XVII

Mahlo: Sobre la teoría y aplicaciones de los ρ_0-números

Título original: Zur Theorie und Anwendung del ρ_0-Zahlen
Von Paul Mahlo
Berichte Königl. Ges. Wiss. zu Leipzig Math. Kl. **64**(1912), 108-112.

La siguiente disertación constituye un complemento al trabajo *Über lineare transfinite Mengen.*[2] Allí definimos (págs. 193 y 196):

"Cada transfinito que sea un π_N-número $\pi_{M,N}$ que coincide con su índice para todo $N < \nu$, debe ser un π_ν-número $\pi_{\mu,\nu}$; la totalidad de los π_ν-números los enumeramos de acuerdo a su magnitud mediante transfinitos:

$$\pi_{0,\nu} = 0, \quad \pi_{1,\nu}, \quad \pi_{2,\nu}, \ldots ; \pi_{\lambda,\nu} < \pi_{\mu,\nu},$$

si $\lambda < \mu$.

Los números iniciales regulares correspondientes enumerados son los π_0-números."

"Un número $\pi_{\mu,\nu} = \alpha$ es un ρ_0-número, si cada sucesión de transfinitos con α como límite tiene también α secciones diferentes con π_0-números como límites. Según su magnitud enumeramos los ρ_0-números mediante transfinitos:

$$\rho_{0,0} = 0, \quad \rho_{1,0}, \rho_{2,0}, \ldots ; \rho_{\lambda,0} < \rho_{\mu,0},$$

si $\lambda < \mu$."

Además supondremos, para cada sucesión de transfinitos $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, que $\alpha_\lambda < \alpha_\mu$ si $\lambda < \mu$; cuando la sucesión tiene tipo un número límite, el menor número mayor que cada α_λ es su límite. Con estas hipótesis se cumple (pág. 194) el:

Teorema A. *El límite de una sucesión de π_ν-números es un $\pi_{\nu+1}$-número o no es siquiera un π_0-número.*

[2]Esta revista Vol. **63**, págs. 187–225. Traducción en este volumen

Ahora demostramos:

Teorema 1. *Cada sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ cuyo límite es el ρ_0-número α, tiene también α secciones con π_ν-números como límite, para cada $\nu < \alpha$.*

Demostración. Demostramos el teorema mediante inducción transfinita. Para $\nu = 0$ se cumple por definición de ρ_0-número. Así que lo probaremos para a) $\nu = \nu' + 1$, si se cumple para $\nu = \nu'$, y b) el límite $\nu < \alpha$ de una sucesión de números $\nu_0, \nu_1, \ldots$, para los cuales se cumple.

a) Si se cumple nuestro teorema para $\nu = \nu'$, existen α secciones de la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ con $\pi_{\nu'}$-números como límites; sea $\beta_0, \beta_1, \ldots$ la sucesión de estos límites β_λ. La sucesión de los β_λ tiene el tipo α; ya que α es un ρ_0-número, la sucesión tiene α secciones con π_0-números como límite; sea $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ la sucesión de los límites. Puesto que γ_μ es un π_0-número y el límite de los π_ν-números $\beta_\lambda < \gamma_\mu$, según el teorema A, γ_μ debe ser un $\pi_{\nu'+1}$-número o un π_ν-número, si hacemos $\nu' + 1 = \nu$. Consideremos ahora la sección A_μ de la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ que contiene a todos los números menores que alguno de los β_λ, cuya sucesión tiene a γ_μ como límite. La sección de A_μ con β_λ como tipo tiene el mismo tipo y límite, a saber, β_λ. Por lo tanto, el tipo y límite de A_μ también es igual al límite de sus β_λ y éste es el número γ_μ. Así que las α secciones A_μ de la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ tienen a los π_ν-números γ_μ como tipos y límites, lo que demuestra a).

b) Si se cumple nuestro teorema para cada número de la sucesión $\nu_0, \nu_1, \ldots$ en el tipo de un número límite, también se debe cumplir para su límite $\nu < \alpha$. La sucesión $\nu_0, \nu_1, \ldots$ la supondremos por ahora en el tipo de un número inicial regular (un π_0-número) $\delta \leq \nu$. Además, suponemos que $\alpha_0 > \nu$, lo que en caso de necesidad se puede lograr considerando la sucesión de los $\alpha_\lambda > \nu$ en lugar de la sucesión de todos los α_λ; pra nuestro teorema no tiene importancia esta suposición. Ahora formamos la sucesión

$$\beta_{00}, \beta_{01}, \ldots \beta_{0\lambda}, \ldots; \beta_{10}, \beta_{11}, \ldots \beta_{1\lambda}, \ldots; \ldots$$
$$\beta_{\varkappa 0}, \beta_{\varkappa 1}, \ldots \beta_{\varkappa\lambda}, \ldots; \ldots$$

Sean β_{00} el menor π_{ν_0}-número límite de alguna sección de la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, y en general sea $\beta_{\varkappa\lambda}$ el menor π_{ν_λ}-número mayor que los números previos de la sucesión que se está construyendo y límite de alguna sección de la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$; λ recorre todos los números menores que δ; puesto que hay α secciones de la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ con π_{ν_λ}-números como límites, $\varkappa$ puede recorrer todos los números $\varkappa < \alpha$. Ya que λ sólo recorre los números $\lambda < \delta$ y siempre se cumple

$$\beta_{\varkappa\lambda} > \alpha_0 > \nu \geq \delta,$$

una sección de la sucesión de los $\beta_{\varkappa\lambda}$ sólo puede tener un π_0-número γ como límite, cuando su tipo es un múltiplo $\delta \cdot \varepsilon$ de δ. Entonces ε es un número límite y también el límite de una sucesión $\beta_{0\lambda}, \beta_{1\lambda}, \ldots \beta_{\varkappa\lambda}, \ldots$ en el tipo ε, que naturalmente es igual a $\delta \cdot \varepsilon$ e igual a el π_0-número γ. Como límite de esta sucesión γ debe ser, según el teorema A, un $\pi_{\nu_\lambda+1}$-número para cada λ y, por la definición de los π_ν-números, un π_ν-número. Puesto que la sucesión de los $\beta_{\varkappa\lambda}$ tiene a α como límite, existen α secciones de ella con π_0-números como límites; sea $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ la sucesión de esos límites γ, todos son π_ν-números. Consideremos la sección A_μ de la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ que contiene a todos los números menores que alguno de los $\beta_{\varkappa\lambda}$, cuya sucesión tiene límite γ_μ. La sección de A_μ con $\beta_{\varkappa\lambda}$ como tipo tiene el mismo tipo y límite, a saber, $\beta_{\varkappa\lambda}$. Por consiguiente, el tipo y límite de A_μ es también el límite de sus $\beta_{\varkappa\lambda}$ y éste es el π_ν-número γ_μ. Con ello, las α

secciones A_μ de la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ tienen a los π_ν-números γ_μ como tipos y límites, con lo que queda demostrado b).

Puesto que se puede acceder cada número $\nu < \alpha$ partiendo del cero y sumando uno y saltando al límite de cada sucesión de números, nuestro teorema 1 queda demostrado en general.

Se reconoce fácilmente que nuestras conclusiones se basan especialmente en que cada sucesión con el ρ_0-número α como límite también tiene α π_0-números como límites de secciones. Por ello considerese sucesiones $\eta_0, \eta_1, \ldots$ de números, que se vuelven mayores a cada transfinito, entonces estas sucesiones *deben* contener secciones arbitrariamente grandes con π_ν-números como límites, si cada una de tales sucesiones debe contener secciones arbitrariamente grandes con π_0-números como límites; la validez de esta condición no se ha demostrado. Aún si fuera cierta, requiere una prueba especial, dependiendo de si entre estos π_0-número también hay ρ_0-números. Vale la pena mencionar que el teorema 1 se puede generalizar, con ayuda del trabajo citado, a:

Teorema 2. *Si la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ tiene al número $\pi_{\lambda,\mu,\nu} = \alpha > \lambda$ como límite y ocurre $\nu' < \nu$ así como $\pi_{1,\tau,\nu'} < \alpha$, entonces siempre existen α secciones de la sucesión con $\pi_{\sigma,\tau,\nu'}$-número como límite.*

Mediante un procedimiento similar al recién descrito obtenemos, sin embargo, en un dominio hipotético, un nuevo resultado. En el trabajo mencionado[1] se menciona que posiblemente existan conjuntos continuos para los cuales en ningún intervalo los límites simétricos del mismo tipo, por ejemplo $c_{\gamma\gamma}$, sean densos en todas partes; tales conjuntos están en una relación muy estrecha con los ρ_0-números. Ahora demostramos el

Teorema 3. *Si el conjunto continuo M carece de subconjuntos de los tipos α y α^*, cuando α es un ρ_0-número, si cada intervalo de M contiene $c_{\delta\delta}$-elementos para números arbitrariamente grandes $\delta < \alpha$ y si para $\beta < \alpha$ arbitrario el conjunto de los límites simétricos con todos los caracteres $c_{\delta\delta}$ de un $\delta < \beta$ es denso en ninguna parte en M, entonces cada intervalo de M contiene $c_{\gamma\gamma}$-elementos con α π_ν-números distintos γ_λ como valor γ, cuando $\nu < \alpha$.*

Demostración. Primero mostramos la existencia de uno tales π_ν-números γ. Sea $\beta_0, \beta_1, \ldots$ una sucesión de números $\beta_\mu < \alpha$, que son π_ν-números, excepto posiblemente β_0; así que $\beta_\mu \geq \pi_{\mu,\nu} \geq \mu$. Si existe en un intervalo arbitraio J de M una sucesión de intervalos $K_0, K_1, \ldots$, tales que cualesquier dos puntos interiores son extremos de los precedentes, si K_μ carece de $c_{\delta\delta}$-elementos para $\delta \leq \beta_\mu$, y, finalmente, si la sucesión de los K_μ converge al $c_{\gamma\gamma}$-elemento m de M, entonces γ sería un π_ν-número. Porque los extremos izquierdos de los primeros λ intervalos K_μ convergen, para λ un número límite, a un ω_ε-límite de M con $\omega_\varepsilon \leq \lambda$; pero en K_μ sólo hay $c_{\delta\delta}$-límites con $\delta > \beta_\mu$ y siempre ocurre $\beta_\mu \geq \mu$, pues $\beta_\mu \geq \pi_{\mu,\nu}$. Ya que M carece de subconjuntos de tipo α, es seguro que no existen α intervalos K_μ; pero si su sucesión se ha definido lo suficiente, los K_μ convergen a un $c_{\gamma\gamma}$-límite m. Para el tipo λ de la sucesión completa de los K_μ se cumple $\varepsilon = \gamma$, así que

$$\omega_\gamma \leq \lambda, \tag{1}$$
$$\gamma > \beta_\mu \tag{2}$$

para cada μ. Si β es el límite de la sucesión de estos λ números β_μ, entonces también se cumple

$$\gamma \geq \beta \geq \lambda. \tag{3}$$

[1]Cómparese el trabajo citado pág. 214 (teorema 17) y pág. 225.

La comparación de (1) y (3) arroja

$$\gamma = \omega_\gamma.$$

En vista de que γ es mayor que cada β_μ, también es un π_0-número y al ser el límite de la sucesión de los π_ν-números $\beta_1, \beta_2, \ldots$, también es un $\pi_{\nu+1}$-número según el teorema A, en consecuencia, un π_ν-número.

Ahora queremos justificar nuestras hipótesis. Sea β_μ un número arbitrario debajo de α. Considerese los $c_{\delta\delta}$ de M para todo $\delta \leq \beta_\mu$; el conjunto unión de los $c_{\delta\delta}$-elementos con todos estos valores δ es denso en ninguna parte en M por hipótesis. En tanto exista un intervalo en M, que esté dentro de todos los K_λ con $\lambda < \mu$, existirá también un K_μ. Puesto que

$$\alpha = \pi_{1,\alpha} = \pi_{\alpha,\nu},$$

existen α π_ν-números debajo de α, de tal suerte que la elección de los β_μ no trae dificultades. Que la sucesión de los K_μ deba tener tipo $\gamma < \alpha$, ya se demostró. Con ello, se ha probado la existencia de un carácter $c_{\gamma\gamma}$ con γ como π_ν-número.

Ahora, si tenemos una sucesión arbitraria $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ de tales números γ en un tipo $\varkappa < \alpha$ para un intervalo J de M, entonces existe también otro número $\gamma = \gamma_\varkappa$ para J. Porque β_0 es el mayor de los γ_λ o su límite y $\beta_1, \beta_2, \ldots$ es la sucesión de todos los π_ν-números encima de β_0, así que se puede deducir la existencia de otro γ según lo anterior. Este procedimiento sólo se interrumpe, cuando se han encontrado ya α números γ, con lo que queda demostrado el teorema 3.

Impreso 11.VI.1912.