XVIII

Mahlo: Sobre la teoría y aplicaciones de los ρ_0-números II

Traducción de
Luis Miguel Villegas Silva
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

Título original: Zur Theorie und Anwendung del ρ_0-Zahlen. II.
Von Paul Mahlo
Berichte Königl. Ges. Wiss. zu Leipzig Math. Kl. **65**(1913), 268-282.

Aquí se continuará el trabajo "Über lineare transfinite Mengen" [2], como ya se hizo en un trabajo previo[3] que lleva el mismo título que éste. Como se consideró en el primer trabajo, junto con los ρ_0-números también otros transfinitos definidos en forma análoga, así ocurre en ambos resultados siguientes se considerarán. El problema de este trabajo se citó ya en el artículo mencionado[4] y se refiere a lo siguiente. Si se han definido en una sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\nu, \ldots$ los elementos α_ν para *cada* transfinito ν, y crecen continuamente con su índice, se hacen mayores que cualquier transfinito. ¿Tiene esta sucesión una sección con un número inicial regular (π_0-número) como límite (y tipo)? ¿puede ser el límite también un ρ_0-número u otro número de los tipos introducidos? Derivamos algunos teoremas importantes para caracterizar este problema y describimos ejemplos para responder afirmativamente a la pregunta, sin temor a llegar a contradicciones, pero que no obligan aquí la afirmación aquí; al menos no podemos dar por ahora suficiente evidencia para ello. En forma correspondiente formulamos para ciertos tipos de números un postulado, cuya aceptación o rechazo da a la noción "conjunto de todos los transfinitos" diversas conotaciones. Esta amplitud en la noción está estrechamente relacionada con la paradoja de Burali-Forti, por lo que se restringen las posibles operaciones lógicas plausibles con este conjunto.

El segundo de los siguientes resultados determina la cardinalidad de conjuntos lineales como los que originalmente han conducido a la definición de los ρ_0-números. Nuestra deducción posibilita también una construcción de conjuntos continuos y discontinuos a partir de subconjuntos densos en ninguna parte. Como resultados auxiliares se demostrarán algunos teoremas importantes sobre los tipos de Hausdorff η_ν (con ω_ν regular).

[2]Esta revista, Vol. **LXIII**, (1911), 187-225. Traducción en este volumen

[3]Esta revista Vol. **LXIV**, (1912) 108-112. Traducción en este volumen.

[4]Vol. **LXIII** pág. 196, Vol. **LXIV** pág. 110.

1. Sobre sucesiones con transfinitos mayores que cada transfinito.

Para una sucesión de transfinitos: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\nu, \ldots$ hemos permitido usualmente que el índice recorra todos los números menores que un transfinito arbitrario pero fijo, principalmente un número límite. Si $\mu < \nu$, se debía cumplir también $\alpha_\mu < \alpha_\nu$. En lo sucesivo, el índice ν puede recorrer la totalidad de los transfinitos; y ya que con $\mu < \nu$ también se tiene $\alpha_\mu < \alpha_\nu$ se cumple que $\alpha_\nu > \beta$ para $\nu > \beta$. Por ello, este nuevo tipo de sucesiones contiene "transfinitos mayores que cualquier transfinito" o "transfinitos arbitrariamente grandes"; por brevedad las llamaremos "W-sucesiones". Entonce el transfinito $\mathcal{F}$ impropio, tipo del conjunto de todos los transfinitos con su orden usual es la cota superior del índice ν. Con ello no surgen complicaciones reales; la sucesión de todos los transfinitos es en sí misma un ejemplo de tales sucesiones. Echaremos un vistazo a las dificultades que pueden aparecer por el tratamiento puramente lógico de $\mathcal{F}$ al final de este trabajo.

Ahora, respondemos la pregunta, de si cada sucesión con transfinitos mayores que cada transfinito debe tener una sección con un π_0-número como límite. Supongamos que exestiesen W-sucesiones $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\nu, \ldots$ en las que los tipos de las secciones con π_μ-números como límites permanecen debajo de una cierta magnitud. Además, para cada $\mu < \varkappa$, los tipos de las secciones con π_μ-números como límites se deben hacer mayores que cada transfinito dado, pero no para $\mu = \varkappa$. Entonces podemos construir a partir de la sucesión de los α_ν una W-sucesión $\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1, \ldots \overline{\alpha}_\nu, \ldots$, sin una sección con un π_0-número como límite.

A saber, sea β el mayor de los $\pi_\varkappa$-números que aparecen como límites de secciones o el límite de ellos o igual a cero, cuando no haya ninguno de tales $\pi_\varkappa$-números. Hacemos:

$$\overline{\alpha}_\nu = \pi_{\alpha_\nu, \beta+\varkappa}.$$

Entonces siempre se tiene $\overline{\alpha}_\nu \geq \alpha_\nu$; al igual que los α_ν, los $\overline{\alpha}_\nu$ forman una W-sucesión. El límite de cada sección no acotada de la sucesión de los $\overline{\alpha}_\nu$ es mayor que β; si este fuera un π_0-número, al ser el límite de una sucesión de $\pi_{\beta+\varkappa}$-números debería ser un $\pi_{\beta+\varkappa+1}$-número; entonces debería ser también un límite de la sucesión de los α_ν; puesto que ésta no tiene ningún $\pi_\varkappa$-número $> \beta$ como límite de una sección, la sucesión de los $\overline{\alpha}_\nu$ carece de un π_0-número como límite de una sección. Con ello se tiene el

Teorema 1. A partir de cada W-sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ se puede construir una W-sucesión $\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1, \ldots$ sin secciones con π_0-números como límites, en el caso en que sólo para números $\mu < \varkappa$ haya secciones con límites π_μ-números mayores que cada transfinito.

Si ahora supusiésemos que *cada* sucesión con transfinitos mayores que cada transfinito tiene un π_0-número como límite de una sección, se seguiría inmediatamente, que los tipos de las secciones con π_0-números como límite también exceden a cualquier transfinito. Porque si tuviésemos una sección A_α de tal sucesión R con el π_0-número ω_α como límite, después de la eliminación de A_α de R, quedaría una sucesión R_α con transfinitos mayores que cada transfinito. Cada miembro de R_α sería mayor que ω_α. Además, una sección A'_β de R_α tendría al π_0-número ω_β como límite, y se cumpliría $\omega_\alpha < \omega_\beta$. Puesto que también la sección $A_\beta = A_\alpha + A'_\beta$ tendría el mismo límite ω_β, ω_β sería el límite de una sección de R. Ya que igualmente para cada sucesión de π_0-números límites de secciones de R, podemos encontrar un π_0-número mayor con la misma propiedad, suponiendo que su sucesión no contuviese ya transfinitos mayores que cada transfinito, entonces R, con las

Traducción de Luis Miguel Villegas Silva
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

hipótesis establecidas, debiera tener una sucesión de π_0-números límites de secciones, que se hace mayor que cada transfinito. Con ellos se tiene el

Teorema 2. Si *cada* W-sucesión R tiene una sección con un π_0-número como límite, entonces existe para cada R existe una W-sucesión de π_0-números cuyos miembros son límites de una sección de R.

Conservemos la hipótesis de que cada W-sucesión R tiene una sección con un π_0-número como límite. Además suponemos que una sucesión R tiene, sólo para cada $\mu < \varkappa$, una sucesión de π_μ-números como límites de secciones, cuyos tipos se hacen mayores que cada transfinito. Entonces, por el teorema 1 podemos construir a partir de R una W-sucesión R' que carece de secciones con límite un π_0-número. Esta contradicción con la primera de nuestras hipótesis corrobora la validez del

Teorema 3. *Si cada W-sucesión R tiene una sección con límite un π_0-número, entonces para cada R y todo μ existe una W-sucesión cuyos miembros son límites de una sección de R.*

De los teoremas 2 y 3 se reconoce la importancia de la condición, de que cada W-sucesión tenga una sección con un π_0-número como límite. Antes de extraer conclusiones de los teoremas 1 a 3, los generalizaremos. Las investigaciones aquí realizadas para π_0-números se pueden extender sin dificultad a ρ_0-números. Empleando nuestros números $\pi_{\lambda,\mu,\nu}$ que designamos como $\pi_{\varphi,\chi,\vartheta}$-números, logramos la mejor generalización posible de los teoremas 1 a 3. Si llamamos a un $\pi_{\varphi,\chi,\vartheta}$-número un $\tau_{\chi,\vartheta}$-número, entonces los π_ν-números son también $\tau_{\nu,0}$-números, y los ρ_ν-números son $\tau_{\nu,1}$-números. Un número $\alpha = \pi_{\varphi,\chi,\vartheta}$ satisface, para cada $\chi' = \gamma < \chi$, la ecuación

$$\alpha = \pi_{\alpha,\gamma,\vartheta}.$$

Además, cada sucesión con α como límite tiene α secciones con números $\pi_{\lambda,\mu,\delta}$ como límites, sólo cuando $\delta < \vartheta$.

Ahora demostramos el

Teorema 4. *A partir de cada W-sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ se puede construir una W-sucesión $\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1, \ldots$ que carece de secciones con $\tau_{0,\vartheta}$-números como límites, en el caso de que sólo para números $\chi < \varkappa$ estén presentes secciones con $\tau_{\chi,\vartheta}$-números mayores que cada transfinito.*

Demostración. Sea $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ la sucesión dada. Para $\chi = \varkappa$ no pueden seguir siendo los límites Λ de sus secciones mayores que cada transfinito; si existe uno mayor Λ, lo llamamosβ; en el caso en que la sucesión de los Λ no tenga mayor elemento, su límite (¡un transfinito bien definido!) se llama otra vez β; de no existir ningún Λ, ponemos $0 = \beta$. Hacemos

$$\alpha_\nu = \pi_{\alpha_\nu,\beta+\varkappa,\vartheta}.$$

Entonces siempre ocurre $\overline{\alpha}_\nu \geq \alpha_\nu$; al igual que los α_ν, los $\overline{\alpha}_\nu$ conforman una W-sucesión, dado que los números $\pi_{\lambda,\mu,\nu}$ para μ, ν fijos crecen con λ. El límite de cada sección no acotada de la sucesión de los $\overline{\alpha}_\nu$ es mayor que β; si uno de tales límites fuese un $\tau_{0,\vartheta}$-número, él debería ser a su vez un $\tau_{\beta+\varkappa+1,\vartheta}$-número, siendo el límite Λ de una sucesión S de $\tau_{\beta+\varkappa,\vartheta}$-números; entonces debería ser también el límite λ de la sucesión original de los α_ν, porque se cumpliría

$$\Lambda = \pi_{\lambda,\beta+\varkappa,\vartheta},$$

Traducción de
Luis Miguel Villegas Silva
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

y sólo para $\lambda = \Lambda$ tiene S un π_0-número como límite, mientras que el límite Λ para $\Lambda > \lambda$ sólo podría ser un número inicial singular; ya que la sucesión de los α_ν carece de secciones con un $\tau_{\varkappa,\vartheta}$-número $> \beta$ como límite, ninguna sección de la sucesión $\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1, \ldots$ tiene un $\tau_{0,\vartheta}$-número como límite. Con ello queda demostrado el teorema 4.

Mientras que el teorema 4, como una generalización del teorema 1, mereció una demostración detallada, la modifiación de la demostración de los teorema 2 y 3 para extenderlos a $\tau_{\chi,\vartheta}$-números es tan sencilla, que la omitimos. Las generalizaciones pueden ser:

Teorema 5. *Cuando cada W-sucesión R tiene una sección con un $\tau_{0,\vartheta}$-número como límite, entonces existe, para cada R, una W-sucesión de $\tau_{0,\vartheta}$-números, cuyos miembros son límite de una sección de R.*

Teorema 6. *Cuando toda W-sucesión cuenta con un a sección con un $\tau_{0,\vartheta}$-número como límite, entonces para cada R y todo χ existe una W-sucesión de $\tau_{\chi,\vartheta}$-números, cuyos elementos son límite de una sección de R.*

Basándonos en los teoremas descritos investigamos la pregunta de si cada sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ con transfinitos mayores que cada transfinito debe tener secciones con π_0-números como límites; y si debe tener secciones con ρ_0-números como límites; y finalmente si debe tener secciones con $\tau_{0,\vartheta}$-números como límites.

Como ejemplo consideremos primero la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ de los π_0-números que satisfacen la ecuación

$$\xi = \pi_{1,\xi}.$$

El menor de tales números fue representado en otro trabajo[1] como el límite, un π_0-número, de la sucesión $\pi_{0,0}, \pi_{1,1}, \ldots, \pi_{\nu,\nu}, \ldots$ Se reconoce fácilmente que nuestra sucesión consiste en la totalidad de los π_0-números, que son límite de secciones de la W-sucesión de los $\pi_{\nu,\nu}$. También el número $\rho_{1,0}$ es uno de los α_ν; pues de no existir $\rho_{1,0}$ números debajo de $\rho_{1,0}$, sino sólo $\mu < \rho_{1,0}$ números α_ν, sea, digamos λ, el mayor de estos α_ν o su límite, que es el límite de una sucesión de tipo $\mu < \rho_{1,0}$, sería menor que $\rho_{1,0}$; luego, la sucesión $\pi_{\lambda,\lambda}, \pi_{\lambda+1,\lambda+1}, \ldots, \pi_{\nu,\nu}, \ldots$ tendría, en oposición a nuestra afirmación, como menor límite un $\alpha_\nu < \rho_{1,0}$ que sería un π_0-número; por ello existen $\rho_{1,0}$ números $\alpha_\nu < \rho_{1,0}$; ya que los α_ν con $\nu > \varkappa$ son $\pi_\varkappa$-números y $\rho_{1,0}$ y $\rho_{1,0}$ como límite de su sucesión para cada $\varkappa < \rho_{1,0}$ también es un $\pi_\varkappa$-número, también satisface la ecuación $\xi = \pi_{1,\xi}$; por otro lado, también es una solución de la ecuación $\xi = \alpha_\xi$.

Este ejemplo, que podemos extender más fácilmente, nos muestra que de la existencia de ciertas secciones con ρ_0-números como límite, se desprende de inmediato la existencia de secciones con π_0-números como límite. Cuando una W-sucesión arbitraria $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ tiene ρ_0-números arbitrariamente grandes como límite de secciones, también tiene π_ν-números como límite de secciones para ν arbitrariamente grande; la afirmación inversa no es tan sencilla de demostrar. Igualmente se sigue de que una de tales sucesiones $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ tenga $\tau_{0,\vartheta}$-números arbitrariamente grandes como límite de secciones para ϑ fijo, que la sucesión también tiene secciones con $\tau_{\chi,\vartheta'}$-números arbitrariamente grandes como límite, cuando para χ arbitrario ocurre $\vartheta' < \vartheta$; para $\vartheta' > \vartheta$ no es inmediato que ocurra lo mismo.

Queremos construir un ejemplo para ilustrar un comportamiento importante para nuestro problema. De los números $\pi_{\lambda,\mu,\nu}$ extraemos aquellos para los que $\lambda = \mu = \nu$, para obtener la

[1] Esta revista Vol. **XLIII**, pág. 194 abajo.

Traducción de Luis Miguel Villegas Silva Departamento de Matemáticas Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

sucesión:

$$\alpha_0 = \pi_{0,0,0}; \quad \alpha_1 = \pi_{1,1,1}; \quad \ldots \quad \alpha_\nu = \pi_{\nu,\nu,\nu}; \ldots$$

¿Tiene esta sucesión una sección con un π_0-número o ρ_0-número o $\tau_{0,\vartheta}$-número como límite? Para responder esta pregunta recordemos que que el número $\pi_{1,1}$ se introdujo como el menor π_0-número $\alpha = \pi_{\mu,0}$ para el que $\alpha = \mu$. La existencia de tales números nos se puede demostrar, pero hasta ahora tampoco refutar. La definición de los restantes π_1-números, π_2-números, ..., π_ν-números, ... se basa en el mismo principio. El límite de una sección de nuestra sucesión en el tipo de un número límite siempre es un número inicial, pues los elementos de la sucesión son números iniciales; pero mientras el tipo de la sección pertenezca sólo a los trasnfinitos a investigar hasta ahora introducidos, su límite no será un π_0-número. No obstante, la suposición no se opone a que exista una sección más pequeña con un π_0-número β_0 como límite; β_0 satisface, para cada $\nu < \beta_0$, las ecuaciones:

$$\xi = \pi_{1,\xi} = \pi_{\xi,\nu},$$

pero no es un ρ_0-número o un $\tau_{0,1+\vartheta}$-número. Cuando encontremos un π_0-número que sea límite de una sección de nuestra sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ se puede definir una sucesión con una cantidad arbitraria de tales π_0-números β_1, β_2, ...; se distinguen fácilmente por su magnitud. Además de π_0-números pueden aparecer también como límtes de secciones de nuestra sucesión ρ_0-números, $\tau_{0,2}$-números, $\ldots$, $\tau_{0,\vartheta}$-números, ... con ϑ arbitrariamente grande; en consecuencia, cada $\tau_{0,\vartheta}$-número α presente como límite es también, para cada $\chi < \alpha$, un $\tau_{\chi,\vartheta}$-número. La existencia de cada tipo de $\tau_{0,\vartheta}$-número se deriva sucesivamente, de tal suerte que suponer su existencia no conduzca a una contradicción.

La sucesión recién tratada sólo contiene π_0-números como elementos; ahora se podría suponer que para sucesiones con solamente π_0-números como elementos se puede decidir fácilmente si tales sucesiones con transfinitos arbitrariamente grandes también tiene secciones con π_ν-números, etc. como límites. En la introducción de los π_ν-números, ρ_0-números, etc. surge en forma natural la consideración de sucesiones con exclusivamente π_0-números. De hecho, se puede relacionar cualquier sucesión con una sucesión de $\tau_{\chi,\vartheta}$-números, si se establece

$$\overline{\alpha}_\nu = \pi_{\alpha_\nu,\chi,\vartheta},$$

o algo similar. Por consiguiente, los teoremas 1 a 6 representan nuestro único asidero para decidir nuestro problema. Cuando toda W-sucesión tiene un π_0-número, respectivamente, un $\tau_{0,\vartheta}$-número como límite de una sección, entonces cada W-sucesión tiene secciones arbitrariamente grandes con π_ν-números, respectivamente $\tau_{\chi,\vartheta}$-números, como límites. Si esta propiedad de las sucesiones no ocurre en general, se pueden construir sucesiones con transfinitos arbitrariamente grandes que carecen de secciones con, digamos, sólo un π_0-número como límite. De hecho, cada sucesión del último tipo se puede extender de tal forma que tenga secciones con π_0-números, así como $\tau_{\chi,\vartheta}$-números como límites; sólo necesitamos fijar cada sucesión que carece de una sección de un cierto tipo hasta que le suceda un número del tipo deseado como límite, como ocurrió en la introducción de $\pi_{1,1}, \pi_{1,0,1}, \ldots \pi_{1,0,\nu}, \ldots$. Pero se reconoce que aquí se requiere una prescripción especial, que nos permite formar nuevos números, en tanto, como hasta ahora, no de lugar a contradicciones. Por ello, damos paso a un nuevo principio generador de $\tau_{0,\vartheta}$-números, que por claridad formulamos para cada ϑ:

Traducción de Luis Miguel Villegas Silva
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

Postulado P_ϑ. *Cada W-sucesión tiene una sección con un $\tau_{0,\vartheta}$-número como límite.*

Del teorema 6 se sigue el

Teorema 7. *Si se cumple el postulado P_ϑ, entonces toda W-sucesión tiene, para cada χ, secciones con $\tau_{\chi,\vartheta}$-números arbitrariamente grandes como límites.*

Si se supone cierto el postulado P_ϑ, entonces se cumple también el postulado $P_{\vartheta'}$ para cualquier $\vartheta' < \vartheta$, pues cada $\tau_{0,\vartheta}$-número es a su vez un $\tau_{0,\vartheta'}$-número. El inverso no se cumple. Ahora quisieramos analizar más detalladamente las consecuencias de refutar el postulado P_ϑ, donde $0 \leq \vartheta$. Al momento parece estar excluida la posibilidad de dar al postulado caracter de afirmación mediante una demostración; en tal demostración se debería mostrar, que para cada W-sucesión arbitraria se pueden construir conjuntos de la cardinalidad de un álef $\aleph_\alpha$, donde ω_α es un $\tau_{0,\vartheta}$-número y el límite de una sección de la W-sucesión; entonces probablemente se pueda establecer una conexión entre este problema con el del continuo. De suponer falso P_0, están excluidos los π_1-números, π_2-números, ..., π_ν-números, ..., si se cumple P_0, pero no P_1, es posible que no se puedan introducir los ρ_0-números, etc. En cambio, rechazar P_ϑ no obliga, en general, a excluir los $\tau_{0,\vartheta}$-números. Más bien, la sucesión de transfinitos se puede extender de diversas formas; por ejemplo, se puede restringir a transfinitos en cuyo conjunto la sucesión de los $\pi_{\nu,\nu,\nu}$ carece de secciones con un π_0-número como límite o exhibe un límite para el que se cumple

$$\xi = \pi_{1,0,\xi}.$$

Se puede suponer la existencia de dos sucesiones distintas R y R', para las que P_ϑ sólo se cumple para R', mientras que cada elemento de R está en R' en la misma posición; por cierto, R y R' pueden, consistentemente, existir aun cuando R es una sección de R'; ya que P_ϑ no se vale para R, no se puede suponer la formación de ciertos transfinitos en ella.

Con la posibilidad de extender arbitrariamente la sucesión de transfinitos, las leyes según las cuales definimos sucesiones "con transfinitos mayores que cada transfinito" obtienen una validez más amplia; en una extensión de la sucesión de números puede coincidir la formulación para los nuevos números definidos con la original, por ejemplo, "la sucesión de los números $\pi_{\nu,\nu}$"; pero no impide elegir los números en forma distinta en los dominios que se generen, porque entre los viejos y nuevos dominios no existe ninguna relación interna.

Dicho sea de paso, un reconocimiento amplio de la sucesión de los transfinitos no es completamente nueva; pues varios teórico conjuntistas reconocen al momento sólo los números debajo de Ω ($= \omega_1 = \pi_{2,0}$); al menos no se aprecia ninguna contradicción al suponer que la sucesión de los transfinitos se extiende sin límite, así que no queremos refutar o restringir el postulado P_ϑ. La libertad en el proceso generador de los transfinitos está en una extraña complementaridad con una estrechez en la noción de "conjunto de los transfinitos", que el Sr. Burali-Forti ha declarado como inconsistente. Ya que los elementos de este conjunto, por lo demás, existen sin contradicción, nos parece necesario, restringirnos a las operaciones lógicas aplicables al "conjunto de todos los transfinitos"; si este conjunto contiene a todos los transfinitos, se debe prescindir de la generación de nuevos transfinitos. Si con esto desaparecen todas las dificultades en la noción de este conjunto, no se investigará.

Traducción de Luis Miguel Villegas Silva Departamento de Matemáticas Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

Versión 21 agosto 2018

XVIII.1 2. Determinación de una cardinalidad.

En las primeras investigaciones sobre ρ_0-números se demostró la importancia de conjuntos densos M_α, para los que, con α como ρ_0-número, carecen de subconjuntos de tipo α y α^*, pero si contienen subconjuntos del tipo de Hausdorff $\eta_{\nu+1}$ para todo $\nu < \alpha$. Si uno de tales M_α es continuo, es decir, denso y sin huecos, no necesariamente contiene segmentos en los que para algún γ el subconjunto de elementos de caracter $c_{\gamma\gamma}$ sea denso en todas partes. La construcción de tales conjuntos no se ha logrado hasta ahora. Ahora queremos mostrar que cada M_α tiene cardinalidad $\sum_{\nu<\alpha} 2^{\aleph_\nu}$. Sobre los conjuntos M_α establecemos lo siguiente:

Definición. Todo conjunto lineal M_α que carece de subconjuntos de tipo α o α^*, para α un ρ_0-número, pero si tiene subconjuntos de tipo $\eta_{\nu+1}$ para $\nu < \alpha$, se llama α-ramo.

Aquí no se supone que M_α sea necesariamente denso. La condición de que M_α contenga un subconjunto de tipo $\eta_{\nu+1}$ para cada $\nu < \alpha$, probablemente se puede remplazar en la demostración, por la condición de que M_α contenga subconjuntos de tipo ν y ν^* para cada $\nu < \alpha$; pero conservamos la primera por ser más ilustrativa.

Para la demostración de que cada α-ramo tiene cardinalidad $\sum_{\nu<\alpha} 2^{\aleph_\nu}$, debemos emprender algunas investigaciones sobre el tipo de Hausdorff η_ν. Si ω_ν es un número inicial regular (π_0-número), entonces η_ν es cofinal en ω_ν y coinicial con ω_ν^*, y cada elemento de η_ν es el límite de una sucesión de tipo ω_ν y ω_ν^*, así un $c_{\nu\nu}$-elemento. Cada pedazo de η_ν coinicial con ω_ν^* y cofinal con ω_ν tiene tipo η_ν. En η_ν son los huecos de caracteres $c_{\nu\mu}$ y $c_{\mu\nu}$ densos en todas partes para cada $\mu \leq \nu$ (para ω_μ regular); si se rellena cada hueco con un elemento, se origina el tipo continuo $[\eta_\nu]$, la cerradura de η_ν. Este tipo $[\eta_\nu]$ tiene la cardinalidad $2^{\aleph_\nu}$ al igual que $\eta_{\nu+1}$. A este hecho conocido añadimos el

Teorema 8. *En el tipo η_ν está contenido cualquier tipo que carezca de subtipos iguales a ω_ν o ω_ν^* para ω_ν regular.*

Demostración. Sean P un conjunto de tipo η_ν y M un conjunto lineal que carece de subconjuntos de tipos ω_ν o ω_ν^*. Aplicamos M sobre un subconjunto de P preservando el orden, aplicando sucesivamente sus subconjuntos $M_0, M_1, \ldots, M_\mu, \ldots$. Sea M_0 un elemento arbitrario de M que se asocia a un elemento arbitrario de P. Suponga que ya hemos aplicado M_μ sobre un subconjunto P_μ de P preservando el orden, cuando $\mu < \omega_\nu$. Descomponemos M_μ en todas las formas en parejas de pedazos:

$$M_\mu = M'_\mu + M''_\mu.$$

Si queda un elemento m de M a la izquierda de (cada elemento de) M''_μ y a la derecha de M'_μ (cuando M'_μ o M''_μ no tienen elementos, se prescinde de la determinación), se escoje tal m arbitrariamente como el m_μ de esta descomposición. A $M_{\mu+1}$ deben pertenecer, además de los elementos de M_μ, todos los m_μ. El elemento m_μ determinado por la descomposición $M_\mu = M'_\mu + M''_\mu$ se debe asociar a un elemento de P. Según la aplicación recién creada se corresponden los subconjuntos P'_μ y P''_μ a los subconjuntos M'_μ y M''_μ. Ya que P'_μ y P''_μ al igual que M'_μ y M''_μ carecen de subconjuntos de tipos ω_ν o ω_ν^*, existe un subconjunto de P a la izquierda de P''_μ y a la derecha de P'_μ de tipo η_ν (cuando P'_μ o P''_μ carecen de elementos, prescindimos de la determinación); un elemento arbitrario p_μ de este subconjunto de P se debe asociar al elemento

México
Traducción de Luis Miguel Villegas Silva
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

m_μ de la descomposición considerada, y junto a los elementos de P_μ deben pertenecer todos los elementos p_μ de $M_{\mu+1}$ al correspondiente $P_{\mu+1}$. Para el orden dado a los elementos de $M_{\mu+1}$ y $P_{\mu+1}$ claramente se aplican uno sobre el otro respetando el orden, como se cumplía para M_μ y P_μ. Si $\mu \leq \omega_\nu$ es un número límite, M_μ debe consistir en los elementos de los M_λ con $\lambda < \mu$; igualmente P_μ consta de los elementos de los P_λ con $\lambda < \mu$; ya que además, en M_μ y P_μ se corresponden los elementos entre sí, como en M_λ y P_λ, es evidente que M_μ y P_μ se aplican unos sobre el otro respetando el orden.

Puesto que M carece de subconjuntos de tipos ω_ν o ω_ν^*, al menos M_{ω_ν} es igual a M. De lo contrario existiría un elemento $\overline{m}$ de M que no pertenece a M_{ω_ν}. Pero para cada $\mu < \omega_\nu$ existe una descomposición $M'_\mu + M''_\mu$, como arriba, cuyo m_μ debería ser m. Para cada μ y esta descomposición se escoje un elemento m_μ de M a la izquierda o derecha de $\overline{m}$. Estos m_μ decrecen conforme μ crece y se aproximan a $\overline{m}$, su totalidad conforma un tipo $\alpha + \beta^*$, donde α y β son transfinitos $\leq \omega_\nu$. Ya que por hipótesis se pueden definir $\aleph_\nu$ de tales m_μ, al menos uno de los dos α, β es igual a ω_ν; dado que M carece de subconjuntos de tipo ω_ν o ω_ν^*, ni α ni β pueden ser iguales a ω_ν, por lo que no existe ningún $\overline{m}$. Por tanto, algún M_μ con $\mu \leq \omega_\nu$ es igual a M, y su aplicación al correspondiente subconjunto P_μ de P muestra la veracidad del teorema 8.

Ya podemos proceder a determinar la cardinalidad para los conjuntos M_α. En virtud de que cada M_α debe contener un subconjunto de tipo $\eta_{\nu+1}$ para cada $\nu < \alpha$, el límite de las cardinalidades $2^{\aleph_\nu}$ para $\nu = \alpha$ es la cota inferior de la cardinalidad buscada. Por el teorema 8 M_α es similar a un subtipo η_α, M_α puede tener a lo sumo la cardinalidad de η_α. Si pensamos en η_α como la potencia de Hausdorff de la α-ésima clase

$$\eta_\alpha = 3(\omega_\alpha)$$

con el elemento intermedio de la base como elemento principal, entonces el conjunto de asignaciones de ω_α, en las que exactamente $\aleph_\nu$ posiciones no están cubiertas con el elemento principal tiene cardinalidad

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\nu} = \sum_{\mu<\alpha} \aleph_\mu^{\aleph_\nu}.$$

Por consiguiente, η_α tiene la cardinalidad

$$\sum_{\nu<\alpha} \aleph_\alpha^{\aleph_\nu} = \sum_{\mu,\nu<\alpha} \aleph_\mu^{\aleph_\nu}.$$

Ya que la suma de los $\aleph_\mu^{\aleph_\nu}$, en la que $\mu + \nu = \lambda$, es igual a $2^{\aleph_\lambda}$, se sigue que la cardinalidad de η_α:

$$\overline{\eta}_\alpha = \sum_{\lambda<\alpha} 2^{\aleph_\lambda} = \sum_{\nu<\alpha} 2^{\aleph_\nu}.$$

En vista de que las cotas inferior y superior de la cardinalidad de M_α son iguales a la cardinalidad supuesta de M_α, M_α tiene esa cardinalidad.

Pretendemos derivar este resultado de otra forma, y simultáneamente lograr otros resultados. Otra vez retornamos al hecho de que un conjunto M que carece de subconjuntos de tipo ω_ν o ω_ν^* para ω_ν regular se puede aplicar sobre un subconjunto de un conjunto P de tipo η_ν, lo que se

Traducción de Luis Miguel Villegas Silva
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

Versión 21 agosto 2018

manifestó como posible en la demostyración del teorema 8. Por otro lado pensamos en M con todas las posbles descomposiciones en parejas de pedazos:

$$M = M_1 + M_2$$

y entre cada M_1 y M_2 se inserta un conjunto de tipo η_ν; esto debe ocurrir incluso, cuando M_1 o M_2 sea vacío. El conjunto que contiene los elementos de M junto con los elementos de todos los conjuntos insertados es similar a P; porque se puede aplicar sobre P respetando el orden, si a cada elemento de M se le asocia el elemento que le corresponde y a los conjuntos insertados entre los pedazos de M, se asocian los pedazos de P entre las imágenes de M_1 y M_2, que en total tienen el tipo η_ν. Con ello ocurre el

Teorema 9. *Si se descompone un conjunto M sin subconjuntos de tipo ω_ν o ω_ν^* (ω_ν un π_0-número) en todas las posible parejas de pedazos: $M = M_1 + M_2$ y se inserta entre M_1 y M_2 un conjunto de tipo η_ν (incluso si M_1 o M_2 son vacíos), entonces el conjunto que consta de los elementos de M y de los conjuntos insertados tiene tipo η_ν.*

Además probamos el

Teorema 10. *Sean $\nu_0, \nu_1, \ldots$ una sucesión de transfinitos menores que ν y ω_{ν_μ} siempre regular; además, el conjunto lineal M consiste en los elementos de los conjuntos $M_0, M_1, \ldots$ con tipos η_{ν_0}, η_{ν_1}, ...; entonces M carece de subconjuntos de tipo $\omega_{\nu+1}$ o $\omega_{\nu+1}^*$.*

Demostración. Por simetría basta probar que M no posee subconjuntos de tipo $\omega_{\nu+1}$. Cualquier subconjunto bien ordenado de M_μ tiene a lo sumo cardinalidad $\aleph_{\nu_\mu}$; la cardinalidad de un conjunto bien ordenado de M es a lo sumo igual a $\sum_\mu \aleph_\mu$ o, dado que ν es mayor que cada ν_μ, es a lo sumo igual $\aleph_\nu$; así que en M no puede haber un subconjunto de tipo $\omega_{\nu+1}$ con cardinalidad $\aleph_{\nu+1}$, l.q.q.d.

Ahora sean α un ρ_0-número y M un α-ramo arbitrario cerrado. Entonces existe una sucesión $E_0, E_1, \ldots E_\nu, \ldots$ de subconjuntos de M, en la que ν recorre todos los números menores que α. Sea E_0 un subconjunto arbitrario de M con tipo $\eta_0 = \eta$. Si ya conocemos E_ν, lo descomponemos en todas las formas posibles en parejos de pedazos:

$$E_\nu = E'_\nu + E''_\nu.$$

A cada descomposición corresponde un pedazo a la izquierda de (todos los elementos de) E''_ν y a la derecha de E'_ν (si E'_ν o E''_ν son vacíos, la prescripción no se efectúa); por supuesto, siempre existe una cantidad infinita de M_ν distintos, y eston contienen, finalmente, sólo un o ningún elemento. De cada M_ν no vacío se escoje un subconjunto de tipo $\eta_{\nu+1}$ o sólo un elemento arbitrario como parte F_ν de $E_{\nu+1}$, dependiendo de si M_ν tiene un subconjunto de tipo $\eta_{\nu+1}$ o no. $E_{\nu+1}$ se debe conformar de los elementos de E_ν y de los F_ν. Para ν límite ($\nu < \alpha$) E_ν debe contener los elementos de los E_μ con $\mu < \nu$ así como los elementos frontera de ese conjunto.

Según nuestra prescripción, el tipo de cada E_ν está contenido en $\eta_{\nu+1}$, como se muestra fácilmente por inducción transfinita. Porque dado que E_0 tiene tipo η_0, esto se cumple para $\nu = 0$. Si el tipo de E_ν está contenido en $\eta_{\nu+1}$, entonces el tipo de $E_{\nu+1}$ está contenido en $\eta_{\nu+2}$; a saber, si a cada descomposición $E_\nu = E'_\nu + E''_\nu$ corresponde un conjunto F_ν de tipo $\eta_{\nu+1}$, $E_{\nu+1}$ tendría,

México

Traducción de Luis Miguel Villegas Silva Departamento de Matemáticas Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

por el teorema 9, tipo $\eta_{\nu+1}$; entonces $E_{\nu+1}$ carece de subconjuntos de tipo $\omega_{\nu+2}$ o $\omega^*_{\nu+2}$, cuando alguno de los F_ν contienen sólo un o ningún elemento (lo último para $M_\nu = 0$). Para ν como número límite ($\nu < \alpha$) podemos emplear el teorema 10, si usamos el conjunto $E_{\mu+1}$ como M_{ν_μ}, cuyo tipo es igual a $\eta_{\mu+1}$ o es un subtipo de él. El conjunto de elementos de todos los E_μ con $\mu < \nu$ carece por tanto de subconjuntos de tipo $\omega_{\nu+1}$ o $\omega^*_{\nu+1}$, y la adición de elementos frontera no cambia nada, de tal suerte que según el teorema 8 el tipo de E_ν está contenido en $\eta_{\nu+1}$.

Puesto que M mismo, pero no su subconjunto E_ν, contiene un subconjunto de tipo $\eta_{\nu+1}$, al menos un F_ν es de tipo $\eta_{\nu+1}$. Por consiguiente, $E_{\nu+1}$ tiene la cardinalidad $2^{\aleph_\nu}$, y la cota inferior de la cardinalidad de M es

$$\lim_{\nu=\alpha} 2^{\aleph_\nu} = \sum_{\nu<\alpha} 2^{\aleph_\nu}.$$

Esta cardinalidad, que ocurre en el conjunto E_α de los elementos de todos los E_ν para $\nu < \alpha$, es la cardinalidad de M, porque E_α contiene cada elemento de M. En caso contrario, sea m un elemento de M que no pertenece a E_α. Para cada ν existe una descomposición de E_ν en E'_ν y E''_ν, y m pertenece al pedazo M_ν de M que esta a la izquierda de E''_ν y a la derecha de E'_ν (para E'_ν o E''_ν vacíos se omite la prescripción); ya que m no pertenece a E_α, nuestra descomposición $E'_\nu + E''_\nu$ corresponde a un F_ν no vacío; sea m_ν un elemento arbitrario pero fijo de F_ν. Para cada $\nu < \alpha$ existe tal m_ν; si μ y ν son transfinitos menores que α y m_ν, m_ν están del mismo lado que m, entonces m_μ está entre m_ν y m, cuando $\mu > \nu$. Así, el conjunto de m_ν tiene tipo $\beta + \gamma^*$, donde β y γ son transfinitos; en virtud de que este conjunto tiene cardinalidad $\aleph_\alpha$, al menos β o γ es igual a γ; como M debe carecer de subconjuntos de tipo α y α^*, no existe tal elemento m, por lo que $E_\alpha = M$. Por lo tanto, M tiene cardinalidad $\sum_{\nu<\alpha} 2^{\aleph_\nu}$.

Cuando M no es cerrado, posee por hipótesis, para cada $\nu < \alpha$, subconjuntos de tipo $\eta_{\nu+1}$, por lo que debe tener la misma cardinalidad. Por ello se cumple el

Teorema 11. *Cada α-ramo tiene cardinalidad* $\sum_{\nu<\alpha} 2^{\aleph_\nu}$.

Ahora derivamos una consecuencia de la existencia de $\aleph_\alpha$ conjuntos E_ν con M como conjunto de elementos. Del continuo lineal se sabe que en el conjunto de elementos de $\aleph_0$ pueden ser densos en todas partes sus subconjuntos densos en ninguna parte; no obstante, el continuo no se puede descomponer en $\aleph_0$ subconjuntos densos en ninguna parte en él ajenos entre sí. Supongamos que para un conjunto lineal continuo M se requieren $\aleph_\gamma$ subconjuntos densos en ninguna parte en él, para que el conjunto de sus elementos sea desno en todas partes en M; para que M se pueda descomponer en subconjuntos densos en ninguna parte ajenos entre sí, cuyo conjunto de elementos sea igual a M, se necesitan al menos $\aleph_{\gamma+1}$ subconjuntos, cuando γ no es un ρ_0-número y M es un γ-ramo[1]. Si se puede salir adelante con $\aleph_{\gamma+1}$ subconjuntos, aún no se puede decir nada seguro; por el contrario, nuestra construcción de los E_γ para $\gamma = \alpha$ y M como α-ramo, se muestra que cada α-ramo M se puede representar, como la unión de $\aleph_\alpha$ conjuntos densos en ninguna parte en M ajenos entre sí . Para un M continuo y acotado sea G_ν el conjunto de elementos de E_ν, que no pertenecen a ningún E_μ con $\mu < \nu$; al igual que E_ν, G_ν es denso en ninguna parte en M, y cualesquier G_ν distintos carecen de elementos en común; el conjunto de elementos de los G_ν es igual E_α y M. Si M es denso, pero no cerrado, sea $M^{(1)}$ un conjunto continuo acotado denso en todas partes en M, para el que los E_ν y G_ν están determinados; los subconjuntos G'_ν de M en

[1]Esta revista, Vol. **LXIII**, pág. 224, teorema 24.

Traducción de Luis Miguel Villegas Silva
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

Versión 21 agosto 2018

G_ν son entonces $\aleph_\alpha$ subconjuntos densos en ninguna parte ajenos entre sí a partir de los cuales se puede confirmar M; que finalmente $\aleph_\nu$ de estos conjuntos G'_ν puedan ser vacíos, claramente no cambia nada. Por ello, para cada α-ramo se cumple el

Teorema 12. *Todo α-ramo denso M se puede representar, como la unión de $\aleph_\alpha$, subconjuntos densos en ninguna parte ajenos entre sí.*

Si se supone la existencia de α-ramos M, y es posible emplear elementos sueltos en lugar de conjuntos G_ν, respectivamente G'_ν, entonces la cardinalidad $\sum_{\nu<\alpha} 2^{\aleph_\nu}$ sería igual a $\aleph_\alpha$; por el teorema 12 no parece estar excluido esto. De todos modos, podría ser una potencia $2^{\aleph_\nu}$, incluso $2^{\aleph_0}$, mayor que o igual a $\aleph_\alpha$; en tal caso un conjunto M que carece de subconjuntos de tipo α y α^* pero sí dispone de subconjuntos de tipos ν y ν^* para cada transfinito $\nu < \alpha$ no tiene por que contener subconjuntos de tipo $\eta_{\mu+1}$; esta situación fue considerada en la definición de α-ramo.

Impreso 18.XII.1913.

Traducción de
Luis Miguel Villegas Silva
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

México