. Para cada conjunto continuo M existe un menor número inicial $\omega_{\overline{\sigma}}$ siempre regular con $\overline{\sigma} \geq \sigma$, tal que el conjunto de los $c_{\alpha\alpha}$-elementos de M con $\alpha \leq \overline{\sigma}$ es denso en al menos un segemento de M.

Si el σ de un segmento del conjunto continuo M rugoso respecto al genero es igual al $\overline{\sigma}$ de M, por supuesto se debe cumplir $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \geq \aleph_{\overline{\sigma}}$. Pero si el conjunto de los $c_{\alpha\alpha}$-elementos con $\alpha < \overline{\sigma}$ (como en $H_{\pi_{\nu,1}}$ con $\nu > 0$ según el teorema 13) es denso en un segemento de M, existen números arbitrariamente grandes $\sigma' < \overline{\sigma}$, que son los σ de un segmento de M; entonces $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ debe ser mayor que cada uno de los $\aleph_{\sigma'}$, así, debe ser al menos igual al límite $\aleph_{\overline{\sigma}}$ de estos valores $\aleph_{\sigma'}$. Por consiguiente, siempre se cumple $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \geq \aleph_{\overline{\sigma}}$. Pero aún los límites así obtenidos se pueden hacer crecer, si $\overline{\sigma}$ toma valores distintos en segmentos distintos de M. Denote con ς el mayor de estos valores o el límite de la sucesión de los valores $\overline{\sigma}$ en los segmentos de M; ς puede ser cualquier transfinito, es decir, puede ser también un número límite arbitrario. Si ς es el mayor valor $\overline{\sigma}$, se cumple inmediatamente $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \geq \aleph_{\varsigma}$; si ς es el límite de los valores $\overline{\sigma}$ de todos los segmentos distintos de M, entonces para cada $\overline{\sigma}$ se cumple: $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} > \aleph_{\overline{\sigma}}$, que también nos da la cota inferior: $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \geq \aleph_{\varsigma}$. Ahora podemos determinar ς para cada M denso. Si aquí $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} < \aleph_{\zeta}$, existe un segmento de M, con $\aleph_{\overline{\sigma}} > \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ y este segmento debe ser necesariamente casi plano respecto al genero, pues cada uno de sus subsegmentos también contienen segmentos con $\aleph_{\sigma} > \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Pero si el valor $\overline{\sigma}$ para M es tan pequeño que $\aleph_{\overline{\sigma}} \leq \mathfrak{a} + \mathfrak{b} < \aleph_{\varsigma}$, M puede ser así casi rugoso, es decir, poseer segmentos rugosos respecto al genero. Resumiendo, formulamos el:

Teorema 15. Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son las cardinalidades de los conjuntos $\{\alpha\}$, respectivamente $\{\beta\}$, de los distintos α, respectivamente β, en los $c_{\alpha\beta}$ del genero W de un conjunto M rugoso respecto al genero y ς es el mayor de los valores $\overline{\sigma}$ en los segmentos de M o su límite, entonces $\mathfrak{a}$ y son mayores que 1 y $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \geq \aleph_{\varsigma}$. Si $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ es menor que el valor $\aleph_{\overline{\sigma}}$ de M, entonces M es casi plano respecto al genero.

En los conjuntos H_{γ} arriba construidos (teorema 13) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ tienen el mismo valor y tambien se cumple que los $c_{\overline{\sigma}\,\overline{\sigma}}$-elementos son densos en M. Para conjuntos que son casi planos respecto al genero, σ puede tomar valores arbitrarios; por ejemplo, se sustituye cada límite simétrico de un conjunto rugoso respecto al genero por un conjunto M_{σ} por un ω_{σ}^{*}, respectivamente ω_{σ}-límite, como primer respectivamente último elemento, cuyo límite simétrico tiene caracter $c_{\sigma\sigma}$. Si H_{γ} es un conjunto del teorema 13 y K_{α} es del tipo η_{α} descrito en breve para ω_{α} regular, entonces para $\alpha > 0$ y $\gamma = \omega_{\alpha}$ el conjunto $H_{\gamma} + K_{\gamma+1}$ es un ejemplo de un conjunto casi rugoso con $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \aleph_{\alpha}$, $\sigma = 1$, $\overline{\sigma} = \alpha$ y $\varsigma = \omega_{\alpha} + 1$.

Puesto que sólo queremos probar la existencia de ciertos subconjuntos de M, suponemos que M no es necesariamente continuo, sino solamente denso; más aún, sea M rugoso respecto al genero y $c_{\sigma\sigma}$, cuando no se diga otra cosa, el menor carácter simétrico de M mismo. Entonces M es, según el Sr. Hausdorff, un $c_{\sigma\sigma}$-conjunto[1], por lo que contiene un subconjunto de tipo η_{σ}, que contiene subconjuntos del tipo de cada conjunto lineal de cardinalidad $\leq \aleph_{\sigma}$. Pero si M contiene segmentos, cuyo menor carácter simétrico $c_{\sigma'\sigma'}$ tiene un $\sigma' > \sigma$, entonces M posee tambien subconjuntos de tipo $\eta_{\sigma'}$. Si $\overline{\sigma}$ es el valor de M del teorema 14, entonces cada segmento S de M contiene seguramente un subconjunto de tipo $\eta_{\overline{\sigma}}$, cuando $\overline{\sigma}$ no es un π_1-número, porque S contiene segmentos cuyo σ es al menos igual a $\overline{\sigma}$. Esto queremos mostrarlo ahora, si $\overline{\sigma}$ es un π_1-número pero no es un ρ_0-número; en general, para $\overline{\sigma}$ como ρ_0-número parece que la demostración

[1]Math. Ann. Vol. **65**(1908), págs. 487 y 496.

falla por las propiedades de los ρ_0-números.

Si $\overline{\sigma}$ es un π_1-número, pero no un ρ_0-número, mostraremos la existencia de ciertos elementos de M y segmentos de la cerradura $[M]$ de M dentro de un segemento arbitrario S de M tales que la totalidad de elementos contiene un subconjunto de tipo $\eta_{\overline{\sigma}}$, porque él posee subconjuntos del tipo de cada conjunto lineal de cardinalidad $\leq \aleph_{\overline{\sigma}}$. Sean $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\nu, \ldots$ una sucesión ρ_0-ajena de números con $\overline{\sigma}$ como límite, de la cual ningúna sección tiene como límite un π_0-número. Los segmentos S_δ de S a elegir deben tener una ***altura*** arbitraria $\delta < \overline{\sigma}$ y todos los segmentos de altura δ deben estar separados. Se elige un único segmento S_1 de $[M]$ con altura $\delta = 1$, dentro de S y sin $c_{\alpha\alpha}$-elementos para cada $\alpha < \tau_1$; sea m_1 un elemento arbitrario de M en S_1. Si ya se tiene un segmento S_δ con altura δ con un elemento m_δ de M en el que no esté presente ningún $c_{\alpha\alpha}$-elemento de $[M]$ para $\delta < \overline{\sigma}$ con $\alpha < \tau_\nu$ y ν es arbitrario menor que δ, entonces se escogen dentro de S_δ dos y sólo dos segmentos con altura $\delta + 1$, $S'_{\delta+1}$ a la izquierda y $S''_{\delta+1}$ a la derecha de m_δ y esto debe producir, partiendo de la totalidad de los S_δ, todos los $S_{\delta+1}$; en ningún segmento $S_{\delta+1}$ debe estar un $c_{\alpha\alpha}$-elemento de $[M]$ con $\alpha < \tau_\delta$; en cada $S_{\delta+1}$ se escoge otro elemento $m_{\delta+1}$ de M. Si $\delta < \overline{\sigma}$ es un número límite, existen mayores segmentos S_δ de $[M]$ que consisten en la totalidad de los elementos en común con $[M]$ en una sucesión de $S_{\delta'}$ que se contiene sucesivamente, cada uno con altura $\delta' < \delta$; sea $S_1, S_2, \ldots, S_{\delta'}, \ldots$ una de tales sucesiones de los $S_{\delta'}$; puesto que ninguna sección de la sucesión de los τ_ν tiene como límite un π_0-número $\delta < \overline{\sigma}$ y $S_{\delta'+1}$ no contiene ningún $c_{\alpha\alpha}$-elemento de $[M]$ con $\alpha < \tau_{\delta'+1}$, existe S_δ realmente como segmento; la totalidad de las sucesiones $\{S_{\delta'}\}$ debe producir a todos los S_δ y en cada uno de los S_δ se elige un elemento m_δ de M. Dado que ninguna sección de la sucesión de los τ_ν tiene un π_0-número como límite, existen los conjuntos de los S_δ y m_δ para cada $\delta < \overline{\sigma}$. Esta deducción no se puede obtener para $\overline{\sigma}$ un ρ_0-número, porque los $S_{\delta'}$ con $\delta' < \delta$ para δ un π_1-número pueden converger a un punto de M, lo que al menos dificulta la demostración. Ya que cada m_δ es un $c_{\overline{\sigma}\,\overline{\sigma}}$-límite del conjunto M' de todos los m_δ para toda δ y M' tiene solamente $c_{\overline{\sigma}\tau}$- y $c_{\tau\overline{\sigma}}$-huecos con $\tau \leq \overline{\sigma}$, lo que se demuestra con facilidad, M' posee un subconjunto de tipo $\eta_{\overline{\sigma}}$. En forma correspondiente, para $\overline{\sigma}$ un ρ_0-número, sólo podemos probar que tiene subconjuntos de cada tipo η_α para $\alpha < \overline{\sigma}$.— Mediante una elección adecuada de los $S_{\delta+1}$ podemos lograr que en cada hueco de M' esté un elemento de M, excepto quizá, cuando éste sea un $c_{\overline{\sigma}\,\overline{\sigma}}$-hueco; cuando S no contiene $c_{\overline{\sigma}\,\overline{\sigma}}$-huecos, por supuesto que tiene subconjuntos del tipo de la cerradura de M. Sin contar con una extensión obvia, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 16. Cada conjunto denso M cuyo número $\overline{\sigma}$ del teorema 14 no sea un ρ_0-número, contiene en cada uno de sus segmentos un subconjunto de tipo $\eta_{\overline{\sigma}}$ y, con ello, subconjuntos del tipo de cada conjunto lineal de cardinalidad $\leq \aleph_{\overline{\sigma}}$.

En las investigaciones efectuadas hasta ahora tiene una gran importancia el límite simétrico, por lo que queremos averiguar, si al menos podemos caracterizar la cerradura de un conjunto denso M mediante su subconjunto de límites simétricos de un tipo; para ello estos límites deben ser densos en M. Al considerar el conjunto H_γ del teorema 13 se deduce que ningún tipo de límites asimétricos es denso en un segmento de H_γ, mientras que sí lo es un tipo de límite simétrico. Para un conjunto arbitrario continuo M es natural que sólo podamos esperar la existencia de un segmento en el que un tipo de $c_{\alpha\alpha}$-límites sea denso. En esto siempre se puede suponer que M es rugoso respecto al genero, de no serlo, son densos sus $c_{\sigma\sigma}$-elementos en un segmento de M. La totalidad de límites simétricos es densa en M; por ello suponemos ahora que ningún tipo de

$c_{\alpha\alpha}$-elementos es denso en un segmento de M. Suponemos ahora que los α elementos del $c_{\alpha\alpha}$ de M están ordenados en una sucesión: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ En un segmento de M puede ser denso el conjunto de los $c_{\alpha\alpha}$-elementos con los τ menores $\alpha = \alpha_\nu$ para el menor τ; según el teorema 12, M es casi plano para τ y se reduce a un segmento plano para τ. τ no puede ser un número intermedio $\tau' + 1$, pues si los $c_{\alpha\alpha}$-elementos con $\alpha < \alpha_{\tau'}$ no fuesen densos en M, no se afecta esto aunque se añada el conjunto denso en ninguna parte de los $c_{\alpha\alpha}$-elementos con $\alpha = \alpha_{\tau'}$. Si τ es un número límite, a lo más es un ρ_0-número. De lo contrario distinguimos los casos en que τ es: 1. El límite de una sucesión de números en el tipo del π_0-número ω_β menor que el límite α' de los ω_{α_ν} con $\nu < \tau$, o 2. un π_1-número igual a α', pero que no es un ρ_0-número. En el primer caso sea α' el límite de la sucesión $\tau_1, \tau_2, \ldots$ en tipo ω_β y cada $\tau_\nu > \omega_\beta$ (compárese pág. 24, renglón 27)[1]; en el segundo caso sea $\tau_1, \tau_2, \ldots$ una sucesión ρ_0-ajena con $\tau = \alpha'$ como límite. Existen entonces en cada segmento de M una sucesión de segmentos $S_1, S_2, \ldots$ tal que S_ν, para $\mu < \nu$, siempre está dentro de S_μ; en otro caso sea S_1 arbitrario libre de $c_{\alpha\alpha}$-elementos con $\omega_\alpha < \tau_1$, y los segmentos S_ν no contienen $c_{\alpha\alpha}$-elementos con $\omega_\alpha < \tau_\nu$. La existencia de S_ν para todo número límite $\nu < \omega_\beta$, respectivamente τ, se sigue, en el primer caso, de que S_1 no tiene $c_{\alpha\alpha}$-elementos con $\omega_\alpha < \tau_1$, y para $\nu < \omega_\beta$ y $\omega_\beta < \tau_1$, los S_μ con $\mu < \nu < \omega_\beta$ no pueden converger a un punto de S_1; análogamente en el segundo caso, un límite del tipo que deben tener los S_μ con $\mu < \nu$, no puede estar presente en todos los S_μ para $\mu < \nu$ suficientemente grande, pues la sucesión de los τ_ν es ρ_0-ajena. Los mismos razonamientos muestran que dentro de la totalidad de los S_ν existe un segmento libre de $c_{\alpha\alpha}$-elementos para $\alpha = \alpha_\nu (\nu < \tau)$ arbitrario, mientras que su conjunto debe ser denso en M, o en el segundo caso los $c_{\tau\tau}$-límites deben ser densos en M, lo cual está excluido. Cuando τ es igual a un ρ_0-número α', no podemos generar una contradicción similar. Por ello se cumple el:

Teorema 17. Si el conjunto continuo rugoso respecto al genero M contiene segmentos tales que en cada subsegmento es denso el conjunto de los $c_{\alpha\alpha}$-elementos con los τ valores menores posibles α posible, y sτ no es un ρ_0-número igual al límite de estos, entonces al menos un tipo de $c_{\alpha\alpha}$-elementos es denso en un segmento de M.

Por consiguiente, no está excludio para τ un ρ_0-número y límite de los $\alpha = \alpha_\nu$ con $\nu < \tau$ que cada tipo de límites simétricos en M sea denso en ninguna parte, así que la colección de los $c_{\alpha\alpha}$-elementos con $\alpha < \tau$ se pueda elegir como el "universo" de un conjunto M plano respecto a τ.

Mientras que hasta ahora sólo hemos investigado las propiedades de pedazos y segmentos, construiremos una función definida en los elementos de un conjunto denso M.

Definición. Una cubierta izquierda o i-cubierta de m del conjunto denso M es el genero $I(m)$ del segmento de M entre m y un elemento arbitrario m' de M a la izquierda de m; en forma correspondiente, $D(m)$ es un cubierta derecha o d-cubierta de m. Una cubierta o cubierta completa $G(m)$ consiste en todos los caracteres distintos de un $I(m)$ y de un $D(m)$.

Para un M irreducible ocurre $I(m) = D(m) = G(m)$. Estas cubiertas son independientes de m y definidas unívocamente. $I(m)$ puede ser distinto de $D(m)$, si M es irreducible; además, las I y D no tienen por que estar determinadas unívocamente, siempre referidas a un m que aquí no se escribirá más, porque m' es arbitrario. Así que un subconjunto de los carácteres que

[1] N. del T. no existe la página indicada en el texto original por Mahlo.

no aparecen en una vecindad arbitraria de m, se puede desechar; pero si queremos proceder así con cada uno de tales carácteres, I y D podrían no tener elementos; así que ciertas cubierta del H_γ de antes podrían tener sólo un $c_{\alpha\alpha}$ como elemento, donde no existiría ningún m'. Si m' es arbitrario, I y D también son en el mismo sentido arbitrarias, como los conjuntos que tienen como límite un determinado elemento. Sean otra vez $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ las cardinalidades de los conjuntos de los distintos α, respectivamente β, en los $c_{\alpha\beta}$ de un conjunto continuo M rugoso respecto al genero. La arbitrariedad de I y D puede ser especialmente grande para un $\omega_\alpha-$, respectivamente ω_β^*-límite, para el que $\aleph_\alpha$ respectivamente $\aleph_\beta$, sea $\leq \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$. Según el teorema 12, M es casi plano respecto a $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ y lo queremos suponer aquí plano respecto a $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$. Puede existir un conjunto bien ordenado de cubiertas izquierdas $I_\nu(m)$ con cardinalidad $\leq \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ para un ω_α-límite m con $\aleph_\alpha \leq \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, cuyas m' con ν creciente se acercan arbitrariamente a m. Cuando $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \aleph_\gamma$ y $\gamma = \omega_\gamma$, no tiene por que haber un ω_α- o ω_β^*-límite con $\aleph_\alpha$, respectivamente $\aleph_\beta > \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, como lo muestran los conjuntos H_γ del teorema 13; para $\gamma < \omega_\gamma$ deben existir tales ω_α- o ω_β^*-límites, pues el conjunto de números $\leq \gamma$ tiene cardinalidad $\overline{\gamma} < \aleph_\gamma$. Entonces, si se cumple $\aleph_\alpha > \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, cada conjunto bien ordenado de cubiertas izquierdas $I_\nu(m)$ del ω_α-límite m es de tipo $< \omega_{\gamma+1}$, en tanto, para $\mu < \nu$, I_ν sea un subconjunto propio de I_μ; ya que m es límite sólo de una sucesión en un tipo $\delta \geq \omega_{\gamma+1}$, el correspondiente m' no puede acercarse arbitrariamente a m; por ello debe existir un mayor segmento de $[M]$ con m como extremo derecho, en el que cada punto como m' produce la misma $I(m)$. Con esto se ha demostrado:

Teorema 18. Para cada ω_α-límite m de un conjunto M rugoso respecto al genero existe, para $\aleph_\alpha > \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, una i-cubierta $I(m)$, cuya m' es un punto arbitrario de un segmento de $[M]$ con m como extremo derecho; lo correspondiente se cumple para el ω_β^*-límite m con $\aleph_\beta > \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$.

I y D son siempre el genero de un conjunto rugoso respecto al genero. El Sr. Hausdorff demostraó que el conjunto de caracteres del genero W de un conjunto denso no es totalmente arbitrario, pues debe contener un caracter simétrico y, cuando contiene un ω_α- respectivamente un ω_β^*-límite, también contiene un ω_γ- y un ω_δ^*-límite para cada $\gamma < \alpha$ y $\delta < \beta$; un conjunto de caracteres que satisface estas propiedades se conoce como ***completo***.[1] Aquí se tiene un problema aún sin resolver: para $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \aleph_\gamma$ y γ un π_1-número, ¿deben aparecer ω_γ- o ω_γ^*-límites en conjuntos irreducibles? Podemos mostrar fácilmente que antes de contestar esta pregunta se debe resolver el problema de la cardinalidad análogo al problema del continuo, como se esboza aquí. Sea $\aleph_0^{\aleph_0} \geq \aleph_\alpha = \mathfrak{p}$, donde $\alpha = \pi_{1,1}$ es el menor π_1-número > 0; entonces se puede distinguir un conjunto denso en el continuo de $\mathfrak{p}$ puntos que llamamos $1, 2 \ldots \nu, \ldots$ $(\nu < \pi_{1,1})$. En lugar de cada ν se sustituye un conjunto de tipo $\eta_{\nu+1}$ y el conjunto así construido tiene el tipo μ; la potencia de Hausdorff[2] de la primera clase $\mu_m(\omega)$ con elemento principal arbitrario m contiene entonces, al igual que μ, subconjuntos bien ordenados de cada tipo $< \pi_{1,1}$ pero no de tipo $\pi_{1,1}$ y es además irreducible; lo mismo se cumple para $\mu_m^*(\omega)$, como se demuestra fácilmente. Igualmente con ayuda de la potencia de Hausdorff de la primera clase se reconoce sin dificultad lo siguiente, importante sólo para π_1-números β:

Teorema 19. Si el conjunto continuo M es de cardinalidad $\geq \aleph_\alpha$, la cardinalidad de un número β y M no contiene subconjuntos de tipo ω_β y ω_β^*, entonces existen, para un ω_β regular, conjuntos irreducibles con subconjuntos de cada tipo $< \omega_\beta$, respectivamente $< \omega_\beta^*$, pero sin

[1] Math. Ann. **65**(1908), pág. 477.
[2] Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. W., Leipzig, **58**(1906), pág. 110.

subconjuntos de tipo ω_β o ω_β^*.

Si ω_α es regular, el conjunto $\{c_{0\sigma}, c_{\sigma 0}; c_{1,\sigma}, c_{\sigma 1}; \ldots c_{\nu\sigma}, c_{\sigma\nu}(\nu < \sigma); \ldots c_{\sigma\sigma}\}$ es un conjunto de caracteres completo, para el que ninguno de sus subconjuntos propios tiene el genero de un conjunto denso. Ahora, sea M continuo y rugoso respecto al genero, así como $c_{\sigma\sigma}$ su menor caracter simétrico. Por la rugosidad existe un segmento S de M, cuyo genero W_S no contiene al menos un caracter del genero W de M. Por ello existe una sucesión de segmentos $S_1, S_2, \ldots S_\nu, \ldots$ con $\nu < \omega_\sigma$ y S_ν dentro de S_μ para cada $\mu < \nu$, donde el genero W_ν de S_ν no contiene al menos el caracter c_ν del genero de S_μ. Si la cardinalidad $\mathfrak{d} < \aleph_0$, siempre existe un conjunto de caracteres de cardinalidad $> \mathfrak{d}$, que se puede remover de W, y el resto de W permanece con el genero de un conjunto denso. Cuando $\overline{\sigma}$ es la magnitud caracterizada en el teorema 14, esto se cumple también para cada $\mathfrak{d} < \aleph_{\overline{\sigma}}$; si ς representa, como en el teorema 15, el mayor de los valores $\overline{\sigma}$ en los diversos segmentos de M, respectivamente su límite, entonces lo mismo se cumple para cada $\mathfrak{d} < \aleph_\varsigma$; la demostración se obtiene de que necesariamente existen segmentos de M, con $\aleph_\sigma > \mathfrak{d}$. Ahora queremos mostrar que se pueden extraer conjuntos de M de cada cardinalidad $\mathfrak{d} \leq \aleph_\varsigma$, mientras que el resto de W tiene cardinalidad $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

M no tiene por que ser plano para la cota superior $\overline{\alpha}$, mayor que cada α, en los $c_{\alpha\beta}$ de W; la sucesión de segmentos S_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, S_{\nu+1}$ dentro de S_ν y de un $\overline{\alpha}$ menor que S_ν, debe ser finita, pues los $\overline{\alpha}$ son transfinitos. Si $\overline{\beta}$ es el correspondiente número para los β en $c_{\alpha\beta}$ de W, existe un segmento S de M, en el que los ω_α- y ω_β^*-límites son densos para cualesquier $\alpha < \overline{\alpha}_S$ y $\beta < \overline{\beta}_S$. Ahora, sean $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ la sucesión de los valores σ en los segmentos de S y ς su mayor valor o límite. Para cada σ_μ tenemos un conjunto de caracteres $d_{\mu 1}, d_{\mu 2}, \ldots d_{\mu\nu}$ ($\nu < \omega_{\sigma_\mu}$),... del genero W_S de S tal que si apartamos de W_S todos los $d_{\mu\nu'}$ con $\nu' < \nu < \omega_{\sigma_\mu}$ existirá un segmento $S_{\mu\nu}$ de S sin un $d_{\mu\nu'}$-elemento, donde para $\lambda < \nu$, $S_{\mu\nu}$ siempre está dentro de $S_{\mu\lambda}$. Ahora podemos, con ayuda de los $d_{1\nu}$, extraer de W_S un subconjunto de cardinalidad $\aleph_{\sigma_1}$, de tal suerte que el resto de W_S contenga todavía caracteres $c_{\alpha\beta}$ para cada α y β de S. Si aparece un $\alpha = \alpha'$ arbitrario sólo para $\mathfrak{e} < \aleph_{\sigma_1}$ elementos $d_{1\nu}$, entonces existe un $S_{1\lambda}$ que no contiene $d_{1\nu}$-elementos con $\alpha = \alpha'$; puesto que en $S_{1\lambda}$ son densos los $c_{\alpha'\beta}$-elementos, el resto $W - \{d_{1\nu}\}$ de W_S contiene con seguridad un $c_{\alpha'\beta}$. Pero si aparece un $\alpha = \alpha'$ en $\aleph_{\sigma_1}$ elementos $d_{1\nu}$, el conjunto de los $d_{1\nu}$ se restringe al conjunto de sus elementos con el menor de tales $\alpha = \alpha'$ despojado de su primer elemento; ya que aquí los $d_{1\nu}$ tienen β valores diferentes, el resto de W_S posee con seguridad un elemento para cada α y β de S. Esta última operación se puede efectuar, de ser necesario, para un $\beta = \beta'$ de los $d_{1\nu}$. Como se puede tratar de la misma forma a los $d_{\mu\nu}$ en lugar de los $d_{1\nu}$ para μ fijo pero arbitrario, para cada σ_μ se puede extraer un subconjunto E_μ de cardinalidad $\aleph_{\sigma_\mu}$ de W_S, de tal forma que el resto $W_S - E_\mu$ tiene elementos $c_{\alpha\beta}$ para cada α y β de S. El conjunto E de los distintos elementos de todos los E_μ tiene cardinalidad $\aleph_\varsigma$; en lo sucesivo, sea ς un número límite. Si el conjunto de los $c_{\alpha\beta}$ con $\alpha = \alpha'$ en E tiene más de un elemento, podemos eliminar de E los $c_{\alpha'\beta}$ con menor β sin modificar la cardinalidad de E; si E contiene solamente un $c_{\alpha'\beta}$, estamos seguros de que $W_S - E$ posee aún un $c_{\alpha'\beta}$ y no cambiamos E; si E se ha examinado de esta forma para cada uno de sus $\beta = \beta'$, entonces con seguridad tiene aún la cardinalidad $\aleph_\sigma$, y $W_S - E$ contiene carácteres para cada α y β de S.

Si el valor ς de S es menor que el valor ς de M, consideremos una sucesión de segmentos separados $S_1, S_2, \ldots S_\nu, \ldots$ elegida de tal forma que sus valores σ convergen al valor ς de M, respectivamente tienen a ς como mayor valor, mientras que cada S_ν es plano para $\overline{\alpha}$ y $\overline{\beta}$; además, para cada S_ν sea $E = F_\nu$ un conjunto determinado. Al igual que como pasamos de E_μ a E, podemos pasar de F_ν a un conjunto de carácteres F de cardinalidad $\aleph_\varsigma$ (ς es el valor de M), de tal forma que el resto $W - F = G$ aún contiene carácteres $c_{\alpha\beta}$ para cada α y β de M. Puesto que el conjunto de distintos α y β debe tener cardinalidad $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, G también tiene la cardinalidad $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ de W. Si escogemos en W un subconjunto arbitrario F' de F en lugar de F con cardinalidad arbitraria $\mathfrak{d}$ menor o igual que la de F, entonces el conjunto resto $W - F' = H$ de W posee, al igual que G, caracteres $c_{\alpha\beta}$ para cada α y β de W; H debe contener, sin embargo, el menor carácter simétrico $c_{\sigma\sigma}$ de M.

Sea $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \aleph_\gamma$ y supongamos que los carácteres $h = c_{\alpha\beta}$ de H están ordenados en el tipo ω_γ: $h_1, h_2, \ldots$. Partiendo del conjunto continuo no acotado $M = T_0$, construimos $\omega_\sigma + 1$ conjuntos T_ν, cuyo último conjunto T_{ω_σ}, tiene el genero H. T_1 se origina de T_0 mediante sustitución de cada $c_{\alpha\beta}$-elemento de T_0 por un conjunto cerrado $C_{\alpha\beta}$. α', respectivamente β', significa el $\breve{\alpha}$, respectivamente $\breve{\beta}$, de $c_{\breve{\alpha}\beta} = h_{\mu'}$, respectivamente $c_{\alpha\breve{\beta}} = h_{\mu''}$, los h_μ de menor índice para su α y β dados de $C_{\alpha\beta}$, y sea ν el menor de los números μ' y μ''; entonces $C_{\alpha\beta}$ adquiere el tipo $1 + \omega^*_{\beta'} + \delta_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha'} + 1$; si $h_\lambda = c_{\alpha_\lambda\beta_\lambda}$ y $\omega_{\alpha_\lambda} + 1 + \omega^*_{\beta_\lambda} = \varepsilon_\lambda$, sea:

$$\delta_{\alpha\beta} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_\lambda(\lambda < \nu) + \cdots + \varepsilon_\nu;$$

ya que ν puede tomar valores arbitrariamente grandes $< \omega_\gamma$, T_1 contiene límites bilaterales para cada caracter de H. Para los números límite $1+\nu < \omega_\sigma$, T_ν consiste en el conjunto de elementos de todos los $T_{1+\mu}$ con $1 < \nu$; si cada $c_{\alpha\beta}$-hueco de T_ν (siempre $\alpha = \beta$) se sustituye por un conjunto cerrado $C_{\alpha\beta}$, se origina el cerrado $T_{\nu+1}$ sin contar los elementos frontera. Si de dos elementos vecinos a, b (a a la izquierda de b) de un T_ν con ν un número intermedio, uno es un ω_α- o ω^*_β-límite, entonces se determina para α', respectivamente un β', como para α, respectivamente β, un $C_{\alpha\beta}$; para elementos aislados sea $\alpha' = \beta' = \sigma$; de T_ν pasamos a $T_{\nu+1}$, si entre cada a y b se introduce un conjunto de tipo $\omega^*_{\beta'} + \omega_{\alpha'}$. T_{ω_σ} consiste en la cerradura del conjunto de elementos de los $T_{1+\mu}$ ($\mu < \omega_\sigma$) y claramente tiene el genero H. Con ello se tiene el:

Teorema 20. Si M es un conjunto continuo rugoso respecto al genero y si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ y ς tiene el mismo significado que en el teorema 15, entonces podemos extraer del genero W de M conjuntos de caracteres de cada cardinalidad $\mathfrak{d} \leq \aleph_\varsigma \leq \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, de tal forma que el resto de W aún es de cardinalidad $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ y es el genero de un conjunto denso.

Como ha mostrado la investigación previa, no se puede extraer arbitrariamente este conjunto de caracteres. Que $\mathfrak{d} = \aleph_\varsigma$ con $\aleph_\varsigma < \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ es realmente la cota superior de $\mathfrak{d}$ en muchos casos, se puede mostar fácilmente mediante un ejemplo de un conjunto rugoso respecto al genero con $c_{\sigma\sigma}$ como único caracter simétrico, que por otro lado tiene como caracter cada $c_{\alpha\beta}$ con $\alpha+\beta < \omega_\sigma$ y cada $c_{\alpha\sigma}$ con $\alpha < \omega_{\omega_\sigma}$, mientras que σ no sea un π_1-número.

XVI.4 IV. Construcción de conjuntos densos a partir de conjuntos densos en ninguna parte.

En esta sección trataremos la descomposición de un conjunto denso M en subconjuntos ajenos entre sí densos en M. Cuando cada exponenciación de un álef a un álef resulta en un álef, el resultado más general esta contenido en el teorema 21. Ya que esta pregunta de la teoría de los álef no está resuelta aún, resulta de interés investigar tales descomposiciones con otras hipótesis.

La siguiente investigación se relaciona con descomposiciones dadas de M en conjuntos que son densos en M y se originan de conjuntos densos en ninguna parte. Aquí son importantes los límites simétricos de la cerradura de M, en particular los números σ y $\overline{\sigma}$. Si se supone continuo a M, es de esperarse tener un conjunto de subconjuntos densos en M de mayor cardinalidad a la de un M arbitrario, si el número $\overline{\sigma}$ no es un ρ_0-número. También aquí conducen los ρ_0-números cuya existencia todavía no hemos demostrado a resultados quizá insesperados.

Nuestro conocimiento sobre el continuo se han desarrollado mucho más en comparación al que tenemos sobre conjuntos lineales arbitrarios; algunas razones para ello son la sencillez de su estructura, su importancia para las aplicaciones y su facilidad para investigarlos mediante los número reales. Estas herramientas permiten fácilmente una descomposición del continuo en $\mathfrak{c}$ subconjuntos densos en él de cardinalidad $\mathfrak{c}$, mientras que para conjuntos arbitrarios sólo se ha demostrado por el Sr. Hausdorff[1] la posibilidad de descomponerlos en $\aleph_0$ conjuntos densos en ellos con la hipótesis del teorema del buen orden. Sin dificultad se puede ver que un conjunto denso M de cardinalidad $\aleph_\alpha$ con cardinalidad $\geq \aleph_\beta$ en cada segmento se puede descomponer en $\aleph_\beta$ subconjuntos densos en M de cardinalidad $\aleph_\alpha$ *complementarios entre sí*, a saber, *cada elemento de M pertenece a uno y sólo uno de los subconjuntos.* Para demostrarlo, recordamos que cada conjunto denso que tiene como cardinalidad un álef es casi plano respecto a la cardinalidad de sus segmentos (teorema 11). Por lo tanto, existen pedazos, lo más grande posible, no acotados S de M, en los que cada segmento entre dos elementos de S tiene cardinalidad $\aleph_\gamma$, mientras que la cardinalidad del pedazo entero es $\aleph_\gamma$ o $\aleph_{\gamma+1}$; en el último caso podemos descomponer S en $\aleph_{\gamma+1}$ pedazos ajenos de cardinalidad $\aleph_\gamma$, que contienen a todos los elementos de S sin contar un subconjunto denso en ninguna parte en S; ahora supondremos a S como uno de tales pedazos y no acotado. S se debe descomponer en $\aleph_\gamma$ subconjuntos $S_1, S_2, \ldots$ complementarios densos en él; para ello suponemos que los elementos s_σ de S y de M así como la totalidad de sus parejas están ordenados en el tipo ω_γ: $\{(s_\lambda, s_\mu)\} = \{(s'_\nu, s''_\nu)\}$, donde $\lambda \neq \mu$ respectivamente $s'_\nu \neq s''_\nu$. Definimos series de elementos s como elementos de los S_μ; en la ν-ésima serie está presente un elemento de todos los S_μ con $\mu < \nu$. Si en la ν-ésima serie ya hemos definido los elementos para cada S_λ y $\lambda < \mu$, entonces para $\mu < \nu$ pertenecen al conjunto S_μ el s_π de menor índice y el segmeneto acotado por s'_ν y s''_ν que no se hayan añadido a alguna serie.Puesto que cada s_π pertenece a $\aleph_\gamma$ segmentos distintos (s'_ν, s''_ν) y a él anteceden tan sólo elementos de menor índice en menor cantidad que $\aleph_\sigma$, él debe ser miembro de una serie y de un S_ν, de tal forma que todos los elementos de S de M aparecen en los S_ν y es claro que sólo en uno de ellos; ya que cada segmento de S contiene sólo $\aleph_\gamma$ elementos de M, se definen $\aleph_\gamma$ elementos de S_ν; finalmente, en vista de que en cada segmento de S siempre hay $\aleph_\gamma$ parejas (s'_ν, s''_ν), en cada segmento de S hay un elemento de S_μ, así que S_μ es denso en S. Ahora, supongamos que descomponemos M arbitrariamente en pedazos S ajenos entre sí con quizá $\aleph_\gamma \geq \aleph_\beta$ valores distintos, de tal forma que el conjunto de elementos de S es denso en M. Obtenemos los conjuntos densos en M $M_0, M_1, \ldots$ de cardinalidad $\aleph_\alpha$ de la siguiente manera. A M_ν deben pertenecer los elementos de todos los $S_{1+\mu}$ si $\mu = \omega_\beta \cdot \lambda + \nu$ para $\lambda = 0, 1, \ldots < \omega_\gamma$ y $\nu < \omega_\beta$. Si M contiene otros elementos, entonces su conjunto P se puede fácilmente repartir en los M_ν en la misma cantidad, cuando la cardinalidad de P alcanza al menos $\aleph_\xi$; en otro caso, suponemos que cada M_ν tiene a lo sumo un elemento. Los M_ν tienen

[1] Math. Ann., **65**(1908), pág. 450.

entonces la misma cardinalidad $\aleph_\delta$; si se cumple $\aleph_\gamma = \aleph_\alpha$, entonces $\aleph_\sigma = \aleph_\alpha$; si $\aleph_\gamma$ es menor que $\aleph_\alpha$, entonces $\aleph_\beta < \aleph_\alpha$, pero $\aleph_\beta \cdot \aleph_\delta = \aleph_\alpha$, de tal forma que otra vez se deduce $\aleph_\delta = \aleph_\alpha$. Con ello se comprueba el:

Teorema 21. Cada conjunto denso M de cardinalidad $\aleph_\alpha$ y con un subconjunto de cardinalidad $\geq \aleph_\beta$ en cada segmento se puede descomponer en $\aleph_\beta$ subconjuntos densos en M de cardinalidad $\aleph_\alpha$ y complementarios.

Puesto que el problema de los álef aún no se ha resuelto, este teorema tiene actualmente poca importancia, y estudiaremos por tanto alguna condiciones bajo las cuales un conjunto M denso se puede descomponer en más de $\aleph_0$ subconjuntos densos en M complementarios. Suponemos que contamos con una sucesión de subconjuntos densos en ninguna parte $M_1, M_2, \ldots$ de M en el tipo de un número inicial ω_γ y que el conjunto de sus elementos es denso en M. Si $c_{\sigma\sigma}$ es el menor carácter simétrico del genero W de M, en general se puede descomponer M en $\aleph_\sigma$ sunconjuntos densos complementarios; en lugar de σ se puede sustituir, en general, el número $\overline{\sigma}$ del teorema 14.

Para probar esto, construimos una sucesión de conjuntos $K_0, K_1, \ldots K_\nu, \ldots$ en un tipo $\leq \omega_\alpha$. Sea $K_0 = M_1$; supongamos que ya hemos definido los K_μ con $\mu < \nu$. El conjunto de elementos de estos K_μ pueden ser densos en todas partes en ciertos segmentos de M, mientras que pueden ser densos en ninguna parte en otros. Consideremos un pedazo arbitrariamente grande infinito S de M, en el que ningún elemento de un K_μ aparece, con $\mu < \nu$; ya que el conjunto de elementos de los M_λ es denso en M, existe un M_λ de menor índice, al que pertenecen elementos de este pedazo; sea M_φ el subconjunto de M_λ en S; K_ν consiste en el conjunto de elementos de los M_φ presentes. Cada S, en el que se elija un conjunto M_φ para K_ν, puede servir, sin contar posiblemente con sus elementos más externos, para determinar $K_{\nu+1}$ y $K_{\nu+2}$, si contiene al menos dos pedazos S para la determinación de $K_{\nu+3}$; si colectamos los conjuntos de elementos de $K_{3\nu}, K_{3\nu+1}, K_{3\nu+2}$ en un conjunto L_ν, entonces cada pedazo S, el mayor posible, libre de elementos de los L_μ con $\mu < \nu + 1$, contiene al menos dos pedazos correspondientes S de todos los L_μ con $\mu < \nu + 1$. Puesto que el índice de un M_λ que interviene en la determinación del subconjunto de K_μ en un S tiene un valor $\lambda \geq \mu$, μ obtiene un valor arbitrario $\mu < \omega_\alpha$ en los K_μ y L_μ.

De acuerdo al significado de σ, cada número límite γ tal que el conjunto de elementos de todos los L_ν con $\nu < \gamma$ es denso en un segmento de M, mientras que el conjunto de elementos de todos los L_ν con $\nu < \gamma' < \gamma$ es denso en ninguna parte allí, es el límite de una sucesión de números en el tipo de un π_0-número $\omega_\beta \geq \omega_\sigma$. Esto es evidente, cuando ω_β es el tipo de una sucesión de segmentos $S'_1, S'_2, \ldots$, donde S'_ν está dentro de S_μ para cada $\mu < \nu$, cuando además el menor índice ν' de un $L_{\nu'}$ con elementos en S'_ν crece monótonamente con ν y los S'_ν convergen a un punto de $[M]$. Finalmente, el conjunto de los números $\delta < \omega_\sigma$ se puede descomponer sin dificultad en $\aleph_\sigma$ conjuntos $Z_0, Z_1, \ldots$ de cardinalidad $\aleph_\sigma$; δ pertenece al conjunto $Z_{\varphi(\delta)}$. Supongamos que un índice arbitrario ν de un conjunto L_ν tiene la forma $\omega_\sigma \cdot \lambda + \delta$, $\lambda = 0, 1, \ldots < \omega_\alpha, \delta < \omega_\sigma$. Entonces también el conjunto $N_{\varphi(\delta)}$ de todos los elementos de todos los L_ν con el mismo $\varphi(\delta)$ es denso en todas partes en M, y obtenemos para los $\aleph_\sigma$ distintos valores $\varphi(\delta) = 0, 1, \ldots < \omega_\sigma$ exactamente $\aleph_\sigma$ conjuntos $N_{\varphi(\delta)}$. Porque, en vista de que el ω_β de un segmento con determinado γ no es menor que ω_σ y en cada pedazo libre de elementos de los L_λ con $\lambda < \mu$, aparecen elementos de cada L_ν con $\nu \geq \nu_0 \geq \mu$, el conjunto de elementos de los L_ν es denso en cada segmento de M denso en todas partes rellenado con elementos de los conjuntos L_ν con el mismo $\varphi(\delta)$, puesto que la sucesión de sus ν tiene también a γ como límite. Logramos una descomposición complementaria

XVI.4 IV. Construcción de conjuntos densos a partir de conjuntos densos en ninguna parte.

de M en $\aleph_\sigma$ subconjuntos densos en M, cuando incluimos en N_0 los elementos de M que no pertenecen a ningún $N_{\varphi(\delta)}$.

Ya que cada conjunto de conjuntos M_ν de cardinalidad $\aleph_\alpha$ se puede reordenar en tipo ω_α y nuestras deducciones conducen al mismo resultado, podemos ordenar los M_ν en el tipo de cada número arbitrario $\varepsilon < \omega_{\alpha+1}$. Pero cuando los $c_{\sigma\sigma}$-límites en $[M]$ son densos en ninguna parte, por el teorema 14 existe un número inicial regular, el menor posible, $\omega_{\overline{\sigma}}$ tal que el conjunto de los $c_{\alpha\alpha}$-límites para todo $\alpha \leq \overline{\sigma}$ es denso en al menos un segmento de $[M]$. Pero entonces es claro que los números límites γ arriba mencionados tienen un $\omega_\beta \geq \omega_{\overline{\sigma}}$; todas las deducciones para σ se puede efectuar para $\overline{\sigma}$. En otro caso, ocurre el:

Teorema 22. Dada una sucesión $M_1, M_2, \ldots$ de subconjuntos densos en ninguna parte en el conjunto denso M en el tipo de un transfinito, y si el conjunto de elementos de los M_ν es denso en M y $\overline{\sigma}$ es el número del teorema 14 para $[M]$, entonces se puede descomponer M en $\aleph_{\overline{\sigma}}$ subconjuntos densos complementarios.

En vista de que los números γ y ω_β usados arriba serán también de importancia en los siguiente, formulamos el:

Teorema 23. Dada una sucesión de subconjuntos $M_1, M_2, \ldots M_\nu, \ldots . \nu < \gamma$ densos en ninguna parte del conjunto denso M, con el conjunto de elementos de los M_ν denso en M, mientras que el conjunto de elementos de los M_ν con $\nu < \gamma' < \gamma$ es denso en ninguna parte en M, entonces γ es el límite de una sucesión de números en el tipo de un π_0-número $\omega_\beta \geq \omega_{\overline{\sigma}}$ (compárese con el teorema 22).

Para conjuntos continuos M con las hipótesis del teorema 22 se puede probar la existencia de al menos $\aleph_{\overline{\sigma}+1}$ conjuntos densos en M ajenos entre sí, cuando $\overline{\sigma}$ no es un ρ_0-número. Con este fin consideremos primero un conjunto N que consiste en subconjuntos $P_1, \ldots P_\mu \ldots$ de M densos en ninguna parte ajenos entre sí, μ en el tipo de un transfinito. De los conjuntos P_μ generamos conjuntos Q_μ, $\mu = 0, 1, \ldots$; supongamos que se han definido ya los Q_λ con $\lambda < \mu$; entonces, ***primero***, Q_μ debe contener los elementos de $P_\varkappa$, que no pertenezcan a ningún Q_λ y en cuya vecindad su subconjunto es denso en ninguna parte en M, y ***segundo***, debe contener a los elementos, que no pertenezcan a ningún Q_λ, de aquellos $P_\varkappa$ con un $\varkappa < \gamma$ y a los segmentos de M, los mayores posibles, en los que estos conjuntos de elementos de todos los $P_\varkappa$ con $\varkappa < \gamma' < \gamma$ sea denso en ninguna parte, pero en los que el conjunto de elementos de todos los $P_\varkappa$ para todo $\varkappa < \gamma$ sea densos en todas partes. Excepto por Q_0, cada Q_μ puede ser denso en ninguna parte en segmentos de M; pero si Q_μ es denso en ninguna parte en un segmento y tiene elementos ahí, entonces ningún Q con índice mayor tiene elementos ahí; por ello, los subconjuntos de Q_μ densos en ninguna parte conforman un conjunto denso en ninguna parte en M, cuyos elementos se toman de los P_μ y Q_μ, y se pueden añadir a un conjunto P_0, por ello también a un conjunto Q_0. Los segmento densos Q_μ en M más grandes se descomponen en segmentos S, lo más grande posible, con el mismo γ y con un número ω_β según el teorema 23); sean $\gamma_0, \gamma_1 \ldots$ un sucesión en el tipo ω_β con γ como límite, entonces el subconjunto de Q_μ en tal S se descompone en $\aleph_\beta$ subconjuntos $R_{\mu 0}, R_{\mu 1}, \ldots R_{\mu\nu}, \ldots, \nu < \omega_\beta$ densos en ninguna parte en S, donde $R_{\mu\nu}$ contiene todos los elementos de Q_μ en S, que pertenecen a un $P_\varkappa$ con $\varkappa < \gamma_\nu$, pero no estén en ningún $R_{\mu\nu'}$ con $\nu' < \nu$.

Ahora se supondrá que M se puede descomponer en a lo sumo $\aleph_{\overline{\sigma}}$ conjuntos N densos en M complementarios, donde $\overline{\sigma}$ no es un ρ_0-número; supongamos que los $\aleph_{\overline{\sigma}}$ conjuntos N_λ densos en

M, $\lambda = 0, 1, \ldots < \omega_{\overline{\sigma}}$ producen tal descomposición; N_λ consiste en el conjunto de elementos de los conjuntos $P_{\lambda\mu}$, $\mu = 0, 1, \ldots$ densos en ninguna parte en M en el tipo de un transfinito. Además, se construyen los $Q_{\lambda\mu}$ para cada N_λ como los Q_μ para N; ningún segmento de los $Q_{\lambda\mu}$ contendría un subconjunto no vacío denso en ninguna parte en M; para cada $Q_{\lambda\mu}$ se determinan también los $R_{\lambda\mu\nu}$ como arriba se determinaron los $R_{\mu\nu}$ para Q_μ. La demostración de que M se puede descomponer en al menos $\aleph_{\overline{\sigma}+1}$ subconjuntos densos en él, se efectúa con facilidad, si podemos descomponer a M en segmentos separados S, lo mayor posibles, en los que los subconjuntos de M se descomponen en al menos $\aleph_{\overline{\sigma}+1}$ de tales subconjuntos y cada punto de M es un punto, o un punto frontera, de uno o de una cantidad infinita de segmentos S. Sean $A_0^{(S)}, A_1^{(S)}, \ldots A_\nu^{(S)}, \ldots$ subconjuntos de M ajenos entre sí y densos en S, donde ν recorre al menos todos los números debajo de $\omega_{\overline{\sigma}+1}$, sea M_ν un conjunto que contiene a todos los elementos de los $A_\nu^{(S)}$ para cada $\nu < \omega_{\overline{\sigma}+1}$, mientras que M_0 atrapa a todos los elementos que aún quedan de M. Puesto que cada punto de M es un punto o un punto frontera de uno o de una cantidad infinita de S, cada M_ν es denso en M y existen $\aleph_{\overline{\sigma}+1}$ de tales M_ν.

Ahora, si el número γ para un segmento S, el mayor posible, de un $Q_{\lambda\mu}$ tiene un número $\omega_\beta > \omega_{\overline{\sigma}}$, entonces los números $\delta < \omega_\beta$ se pueden descomponer en $\aleph_\beta$ conjuntos $Z_{\varphi(\delta)}$ de cardinalidad $\aleph_\beta$, por lo que existen para S, $\aleph_\beta \geq \aleph_{\overline{\sigma}+1}$ conjuntos $A_\nu^{(S)}$ densos en S; lo mismo se cumple, cuando para un segmento S y uno de los N_λ existen subconjuntos $Q_{\lambda\mu}$de $\aleph_{\overline{\alpha}+1}$ densos en S. Así que sólo debemos considerar aquellos segmentos T de M en los que para cada S y cada N_λ existan a lo sumo $\aleph_{\overline{\sigma}}$ conjuntos $Q_{\lambda\mu}$ y su número γ cumple siempre $\omega_{\overline{\sigma}} = \omega_\beta$; sea N'_λ el subconjunto de N_λ en uno de tales segmentos T, lo mayor posible. Supongamos entonces que para cada N'_λ se obtienen los segmentos S, los mayores posibles, en los que los conjuntos $Q_{\lambda\mu}$ con el mismo tipo de μ, el mayor posible, son densos en todas partes; sus $R_{\lambda\mu\nu}$ se pueden ordenar como conjuntos $B_{\varkappa\lambda}^{(S)}$ en el tipo $\omega_{\overline{\sigma}}$: $B_{0\lambda}^{(S)}, B_{1\lambda}^{(S)}, \ldots B_{\varkappa\lambda}^{(S)}, \ldots, \varkappa < \omega_{\overline{\sigma}}$. Si $B_{\varkappa\lambda}$ contiene a los elementos de todos los $B_{\varkappa\lambda}^{(S)}$, además de que $B_{0\lambda}$ contiene a los elementos de N'_λ que no pertenecen a ningún $B_{\varkappa\lambda}^{(S)}$, entonces los elementos de N'_λ se distribuyen en $\aleph_{\overline{\sigma}}$ conjuntos $B_{\varkappa\lambda}$ densos en ninguna parte en T. Así que los $B_{\varkappa\lambda}$ se pueden ordenar como conjuntos C_ν en una sucesión de tipo $\omega_{\overline{\sigma}}$: $C_0, C_1, \ldots C_\nu, \ldots, \nu < \omega_{\overline{\sigma}}$. El conjunto de elementos de los C_ν no puede contener a todos los elementos de T, cuando $\overline{\sigma}$ no sea un ρ_0-número. Entonces existe una sucesión ρ_0-ajena de números $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ con $\omega_{\overline{\sigma}}$ como límite. Además, se puede deducir la existencia de una sucesión de segmentos S_ν en T, con S_ν dentro de S_μ cuando $\mu < \nu$. Sea S_0 un segmento arbitrario de T y S_ν un segmento libre de elementos de los C_μ con $\mu \leq \nu$, que además, no contiene ningún $c_{\alpha\alpha}$-límite con $\omega_\alpha < \sigma_\nu$. Ya que para ν un número límite el límite de los σ_μ con $\mu < \nu < \omega_{\overline{\sigma}}$ no es un π_0-número, el conjunto de los S_μ para $\nu < \omega_{\overline{\sigma}}$ no puede converger a un punto de T, por lo que existe un[1] S_ν; dado que dentro de los S_ν con $\nu < \omega_{\overline{\sigma}}$ no hay elementos de ningún C_μ, pero si, necesariamente, un límite de T, llegamos a una contradicción con el hecho de que el conjunto de los C_ν contiene a todos los elementos de T; esto muestra que M se puede descomponer en los segmentos T en al menos $\aleph_{\overline{\sigma}+1}$ conjuntos N complementarios, cuando $\overline{\sigma}$ no es un ρ_0-número. Se puede dar sin dificultad una construcción de como se puede lograr la existencia de un conjunto adicional N a los $\aleph_{\overline{\sigma}}$ conjuntos N en T. Con ello tenemos el:

Teorema 24. Si el número $\overline{\sigma}$ de un conjunto continuo M no es un ρ_0-número, M no se

[1]Esta conclusión no es posible para $\overline{\sigma}$ un ρ_0-número.

puede descomponer en $\aleph_{\overline{\sigma}}$ conjuntos densos en ninguna parte complementarios y deben existir descomposiciones complementarias de M en $\aleph_{\overline{\sigma}+1}$ conjuntos densos en M, cuando exista un conjunto denso en M, que consista en el conjunto de elementos de los $\aleph_{\overline{\sigma}}$ conjuntos densos en ninguna parte en M.

Para finalizar describimos en resumen qué nuevas propiedades son de esperarse, siempre o en ocasiones, para conjuntos densos M, cuando ciertos números asociados a ellos son ρ_0-números. Uno de tales M continuo se puede construir a partir de $\aleph_\alpha$ (α un ρ_0-número) subconjuntos (¡o elementos!) densos en ninguna parte, donde cada segmento contiene un subconjunto de tipo η_τ para cada $\tau < \alpha$, pero no para $\tau = \alpha$; en ningún segmento de M tienen que ser densos los $c_{\beta\beta}$-elementos para algún β, por lo que M es rugoso respecto al genero; finalmente M no tiene porque contener subconjuntos de tipo α o α^*, con lo que la existencia de un subconjunto de tipo η_α estaría excluida. Si existe uno de tales M rugoso respecto al genero, entonces existe, según el teorema 19, también un conjunto irreducible M sin subconjuntos de tipo α o α^*, en los que, por supuesto, cada tipo de sus límites simétricos es denso en todas partes.