Sobre las clases de conjuntos cerradas con respecto a ciertas operaciones elementales.

Por

Afred Tarski (Varsovia).

Introducción.

Los problemas del tipo siguiente constituyen el objeto principal de las investigaciones en este trabajo: *dado un conjunto infinito A, ¿cuántas clases de subconjuntos de A existen dotadas de una propiedad dada P*? Las propiedades P aquí consideradas no son, por otra parte, ni arbitrarias, ni demasiado generales: vienen todas a ser tales que las clases consideradas de subconjuntos sean *cerradas respecto a ciertas operaciones elementales.* Se trata de hecho de las operaciones $\boldsymbol{F}$ que hacen corresponder a toda clase de conjuntos $\boldsymbol{K}$ una nueva clase de conjuntos $\boldsymbol{F(K)}$ y, en primer lugar, operaciones que consisten en formar las sumas, productos, diferencias y complementos de los conjuntos que pertenecen a la clase $\boldsymbol{K}$ y agregar a esta clase todos los subconjuntos de sus elementos. Una clase $\boldsymbol{K}$ se llama cerrada respecto de una operación $\boldsymbol{F}$ cuando el resultado $\boldsymbol{F(K)}$ de esta operación efectuada sobre $\boldsymbol{K}$, es a su vez una subclase de $\boldsymbol{K}$ [1].

Algunos de los problemas discutidos en este trabajo me fueron planteados por los Srs. Poprougénko y Sierpiński.

Los resultados principales de estas investigaciones se resumen después de §7. Sólo mencionaré lo siguiente: en todos los problemas considerados en lo que sigue logro establecer una simple relación funcional entre la potencia de la familia de todas las clases compuestas por los subconjuntos de un conjunto infinito dado, cerradas con respecto a tales u otras operaciones, y la potencia del conjunto dado mismo; siendo $\mathfrak{a}$ la potencia de este conjunto se verá en la mayoría de los casos que la de la familia de que se trata es $2^{\mathfrak{a}}$ o bien $2^{2^{\mathfrak{a}}}$.

Los resultados de esta naturaleza se dan en diversos teoremas de §§3-7, con el nombre de *teoremas fundamentales.* Previamente introduzco algunas nociones auxiliares de la teoría general de los conjuntos en §1, y describo brevemente en §2 un algoritmo que concierne a las operaciones sobre las clases de conjuntos; luego examino en la §3 las propiedades generales de las clases cerradas respecto a operaciones cualesquiera, establezco en las §§4-7 diversas propiedades elementales de las operaciones enumeradas al principio e introduzco ahí también ciertas operaciones auxiliares.

En la mayor parte de estas investigaciones juega un papel esencial el *axioma de elección*; por tanto sólo intentaré evitar su utilización en las demostraciones de las propiedades elementales de las operaciones en cuestión, y ahí donde este axioma intervenga en el raciocinio lo mencionaré explícitamente. Algunos resultados sólo se establecerán con ayuda de la llamada *hipótesis de Cantor sobre los álef.*

Hay problemas muy próximos a los de este trabajo, aunque más simples desde el punto de vista lógico que son del tipo siguiente: *dado un conjunto infinito A ¿cuántos subconjuntos de A tienen una cierta propiedad P?* Es de notarse que todos los problemas como éste, conocidos actualmente, si son enunciados enteramente en términos de la teoría general de los conjuntos, permiten ser reducidos a la forma siguiente: *dado un conjunto infinito A* cuántos *subconjuntos de A existen, cuya potencia $\mathfrak{a}$ goza de una propiedad dada Q?* [2] Pero, la pregunta así planteada admite una solución general expresada

[1] Véase Frèchet, De las familias y funciones aditivas de conjuntos. Fund. Math. IV, pág. 335

[2] La observación de este fenómeno actualmente es puramente empírica; si es general, sería interesante explicarlo y

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

mediante la proposición:

Siendo A un conjunto infinito de potencia $\mathfrak{a}$, la clase de todos los subconjuntos de A, cuya potencia goza de propiedad Q, es de la potencia $\sum \mathfrak{a}^{\mathfrak{r}}$, y la suma se extiende a todos los números $\mathfrak{r}$ de propiedad [3] *Q.*

Así, los problemas referidos ingresan totalmente al dominio de la aritmética de los números cardinales.

§1. Notaciones, nociones y teoremas auxiliares.

En este trabajo usaré una serie de nociones y símbolos conocidos de la teoría general de los conjuntos sin definirlos explícitamente; también me basaré en diversas propiedades conocidas de estas nociones sin mencionar los teoremas que les conciernen.

Voy a denotar con $a, b, \dots, x, y, \dots$, a los *individuos*, por tanto los objetos que no son conjuntos (o para los cuales no admito la hipótesis de que sean conjuntos); denotaré mediante $A, B, \dots, X, Y, \dots$, los conjuntos de individuos; denotaré $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}, \dots, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \dots$, los conjuntos de estos conjuntos, que acostumbro llamar, *clases de conjuntos*; denotaré con $\mathcal{H}, \mathcal{L}, \dots, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots$ los conjuntos de clases de conjuntos, llamados *familias de clases*; mediante $\alpha, \beta, \dots, \zeta, \eta, \dots$, los números ordinales y $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \dots$, los números cardinales. Los signos $f, g, h, \dots, F, G, H, \dots, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \dots, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \dots, \dots, \varphi, \psi, \chi, \dots$, y $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{H}, \dots$, van a designar las funciones (operaciones unívocas) que respectivamente admiten como valores: individuos, conjuntos, clases, familias, números ordinales y números cardinales. En el caso de *sucesiones del tipo* α, es decir de funciones definidas sólo para números ordinales inferiores a un número α, dado de antemano, voy a emplear los signos de la forma f_ξ en vez de los símbolos habituales del tipo $f(\xi)$; además de las letras $f, g, h, \dots$ utilizaré en tales casos letras $a, b, \dots, x, y, \dots$, escribiendo por ejemplo a_ξ, x_ξ etc. Las clases de funciones y de sucesiones serán designadas respectivamente con $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \dots$, y $\Phi, \Psi, \dots$

Emplearé en el sentido acostumbrado los signos y las nociones del cálculo de conjuntos. En particular, los signos 0 y 1, serán reservados para designar números cardinales u ordinales, y denotaré 0 el conjunto vacío y 1 el conjunto universal (que se compone de todos los individuos que han de ser considerados)[1]. En realidad, este símbolo 1 presenta el carácter de ser un símbolo variable que designa todos los individuos considerados en un teorema dado, y como tal, es susceptible de las más variadas interpretaciones; pero, para simplificar las notaciones, voy a emplearlo como fijo sin mencionar por consiguiente en los enunciados de los teoremas hipótesis tales como $a \in 1$ o $A \subset 1$ y tratándose de nociones generales, relacionadas con el conjunto 1, sin poner esta relatividad en evidencia en sus símbolos (véase la definición 5^c, 13, 14 y 16). Para designar el conjunto suma, respectivamente el producto (la parte común) de todos los conjuntos de una clase dada $\boldsymbol{K}$, usaré el símbolo abreviado $\sum(\boldsymbol{K})$, respectivamente $\prod(\boldsymbol{K})$, aparte del símbolo acostumbrado $\sum\limits_{X \in \boldsymbol{K}}(X)$, respectivamente $\prod\limits_{X \in \boldsymbol{K}}(X)$.

Las fórmulas $a \in A$, $a \bar{\in} A$ dirán que el elemento a pertenece respectivamente, no pertenece al conjunto A. Para designar el conjunto compuesto por un sólo elemento a, emplearé el símbolo

precisarlo mediante razonamientos rigurosos de la Metamatemática.

[3]Esta proposición es consecuencia fácil de un teorema conocido citado en este trabajo en la demostración del lema 10(b) de §1.

[1]N. del T.: En esta traducción se usarán los símbolos 0, 1, en el sentido de conjuntos y números

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

$\{a\}$ o a veces, $\mathscr{J}(\mathfrak{a})$; los símbolos $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, etc. designarán, respectivamente, los conjuntos exclusivamente compuestos por a y b, o de elementos a, b y c, etc. Voy a designar mediante $\underset{f(x)}{\mathrm{E}}[\ ]$ el conjunto de todos los valores de una función dada f que corresponden a los valores del argumento x que satisfacen la condición formulada entre corchetes [ ]; el significado del símbolo $\underset{f(x,y)}{\mathrm{E}}[\ ]$ es análogo.

Voy, además, a usar sin explicación varios signos y nociones conocidos de la aritmética de los números ordinales y cardinales. Designaré como es costumbre con $\bar{\bar{A}}$, la potencia del conjunto A; pongo, en particular

$$\overline{\alpha} = \overline{\overline{\underset{\xi}{\mathrm{E}}[\xi < \alpha]}} \quad \text{y} \quad \aleph_\alpha = \overline{\omega_\alpha} = \overline{\overline{\underset{\xi}{\mathrm{E}}[\xi < \omega_\alpha]}}$$

Representaré siempre los números cardinales infinitos con la forma de los álef $\aleph_\alpha$; así podremos dar a los teoremas fundamentales de este trabajo un aspecto exterior uniforme, sin disminuir su generalidad (a causa del teorema conocido de Zermelo sobre el buen orden).

Pero ahora voy a dar las definiciones explícitas y a establecer ciertas propiedades de nociones y signos igualmente generales pero menos conocidos o introducidos como nuevos.

Definición 1.

^{a}) $\sup(A)$ *es el más pequeño de los números ordinales* η *que satisfacen la condición:* $\xi < \eta$ *cuando* $\xi \in A$.

^{b}) $\lim\limits_{\xi<\alpha} \varphi_\xi = \sup(\underset{\varphi_\xi}{E}[\xi < \alpha])$ *en el caso en que la sucesión de números ordinales* φ *del tipo* α *es una sucesión creciente*[1] *y* α *es un número de la segunda especie diferente de* 0.

Definición 2. $cf(\alpha)$ *es el más pequeño de los números ordinales* η *que satisfacen la condición: existe una sucesión* φ *del tipo* ω_η *tal que* $\omega_\alpha = \lim\limits_{\xi<\omega_\eta} \varphi_\xi$.

Debe recordarse a propósito de la definición anterior que los números iniciales ω_α, se llaman *regulares* o *singulares* según ocurra $cf(\alpha) = \alpha$ o $cf(\alpha) < \alpha$.

Voy a establecer algunas propiedades del símbolo $cf(\alpha)$ en los tres lemas siguientes:

Lema 1. ^{a}) *Para todo número ordinal* α *se tiene* $cf(\alpha) \leq \alpha$;

^{b}) *Si* $\alpha = 0$, *o bien si* α *es un número de primera especie, se tiene* $cf(\alpha) = \alpha$;

^{c}) *Si* $\omega_\alpha = \lim\limits_{\xi<\beta} \varphi_\xi$, *se tiene* $\omega_{cf(\alpha)} \leq \beta$ *y* $cf(\alpha) = cf(\beta)$;

^{d}) $cf(\omega_\alpha) = cf(\alpha) = cf(cf(\alpha))$.

Lema 2. ^{a}) *Para todo número* α *existe una sucesión de números cardinales* $\mathfrak{f}$ *del tipo* $\omega_{cf(\alpha)}$ *que verifican las fórmulas:* $\aleph_\alpha = \sum\limits_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \mathfrak{f}_\xi$ *y* $0 < \mathfrak{f}_\xi < \aleph_\alpha$ *para* $\xi < \omega_{cf(\alpha)}$;

^{b}) *Si* $0 < \bar{\bar{A}} \leq \aleph_\alpha$, *existe una sucesión creciente*[2] *de conjuntos* F *del tipo* $\omega_{cf(\alpha)}$ *que verifican las*

[1] Es decir, cuando $\varphi_\xi < \varphi_\eta$ para $\xi < \eta$

[2] Es decir, tal que $F_\xi \subset F_\eta$ para $\xi < \eta < \omega_{cf(\alpha)}$.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

fórmulas: $A = \sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} F_\xi$ *y* $0 < \overline{\overline{F_\xi}} < \aleph_\alpha$ *para* $\xi < \omega_{cf(\alpha)}$.

Lema 3. ^{a}) *Si* $\bar{\bar{B}} < \aleph_{cf(\alpha)}$ *y* $f(x) < \aleph_\alpha$ *para* $x \in B$, *se tiene* $\sum_{x\in B} f(x) < \aleph_\alpha$;

^{b}) *Si* $\bar{\bar{B}} < \aleph_{cf(\alpha)}$ *y* $\overline{\overline{F(x)}} < \aleph_\alpha$ *para* $x \in B$, *se cumple* $\overline{\overline{\sum_{x\in B} F(X)}} < \aleph_\alpha$;

^{c}) *Si* $\bar{\bar{B}} < \aleph_{cf(\alpha)}$ *y* $B \subset \sum_{\xi<\omega_\alpha} F_\xi$, *existe un número* η *tal que* $0 < \eta < \omega_\alpha$ *y* $B \subset \sum_{\xi<\eta} F_\xi$.

Demostración. La demostración de estos tres lemas, basada en la definición 1, se obtiene fácilmente por los procedimientos de raciocinio conocidos, demostraré, como ejemplo, el lema 3^c.

La hipótesis del lema implica la siguiente descomposición del conjunto B:

$$B = \sum_{\xi<\omega_\alpha} (B \cdot F_\xi - \sum_{\eta<\xi} B \cdot F_\eta). \tag{1}$$

Consideremos los números ordinales ξ, para los cuales los sumandos correspondientes de la descomposición (1), es decir los conjuntos $B \cdot F_\xi - \sum_{\eta<\xi} B \cdot F_\eta$ no son vacíos. Ordenando estos números según su magnitud, se obtiene una sucesión φ del tipo β que satisface las condiciones:

$$\varphi_\eta < \varphi_\vartheta < \omega_\alpha, \textit{cuando } \eta < \vartheta < \beta, \tag{2}$$

y

$$B = \sum_{\vartheta<\beta} (A \cdot F_{\varphi_\vartheta} - \sum_{\eta<\vartheta} A \cdot F_{\varphi_\eta}), \tag{3}$$

donde

$$A \cdot F_{\varphi_\vartheta} - \sum_{\eta<\vartheta} A \cdot F_{\varphi_\eta} \neq 0 \textit{ para } \vartheta < \beta.$$

Si se tuviese $\beta \geq \omega_{cf(\alpha)}$, la fórmula (3) establecería la descomposición del conjunto B en sumandos ajenos no vacíos y en cantidad $\geq \aleph_{cf(\alpha)}$; pero, como el conjunto B es por hipótesis de potencia $< \aleph_{cf(\alpha)}$, se demuestra sin dificultad con ayuda del axioma de elección que tal descomposición no es posible. Luego

$$\beta < \omega_{cf(\alpha)}. \tag{4}$$

Supongamos que

$$sup(\underset{\varphi_\vartheta}{\mathrm{E}}[\vartheta < \beta]) = \omega_\alpha. \tag{5}$$

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier, Mexico

Es fácil concluir de (2) y (5) que β es un número de la segunda especie (pues en caso contrario se tendría $\sup(\underset{\varphi\vartheta}{\mathrm{E}}[\vartheta < \beta]) = \varphi_{\beta-1} < \omega_\alpha$). Si $\beta = 0$, se tendrá según (3) $B = 0$ y la tesis del lema se vería evidentemente cumplida; podemos entonces admitir además que $\beta \neq 0$. En consecuencia y de conformidad con (2) y la definición 1^b se puede escribir (5) en la forma $\lim\limits_{\xi<\beta} \varphi_\xi = \omega_\alpha$. En virtud del lema 1^c resulta entonces que $\omega_{cf(\alpha)} \leq \beta$, lo que evidentemente contradice (4). Estamos pues obligados a desechar la suposición (5) y admitir que

$$sup(\underset{\varphi_\vartheta}{\mathrm{E}}[\vartheta < \beta]) \neq \omega_\alpha. \tag{6}$$

Las fórmulas (2) y (6) dan de inmediato:

$$\sup(\underset{\varphi_\vartheta}{\mathrm{E}}[\vartheta < \beta]) < \omega_\alpha. \tag{7}$$

Escribiendo: $\sup(\underset{\varphi_\vartheta}{\mathrm{E}}[\vartheta < \beta]) + 1 = \eta$, es fácil convencerse de que η es el número buscado: en efecto se tiene según (7) $0 < \eta < \omega_\alpha$ y se deduce de (3) que $B \subset \sum\limits_{\xi<\eta} F_\xi$, l.q.q.d.

Definición 3. *$p(\alpha)$ es el más pequeño de los números ordinales η que verifican la fórmula: $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_\eta}$.*

Lema 4.
^{a}) $p(\alpha) \leq cf(\alpha)$
^{b}) $cf(p(\alpha)) = p(\alpha)$;
^{c}) *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\beta < p(\alpha)$,

(2) $\aleph_\alpha = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$,

(3) existe un número cardinal $\mathfrak{a}$ tal que $\aleph_\alpha = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$.

Demostración.
^{a}) Aplicando el conocido teorema de J. König (generalizado por Zermelo), se concluye del lema 2^a que $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_{cf(\alpha)}}$. De aquí, en conformidad con la definición 3, $p(\alpha) \leq cf(\alpha)$, l.q.q.d.
^{b}) De acuerdo con el lema 2^a (para el número $p(\alpha)$) existe una sucesión de números cardinales $\mathfrak{f}$ del tipo $\omega_{cf(p(\alpha))}$ que verifica las fórmulas:

$$\aleph_{p(\alpha)} = \sum_{\xi<\omega_{cf(p(\alpha))}} \mathfrak{f}_\xi \tag{1}$$

y

$$0 < \mathfrak{f}_\xi < \aleph_{p(\alpha)} \ para \ \xi < \omega_{cf(p(\alpha))}. \tag{2}$$

Se concluye de (4) que

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

$$\aleph_\alpha^{\aleph_{p(\alpha)}} = \prod_{\xi < \omega_{cf(p(\alpha))}} \aleph_\alpha^{\mathfrak{f}_\xi}. \tag{3}$$

Debido a que según (2) y por la definición 3 tenemos $\aleph_\alpha^{\mathfrak{f}_\xi} = \aleph_\alpha$, para $\xi < \omega_{cf(p(\alpha))}$, se obtiene de (3):

$$\aleph_\alpha^{\aleph_{p(\alpha)}} = \aleph_\alpha^{\aleph_{cf(p(\alpha))}}. \tag{4}$$

Resulta de (4), de conformidad con la definición 3, que el número $cf(p(\alpha))$ es de manera análoga al número $p(\alpha)$, uno de los números η que satisfacen la condición: $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_\eta}$; pero como $p(\alpha)$ es el más pequeño número de esta especie, se tiene $cf(p(\alpha)) \geq p(\alpha)$. La desigualdad inversa, es decir, $cf(p(\alpha)) \leq p(\alpha)$, es un caso particular del lema 1^a. Se obtiene así finalmente la fórmula buscada: $cf(p(\alpha)) = p(\alpha)$.

^{c}) Las condiciones (1) y (2) son equivalentes en razón de la definición 3; la equivalencia de (2) y (3) resulta de la fórmula conocida $(\mathfrak{a}^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta^2} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$.

Definición 4. $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} = \sum_{\mathfrak{r} < \mathfrak{b}} \mathfrak{a}^{\mathfrak{r}}$.

Lema 5. ^{a}) *Si*[1]) $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$, *se tiene* $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} \leq \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\mathfrak{c}}} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} + \sum_{\mathfrak{b} \leq \mathfrak{r} < \mathfrak{c}} \mathfrak{a}^{\mathfrak{r}}$;

^{b}) *Si* $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$, *ocurre* $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\mathfrak{c}}} \leq \mathfrak{b}^{\underset{\smile}{\mathfrak{c}}}$;
^{c}) *Si* $\mathfrak{b} \geq 2$, *se cumple* $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} \geq \mathfrak{a}$;

^{d}) *Si* $\mathfrak{a} \geq 2$, *entonces* $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} \geq \mathfrak{b}$.

Demostración. ^{a}), ^{b}) y ^{c}) son evidentes. ^{d}) Para omitir el caso trivial $\mathfrak{b} \leq \aleph_0$, escribiremos: $\mathfrak{b} = \aleph_\beta$ donde $\beta \neq 0$. Según la definición 4, $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \geq \sum_{\xi < \beta} \mathfrak{a}^{\aleph_\xi} \geq \sum_{\xi < \beta} 2^{\aleph_\xi} \geq \sum_{\xi < \beta} \aleph_{\xi+1} = \aleph_\beta$, luego entonces $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} \geq \mathfrak{b}$, l.q.q.d.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Lema 6. ^{a}) *Si* $\aleph_{p(\alpha)} \geq \mathfrak{b} \geq 2$, *se cumple* $\aleph_\alpha^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} = \aleph_\alpha$;
^{b}) *Si* $\mathfrak{a} \geq 2$, *ocurre* $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta+1}}} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$;
^{c}) *Si* $\mathfrak{a} \geq 2$, *se tiene* $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \geq \aleph_\beta^{\underset{\smile}{\aleph_{cf(\beta)}}}$.

Demostración. ^{a}) Conforme a la definición 4, $\aleph_\alpha^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} = \sum_{\mathfrak{r} < \mathfrak{b}} \aleph_\alpha^{\mathfrak{r}} = \sum_{1 \leq \mathfrak{r} < \mathfrak{b}} \aleph_\alpha^{\mathfrak{r}}$; según la definición 3, $\aleph_\alpha^{\mathfrak{r}} = \aleph_\alpha$ para $1 \leq \mathfrak{r} < \mathfrak{b} \leq \aleph_{p(\alpha)}$, se tiene:

$$\aleph_\alpha^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} = \aleph_\alpha \cdot \overline{\overline{\underset{\mathfrak{r}}{\mathrm{E}}[1 \leq \mathfrak{r} < b]}} \tag{1}$$

[1] Aquí usamos $\mathfrak{c}$ como una variable (no como signo de la potencia del continuo)

Traduccion Andres Sestier Bouclier

Pero se sabe que $1 \leq \overline{\overline{\underset{\mathfrak{r}}{\mathrm{E}}[1 \leq \mathfrak{r} < \mathfrak{b}]}} \leq \mathfrak{b} \leq \aleph_{p(\alpha)}$; además, en virtud de los lemas 1^a y 4^a, $\aleph_{p(\alpha)} \leq \aleph_\alpha$; por tanto

$$1 \leq \overline{\overline{\underset{\mathfrak{r}}{\mathrm{E}}[1 \leq \mathfrak{r} < b]}} \leq \aleph_\alpha. \tag{2}$$

Con ayuda del conocido teorema de la aritmética de los números cardinales (de acuerdo con el cual $\aleph_\alpha \cdot \mathfrak{a} = \aleph_\alpha$ para $1 \leq \mathfrak{a} \leq \aleph_\alpha$), se obtiene, de (1) y (2): $\aleph_\alpha^{\smile^{\mathfrak{b}}} = \aleph_\alpha$, l.q.q.d.

La demostración de ^{b}) es análoga.

^{c}) Si $\beta = 0$, en virtud de los lemas 1^b y 4^a $cf(\beta) = \beta = p(\beta)$, por tanto, de conformidad con el lema 6^a, $\aleph_\beta^{\smile^{\aleph_{cf(\beta)}}} = \aleph_\beta^{\smile^{\aleph_{p(\beta)}}} = \aleph_\beta$, de donde en razón del lema 5^d $\mathfrak{a}^{\smile^{\aleph_\beta}} \geq \aleph_\beta = \aleph_\beta^{\smile^{\aleph_{p(\beta)}}}$.

Si β es de primera especie, se obtiene con ayuda del lema 6^b: $\mathfrak{a}^{\smile^{\aleph_\beta}} = \mathfrak{a}^{\aleph_{\beta-1}} \geq 2^{\aleph_{\beta-1}} = (2^{\aleph_{\beta-1}})^{\aleph_{\beta-1}} \geq \aleph_\beta^{\aleph_{\beta-1}} = \aleph_\beta^{\smile^{\aleph_\beta}}$; pero como $cf(\beta) = \beta$ (lema 1^b), se tiene finalmente $\mathfrak{a}^{\smile^{\aleph_\beta}} \geq \aleph_\beta^{\smile^{\aleph_{cf(\beta)}}}$.

Queda por examinar el caso donde β es un número de segunda especie $\neq 0$. Como es sabido [1]), en este caso se tiene

$$\aleph_\beta^{\aleph_\xi} = \sum_{\eta<\beta} \aleph_\eta^{\aleph_\xi} = \sum_{\eta\leq\xi} \aleph_\eta^{\aleph_\xi} + \sum_{\xi<\eta<\beta} \aleph_\eta^{\aleph_\xi} \qquad para\ todo \qquad \xi < cf(\beta). \tag{3}$$

Si $\eta \leq \xi$, se tiene notoriamente $\aleph_\eta^{\aleph_\xi} = 2^{\aleph_\xi}$, de donde $\sum_{\eta\leq\xi} \aleph_\eta^{\aleph_\xi} \leq 2^{\aleph_\xi} \cdot \overline{\overline{\xi+1}} \leq 2^{\aleph_\xi} \cdot \aleph_\xi = 2^{\aleph_\xi}$; si por el contrario $\xi < \eta$, se obtiene: $\aleph_\eta^{\aleph_\xi} \leq \aleph_\eta^{\aleph_\eta} = 2^{\aleph_\eta}$. Tomando en cuenta el lema 1^a, se deduce, según (3):

$$\aleph_\beta^{\aleph_\xi} \leq 2^{\aleph_\xi} + \sum_{\xi<\eta<\beta} 2^{\aleph_\eta} \leq \sum_{\eta<\beta} 2^{\aleph_\eta} \qquad para \qquad \xi < cf(\beta). \tag{4}$$

Según la definición 4: $2^{\smile^{\aleph_\beta}} \geq \sum_{\eta<\beta} 2^{\aleph_\eta}$, de donde, en virtud de (4), $\aleph_\beta^{\aleph_\xi} \leq 2^{\smile^{\aleph_\beta}}$ para $\xi < cf(\beta)$; por otro lado el lema 5^d proporciona: $\aleph_\beta^{\mathfrak{r}} = \aleph_\beta \leq 2^{\smile^{\aleph_\beta}}$ para $0 < \mathfrak{r} < \aleph_0$. Por consiguiente, se tiene en general:

$$\aleph_\beta^{\mathfrak{r}} \leq 2^{\smile^{\aleph_\beta}} \qquad para \qquad \mathfrak{r} < \aleph_{cf(\beta)}. \tag{5}$$

Con ayuda de la definición 4, de (5) obtenemos:

$$\aleph_\beta^{\smile^{\aleph_{cf(\beta)}}} = \sum_{\mathfrak{r}<\aleph_{cf(\beta)}} \aleph_\beta^{\mathfrak{r}} \leq 2^{\smile^{\aleph_\beta}} \cdot \aleph_{cf(\beta)}. \tag{6}$$

[1]Ver mi nota *Algunos Teoremas sobre los álef*, Fund. Math. VII, pág.7

MEXICO
Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

Dado que $\aleph_{cf(\beta)} \leq \aleph_\beta \leq 2^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$ (lema 1^a y 5^d), tenemos $2^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \cdot \aleph_{cf(\beta)} = 2^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$, de donde, y en virtud de (6)

$$\aleph_\beta^{\underset{\smile}{\aleph_{cf(\beta)}}} \leq 2^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}. \tag{7}$$

Como por hipótesis $\mathfrak{a} \geq 2$, se obtiene del lema 5^b:

$$\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \geq 2^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}. \tag{8}$$

Resulta de (7) y (8) inmediatamente que en el caso considerado se tiene igualmente la fórmula buscada:

$$\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \geq \aleph_\beta^{\underset{\smile}{\aleph_{cf(\beta)}}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Así queda completamente demostrado el lema 6.

Lema 7. ^{a}) *Si* $\mathfrak{a} \geq 2$ *y* $\gamma < cf(\beta)$, *se tiene* $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$;

^{b}) *Si* $\mathfrak{a} \geq 2$ *y* $cf(\beta) \leq \gamma \leq \beta$, *se tiene* $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$;

^{c}) *Si* $\mathfrak{a} \geq 2$ *y* $\beta \leq \gamma$, *se tiene* $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} = \mathfrak{a}^{\aleph_\gamma}$;

Demostración. a) En virtud del lema 1^a la desigualdad $\gamma < cf(\beta)$, admitida por hipótesis, implica $\gamma < \beta$, por tanto $1 \leq \beta$. Con ayuda de los lemas 5^b y 6^b se concluye de aquí que $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_1}} + \sum_{1 \leq \xi < \beta} \mathfrak{a}^{\aleph_\xi} = \mathfrak{a}^{\aleph_0} + \sum_{1 \leq \xi < \beta} \mathfrak{a}^{\aleph_\xi}$, de donde

$$\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} = \sum_{\xi < \beta} \mathfrak{a}^{\aleph_\xi}. \tag{1}$$

Dados números ordinales ξ y η, ponemos:

$$\aleph_{(\xi,\eta)} = \aleph_\xi; \tag{2}$$

de (1) y (2) obtenemos:

$$(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} = \left(\sum_{\xi < \beta} \mathfrak{a}^{\aleph_\xi} \right)^{\aleph_\gamma} = \prod_{\eta < \omega_\gamma} \sum_{\xi < \beta} \mathfrak{a}^{\aleph_{(\xi,\eta)}} \tag{3}$$

(4) Sea Φ, *la clase de todas las sucesiones de números ordinales* φ *del tipo* ω_γ *que cumplen la condición:* $\varphi_\eta < \beta$ *para* $\eta < \omega_\gamma$.

Aplicando la ley distributiva general (de adición y de multiplicación de los números cardinales), se deduce de (3) y (4) que

$$(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} = \sum_{\varphi \in \Phi} \prod_{\eta < \omega_\gamma} \mathfrak{a}^{\aleph_{(\varphi_\eta, \eta)}}. \tag{5}$$

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Teniendo en cuenta (2), concluimos de (5) que

$$\left(\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}}\right)^{\aleph_\gamma} = \sum_{\varphi\in\Phi}\prod_{\eta<\omega_\gamma}\mathfrak{a}^{\aleph_{\varphi_\eta}} = \sum_{\varphi\in\Phi}\mathfrak{a}^{\sum\limits_{\eta<\omega_\gamma}\aleph_{\varphi_\eta}} \tag{6}$$

Se tiene por hipótesis $\overline{\overline{\underset{\eta}{\mathrm{E}}[\eta<\omega_\gamma]}} = \aleph_\gamma < \aleph_{cf(\beta)}$; según (4) $\aleph_{\varphi_\eta} < \aleph_\beta$, cuando $\eta < \omega_\gamma$ y $\varphi \in \Phi$. Poniendo entonces en el lema 3^a: $\alpha = \beta$, $B = \underset{\eta}{\mathrm{E}}[\eta < \omega_\gamma]$ y $\mathfrak{f}(\eta) = \aleph_{\varphi_\eta}$, se alcanza la conclusión $\sum\limits_{\eta<\omega_\gamma}\aleph_{\varphi_\eta} < \aleph_\beta$, de donde en virtud de (1)

$$\mathfrak{a}^{\sum_{\eta<\omega_\gamma}\aleph_{\varphi_\eta}} \le \mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}} \quad \mathit{para} \quad \varphi\in\Phi. \tag{7}$$

Se debe observar además que según la definición conocida de la exponenciación de los números cardinales y en razón de (4) la clase Φ es de potencia $\overline{\overline{(\beta)}}^{\aleph_\gamma} \le \aleph_\beta^{\aleph_\gamma}$; como además $\aleph_\gamma < \aleph_{cf(\beta)}$, se obtiene de conformidad con la definición 4:

$$\overline{\overline{\Phi}} \le \aleph_\beta^{\overset{\aleph_{cf(\beta)}}{\smile}}. \tag{8}$$

Las fórmulas (6)-(8) implican que

$$(\aleph^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\aleph_\gamma} \le \mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}}\cdot\aleph_\beta^{\overset{\aleph_{cf(\beta)}}{\smile}}. \tag{9}$$

Resulta del lema 6^c que $\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}} \ge \aleph_\beta^{\overset{\aleph_{cf(\beta)}}{\smile}}$; por consiguiente (9) conduce a: $(\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\aleph_\gamma} \le \mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}}$. Como la desigualdad inversa es evidente, se tiene finalmente:

$$(\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\aleph_\gamma} = \mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

^{b}) De acuerdo con el lema 2^a existe una sucesión de números cardinales $\mathfrak{f}$ del tipo $\omega_{cf(\beta)}$ que verifica las fórmulas:

$$\aleph_\beta = \sum_{\xi<\omega_{cf(\beta)}}\mathfrak{f}_\xi \quad y \quad 0 < \mathfrak{f}_\xi < \aleph_\beta \quad \mathit{para} \quad \xi < \omega_{cf(\beta)}. \tag{10}$$

Se obtiene fácilmente de (10):

$$\mathfrak{a}^{\aleph_\beta} = \prod_{\xi<\omega_{cf(\beta)}}\mathfrak{a}^{\mathfrak{f}_\xi} \tag{11}$$

y, en virtud de la definición 4,

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{f}_\xi} \le \mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}} \quad \mathit{para} \quad \xi < \omega_{cf(\beta)}. \tag{12}$$

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Como además, de acuerdo con la hipótesis del lema, $\overline{\overline{\underset{\xi}{E}[\xi < \omega_{cf(\beta)}]}} = \aleph_{cf(\beta)} \leq \aleph_\gamma$, las fórmulas (11) y (12) dan inmediatamente:

$$\mathfrak{a}^{\aleph_\beta} \leq (\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\aleph_\gamma}. \tag{13}$$

Por otra parte, resulta de los lemas 5^a y 6^b que $\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}} \leq \mathfrak{a}^{\overset{\aleph_{\beta+1}}{\smile}} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$, de donde $(\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\aleph_\gamma} \leq (\mathfrak{a}^{\aleph_\beta})^{\aleph_\gamma} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta \cdot \aleph_\gamma}$; como además, por hipótesis se tiene $\aleph_\gamma \leq \aleph_\beta$, se concluye que

$$(\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\aleph_\gamma} \leq \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}. \tag{14}$$

Las desigualdades (13) y (14) de inmediato implican la fórmula buscada: $(\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\aleph_\gamma} \leq \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$.

^{c}) Poniendo en la identidad ^{b}) ya establecida anteriormente $\gamma = \beta$ y teniendo en cuenta el lema 1^a, se concluye que $(\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\aleph_\beta} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$, de donde, para todo γ, $(\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\aleph_\beta \cdot \aleph_\gamma} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta \cdot \aleph_\gamma}$. Luego, si $\beta \leq \gamma$, obtenemos ahí mismo:

$$(\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\aleph_\gamma} = \mathfrak{a}^{\aleph_\gamma} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Lema 8. ^{a}) *Si* $\mathfrak{a} \geq 2$ *y* $\gamma \leq cf(\beta)$, *se tiene* $(\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\overset{\aleph_\gamma}{\smile}} = \mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}}$.
^{b}) *Si* $\mathfrak{a} \geq 2$ *y* $cf(\beta) < \gamma \leq \beta + 1$, *se tiene* $(\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\overset{\aleph_\gamma}{\smile}} = \mathfrak{a}^{\overset{\aleph_{\beta+1}}{\smile}} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$;
^{c}) *Si* $\mathfrak{a} \geq 2$ *y* $\beta < \gamma$, *se tiene* $(\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\overset{\aleph_\gamma}{\smile}} = \mathfrak{a}^{\aleph_\gamma}$.

Demostración. a) De conformidad con el lema 7^a se tiene $(\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\mathfrak{r}} = \mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}}$ para $\aleph_0 \leq \mathfrak{r} < \aleph_\gamma \leq \aleph_{cf(\beta)}$; como además, en virtud del lema 5^d, $\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}}$ es un número transfinito, esta igualdad subsiste también en el caso en que $0 < \mathfrak{r} < \aleph_0$. Por consiguiente, se obtiene con ayuda de la definición 4:

$$(\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\overset{\aleph_\gamma}{\smile}} = \sum_{\mathfrak{r}<\aleph_\gamma} (\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\mathfrak{r}} = \sum_{0<\mathfrak{r}<\aleph_\gamma} (\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\mathfrak{r}} = \mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}} \cdot \overline{\overline{\underset{\mathfrak{r}}{E}[0 < \mathfrak{r} < \aleph_\gamma]}}. \tag{1}$$

Por otro lado se sabe que $1 \leq \overline{\overline{\underset{\mathfrak{r}}{E}[0 < \mathfrak{r} < \aleph_\gamma]}} \leq \aleph_\gamma$; como se tiene además por hipótesis que $\aleph_\gamma \leq \aleph_{cf(\beta)}$ y, en virtud de los lemas 1^a y 5^d, $\aleph_{cf(\beta)} \leq \aleph_\beta \leq \mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}}$, se concluye que

$$1 \leq \overline{\overline{\underset{\mathfrak{r}}{E}[0 < \mathfrak{r} < \aleph_\gamma]}} \leq \mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}}. \tag{2}$$

Las fórmulas (1) y (2) de inmediato dan: $(\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\overset{\aleph_\gamma}{\smile}} = \aleph^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}}$, l.q.q.d.
^{b}) Poniendo en el lema 7^b: $\gamma = cf(\beta)$ y luego $\gamma = \beta$, se tiene:

$$(\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\aleph_{cf(\beta)}} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta} = (\mathfrak{a}^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}})^{\aleph_\beta}. \tag{3}$$

Teniendo en cuenta la fórmula: $cf(\beta) < \gamma \leq \beta + 1$, admitida por hipótesis, es fácil concluir a partir de los lemas 5^a y 6^b:

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

$$(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_{cf(\beta)}} = (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_{cf(\beta)+1}}} \leq (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} \leq (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta+1}}} = (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\beta}. \tag{4}$$

Además el lema 6^b da:

$$\mathfrak{a}^{\aleph_\beta} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta+1}}}. \tag{5}$$

Las fórmulas (3)-(5) inmediantamente implican la identidad buscada: $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta+1}}} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$.

^{c}) Por hipótesis se tiene $\aleph_{\beta+1} \leq \aleph_\gamma$; en virtud de los lemas 5^a y 6^b se obtiene: $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta+1}}} + \sum_{\beta+1\leq\xi<\gamma} \mathfrak{a}^{\aleph_\xi} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta} + \sum_{\beta<\xi<\gamma} \mathfrak{a}^{\aleph_\xi}$, de donde

$$\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} = \sum_{\beta\leq\xi<\gamma} \mathfrak{a}^{\aleph_\xi}. \tag{6}$$

Análogamente se llega a la fórmula:

$$(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} = \sum_{\beta\leq\xi<\gamma} (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\xi}. \tag{7}$$

El lema 7^c implica además que

$$(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\xi} = \mathfrak{a}^{\aleph_\xi} \qquad \text{para} \qquad \beta \leq \xi \tag{8}$$

De (6)-(8) se deduce inmediatamente la fórmula

$$(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}}, \qquad \text{l.q.q.d.}$$

En los dos lemas anteriores hemos establecido ciertas simplificaciones de las expresiones $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma}$ y $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}}$ para diversos valores de β y γ. En lo que toca a la expresión $(\mathfrak{a}^{\aleph_\beta})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}}$, el problema análogo no conlleva dificultades, por el lema 6^b; dejemos que el lector formule el teorema correspondiente.

En una parte de este trabajo la siguiente hipótesis **H** tendrá que jugar un papel esencial; esta hipótesis, llamada *hipótesis de Cantor* sobre los *alefs* o *hipótesis del continuo generalizada*, hasta hoy, como es sabido, no ha sido demostrada, ni refutada.

Hipótesis H *Para todo número ordinal α se cumple $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.*

Entre las muchas consecuencias de esta hipótesis, conocidas hasta ahora, sólo hay dos que son importantes para nuestras consideraciones, sin embargo, como veremos, ambas consecuencias son equivalentes a la misma hipótesis.

Lema 9. *La hipótesis* **H** *equivale a cada una de las proposiciones siguientes:*
^{a}*) Para todo número ordinal α se tiene $2^{\underset{\smile}{\aleph_\alpha}} = \aleph_\alpha$;*
^{b}*) Para cada número ordinal α se cumple $p(\alpha) = cf(\alpha)$.*

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Demostración. I. Supongamos que la hipótesis **H** es verdadera. En virtud del lema 5^a (para $\mathfrak{a} = 2$, $\mathfrak{b} = \aleph_0$ y $\mathfrak{c} = \aleph_\alpha$) se tiene que $2^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_0} + \sum_{\xi<\alpha} 2^{\aleph_\xi}$, luego, conforme a la definición 4 y la hipótesis H, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_0 + \sum_{\xi<\alpha} \aleph_{\xi+1} = \aleph_\alpha$. Por lo tanto

$$\textit{La hipótesis } \mathbf{H} \textit{ implica a la condición } {}^{a}) \tag{1}$$

II. Admitamos ahora la proposición ^{a}).

En razón del lema 7^a (para $\mathfrak{a} = 2$) es válida para todo $\xi < cf(\alpha)$, $(2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\xi} = 2^{\aleph_\alpha}$, de donde conforme a la proposición ^{a}) $\aleph_\alpha^{\aleph_\xi} = \aleph_\alpha$; utilizando el lema 4^c se obtiene esta desigualdad: $\xi < p(\alpha)$. Hemos mostrado así que la fórmula: $\xi < cf(\alpha)$ implica siempre: $\xi < p(\alpha)$ y concluimos que $cf(\alpha) \leq p(\alpha)$. La desigualdad inversa: $p(\alpha) \leq cf(\alpha)$ se estableció en el lema 4^a; por lo tanto, $p(\alpha) = cf(\alpha)$ para todo número α.

Este razonamiento demuestra que

$$\textit{la condición } {}^{a}) \textit{ implica a la condición } {}^{b}). \tag{2}$$

III. Admitamos finalmente que la condición ^{b}) se cumple.

De acuerdo con el lema 1^b, $cf(\alpha + 1) = \alpha + 1$, donde según la condición ^{b}) $p(\alpha + 1) = \alpha + 1$. Por consiguiente $\alpha < p(\alpha + 1)$, lo que dá en virtud del lema 4^c: $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha}$. También se tiene $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha}$ (puesto que $2^{\aleph_\alpha} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha} \leq (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$) y obtenemos: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, independientemente del número α.

Así hemos probado que

$$\textit{la condición } {}^{b}) \textit{ implica a la hipótesis } \mathbf{H}. \tag{3}$$

En razón de (1)-(3) el lema (9) queda plenamente demostrado.

El enunciado de la proposición 9^b se diferencia sólo por su forma externa de otra consecuencia de la hipótesis de Cantor:

$$\textit{si } \beta < cf(\alpha), \textit{ se tiene } \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha,$$

que informé en mis notas anteriores y demostré de manera un poco diferente[1]. Sin embargo, la forma actual de la hipótesis 9^b me fue gentilmente comunicada por el Sr. Zermelo en 1928.

Definición 5. ^{a}) $\mathbf{U}(A) = \underset{X}{E}[X \subset A]$;

^{b}) $\mathbf{U}_\alpha(A) = \underset{X}{E}[X \subset A \text{ y } \overline{\overline{X}} < \aleph_\alpha]$;

^{c}) $\boldsymbol{V}(A) = \underset{X}{E}[A \subset X]$.

[1] Véase mi nota citada en la Fund. Math. VII, pág. 9-10, y mi artículo: sobre la descomposición de los conjuntos en subconjuntos casi disjuntos, Fund. Math. XII, pág. 202

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

Lema 10. *a)* $\overline{\overline{\mathbf{U}(A)}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$;

b) *si* $\overline{\overline{A}} \geq \aleph_\alpha$, *se tiene* $\overline{\overline{\mathbf{U}_\alpha(A)}} = (\overline{\overline{A}})^{\underset{\smile}{\aleph_\alpha}}$ *y* $\overline{\overline{\mathbf{U}_{\alpha+1}(A)}} = \overline{\overline{\mathbf{U}_{\alpha+1}(A) - \mathbf{U}_\alpha(A)}} = (\overline{\overline{A}})^{\aleph_\alpha}$

c) $\overline{\overline{\mathbf{U}_\alpha(A)}} \leq (\overline{\overline{A}})^{\underset{\smile}{\aleph_\alpha}}$

d) *Si* $\overline{\overline{A}} = \aleph_\alpha$ *y* $\beta \leq p(\alpha)$, *se tiene* $\overline{\overline{\mathbf{U}_\beta(A)}} = \aleph_\alpha$.

Demostración.

a) Es el enunciado del teorema conocido de Cantor.

b) se basa en un teorema conocido, por el cual

$$\textit{Sea } A \textit{ un conjunto infinito, si}^1,\ \overline{\overline{A}} \geq \mathfrak{b},\ \textit{se tiene}\ \overline{\overline{\underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset A \ \ y \ \ \overline{\overline{X}} = \mathfrak{b}]}} = (\overline{\overline{(A)}})^{\mathfrak{b}} \tag{1}$$

Aquí está el esquema de la prueba del teorema mencionado. Sea:

$$\overline{\overline{\underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset A \ \ y \ \ \overline{\overline{X}} = \mathfrak{b}]}} = \mathfrak{c}$$

La definición de la exponenciación de los números cardinales fácilmente implica que cualquier conjunto de potencia $(\overline{\overline{A}})^{\mathfrak{b}}$ puede dividirse en $\mathfrak{c}$ conjuntos disjuntos; usando el axioma de elección se obtiene: $\mathfrak{c} \leq (\overline{\overline{A}})^{\mathfrak{b}}$. Por otra parte, salvo en el caso trivial $\mathfrak{b} = 0$, la desigualdad $\overline{\overline{A}} \geq \mathfrak{b}$ trae consigo $(\overline{\overline{A}}) = \overline{\overline{A}} \cdot \mathfrak{b}$; utilizando la definición de la multiplicación de los números cardinales, fácilmente se llega a la conclusión de que cualquier conjunto de potencia $\overline{\overline{A}} \cdot \mathfrak{b}$, en particular el conjunto A, admiten por lo menos $(\overline{\overline{A}})^{\mathfrak{b}}$ subconjuntos de la potencia $\mathfrak{b}$, por lo tanto, $\mathfrak{c} \geq (\overline{\overline{A}} \cdot \mathfrak{b})^{\mathfrak{b}} = (\overline{\overline{A}})^{\mathfrak{b}}$. Si juntamos las dos desigualdades , se obtiene de inmediato:

$$\overline{\overline{\underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset A \ \ y \ \ \overline{\overline{X}} = \mathfrak{b}]}} = \mathfrak{c} = (\overline{\overline{A}})^{\mathfrak{b}} \quad \texttt{l.q.q.d.}$$

Ahora, se sigue de la definición 5^b que $\mathbf{U}_\alpha(A) = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset A \ \ y \ \ \overline{\overline{X}} < \aleph_\alpha] = \sum_{\mathfrak{r}<\aleph_\alpha}(\underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset A \ \ y \ \ \overline{\overline{X}} = \mathfrak{r}])$; siendo disjuntos los sumandos de la última suma, se concluye que

$$\overline{\overline{\mathbf{U}_\alpha(A)}} = \sum_{\mathfrak{r}<\aleph_\alpha} \overline{\overline{\underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset A \ \ y \ \ \overline{\overline{X}} = \mathfrak{r}]}}. \tag{2}$$

Como por hipótesis: $\overline{\overline{A}} \geq \aleph_\alpha$, las condiciones (1) y (2) dan: $\overline{\overline{\mathbf{U}_\alpha(A)}} = \sum_{\mathfrak{r}<\aleph_\alpha}(\overline{\overline{A}})^{\mathfrak{r}}$, por lo tanto, conforme a la definición 4:

Traduccion. Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

$$\overline{\overline{\mathbf{U}_\alpha(A)}} = (\overline{\overline{A}})^{\overset{\aleph_\alpha}{\smile}}. \tag{3}$$

De manera similar se obtiene la igualdad: $\overline{\overline{\mathbf{U}_{\alpha+1}(A)}} = ((\overline{\overline{A}}))^{\overset{\aleph_{\alpha+1}}{\smile}}$ y se sigue por aplicacion del lema 6^b:

$$\overline{\overline{\mathbf{U}_{\alpha+1(A)}}} = (\overline{\overline{A}})^{\aleph_\alpha}. \tag{4}$$

Por último, se obtiene fácilmente de la definición 5^b que $\mathbf{U}_{\alpha+1} - \mathbf{U}_\alpha(A) = \underset{X}{E}[X \subset A \;\; y \;\; \overline{\overline{X}} = \aleph_\alpha]$, donde debido a (1):

$$\overline{\overline{\mathbf{U}_{\alpha+1}(A) - \mathbf{U}_\alpha(A)}} = (\overline{\overline{A}})^{\aleph_\alpha}. \tag{5}$$

En virtud, de (3)-(5) todas las fórmulas ^{b}) quedan establecidas.

^{c}) En el caso en que $\overline{\overline{A}} \geqslant \aleph_\alpha$ la fórmula: $\overline{\overline{\mathbf{U}_\alpha(A)}} \leq (\overline{\overline{A}})^{\overset{\aleph_\alpha}{\smile}}$ se deduce inmediatamente de ^{b}). Si por el contrario $\overline{\overline{A}} < \aleph_\alpha$, se sigue de acuerdo con la definición $5^{a,b}$ y el lema 10^a (se omite el caso evidente donde $\overline{\overline{A}} < 2$): $\overline{\overline{\mathbf{U}_\alpha(A)}} \leq \overline{\overline{\mathbf{U}(A)}} = 2^{\overline{\overline{A}}} \leq (\overline{\overline{A}})^{\overline{\overline{A}}} \leq \sum_{\mathfrak{r}<\aleph_\alpha} (\overline{\overline{A}})^{\mathfrak{r}}$, de donde conforme a la definición 4, $\overline{\overline{\mathbf{U}_\alpha(A)}} \leq (\overline{\overline{A}})^{\overset{\aleph_\alpha}{\smile}}$, l.q.q.d.

^{d}) Por los lemas 1^a y 4^a la desigualdad: $\beta \leq p(\alpha)$ implica: $\aleph_\beta \leq \aleph_\alpha = \overline{\overline{A}}$; por lo tanto, poniendo en ^{b}): $\alpha = \beta$, se conluye que $\overline{\overline{\mathbf{U}_\beta(A)}} = (\overline{\overline{A}})^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}} = \aleph_\alpha^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}}$. A través de la aplicacion del lema 6^a obtenemos la fórmula buscada:

$$\overline{\overline{\mathbf{U}_\beta(A)}} = \aleph_\alpha.$$

Definición 6. $\overline{f}(A) = E_{f(x)}[x \in A]$ *(suponiendo que la función f se define para todos los elementos del conjunto A).*

El conjunto $\overline{f}(A)$ se suele llamar la imagen del conjunto A dada por la función f. Varios teoremas elementales sobre las imágenes de conjuntos han sido publicadas previamente [1]). Voy a establecer unas cuantas relaciones menos conocidas entre las potencias de los conjuntos y las de sus imágenes.

Lema 11. ^{a}) $\overline{\overline{\overline{f}(A)}} \leq \overline{\overline{A}}$;

^{b}) *si* $\overline{\overline{A \cdot \underset{x}{E}[f(x) = y]}} \leq \mathfrak{b}$ *para todo elemento* y *de* $\overline{f}(A)$, *se tiene* $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{\overline{f}(A)}} \cdot \mathfrak{b}$;

^{c}) *Si* $\overline{\overline{A}} \geq \aleph_0$ *y si* $\overline{\overline{A \cdot \underset{x}{E}[f(x) = y]}} \leq \mathfrak{b} < \overline{\overline{A}}$ *para todo elemento* y *de* $\overline{f}(A)$, *se tiene* $\overline{\overline{\overline{f}(A)}} = \overline{\overline{A}}$;

[1] Veáse p. ej. A. N. Whitehead y B. Russell, *Principia Mathematica*, vol. I, 2da. Ed., Cambridge 1925, *37. *40 y *72

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

d) Si $\overline{\overline{A}} = \aleph_\alpha$ y si $\overline{\overline{A \cdot \underset{x}{E}[f(x) = y]}} < \overline{\overline{A}}$ para todo elemento y de $\overline{f}(A)$, se tiene $\overline{\overline{\overline{f}(A)}} \geq \aleph_{cf(\alpha)}$; si además $cf(\alpha) = \alpha$, se tiene $\overline{\overline{\overline{f}(A)}} = \aleph_\alpha = \overline{\overline{A}}$.

Demostración. Escribimos para todo elemento y

$$G(y) = A \cdot \underset{x}{E}[f(x) = y]. \tag{1}$$

Utilizando la definición 6 se deducen fácilmente de (1) las propiedades de la función G siguientes:

$$G(y) \neq 0 \ \ para \ \ y \in \overline{f}(A); \tag{2}$$

$$si \ \ G(y) \cdot G(z) \neq 0, se\ tiene\ y = z\ y\ G(y) = G(z). \tag{3}$$

En virtud de (2) y de (3) la función G transforma de una manera biunívoca el conjunto $\overline{f}(A)$ en la clase $\overline{G}(\overline{f}(A)) = \underset{G(y)}{E}[y \in \overline{f}(A)]$; estos conjuntos son, pues, de igual potencia:

$$\overline{\overline{\overline{f}(A)}} = \overline{\overline{\overline{G}(\overline{f}(A))}}. \tag{4}$$

Debido a (1) y a la definición 6, podemos fácilmente obtener la siguiente descomposición para A:

$$A = \sum_{y \in \overline{f}(A)} G(y); \tag{5}$$

según (2) y (3) los sumandos de esta descomposición son disjuntos no vacíos, se concluye con el axioma de elección que $\overline{\overline{\overline{G}(\overline{f}(A))}} = \overline{\overline{\underset{G(y)}{E}[y \in \overline{f}(A)]}} \leq \overline{\overline{A}}$, por lo tanto, por (4)

$$\overline{\overline{\overline{f}(A)}} \leq \overline{\overline{A}}. \tag{6}$$

La fórmula (5) da más (según un teorema conocido de la teoría de la igualdad de potencias):

$$si \ \overline{\overline{G(y)}} \leq \mathfrak{b} \ para \ \ y \in \overline{f}(A), \ se\ tiene \ \ \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{\overline{f}(A)}} \cdot \mathfrak{b}. \tag{7}$$

Supongamos ahora que $\overline{\overline{A}} \geq \aleph_0$ y que $\overline{\overline{G(y)}} \leq \mathfrak{b} < \overline{\overline{A}}$ para $y \in \overline{f}(A)$. Si tuvieramos $\overline{\overline{\overline{f}(A)}} < \overline{\overline{A}}$, usando los teoremas conocidos de aritmética de los números cardinales obtendríamos: $\overline{\overline{\overline{f}(A)}} \cdot \mathfrak{b} < \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$, esto contradice claramente la condición (7); por lo tanto, en virtud de (6), $\overline{\overline{\overline{f}(A)}} = \overline{\overline{A}}$. Por lo tanto:

$$si \ \overline{\overline{A}} \geq \aleph_0 \ \ y \ \ \overline{\overline{G(y)}} \leq \mathfrak{b} < A \ para\ y \in \overline{f}(A), \ se\ tiene\ \overline{\overline{\overline{f}(A)}} = \overline{\overline{A}}. \tag{8}$$

Supongamos: $\overline{\overline{A}} = \aleph_\alpha$ y $\overline{\overline{G(y)}} < \overline{\overline{A}}$ para $y \in \overline{f}(A)$. Sustituyendo B por $\overline{f}(A)$ y F por G en el lema 3^b y teniendo en cuenta (5) es fácil deducir que la desigualdad $\overline{\overline{\overline{f}(A)}} < \aleph_{cf(\alpha)}$ implica una contradicción. Por lo tanto, $\overline{\overline{\overline{f}(A)}} \geq \aleph_{cf(\alpha)}$; si además se tiene $cf(\alpha) = \alpha$, se obtiene de (6) lo siguiente: $\overline{\overline{\overline{f}(A)}} = \aleph_\alpha = \overline{\overline{A}}$. Así, hemos demostrado que

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

si $\overline{\overline{A}} = \aleph_\alpha$ *y* $\overline{\overline{G(y)}} < \overline{\overline{A}}$ *para* $y \in \bar{f}(A)$ *se tiene* $\overline{\overline{\bar{f}(A)}} \geq \aleph_{cf(\alpha)}$; *si además* $cf(\alpha) = \alpha$, *ocurre* $\overline{\overline{\bar{f}(A)}} = \aleph_\alpha = \overline{\overline{A}}$. (9)

Mediante la unión de las condiciones (6) - (9) con la fórmula (1) se verá que el lema en cuestión está plenamente demostrado.

Para concluir esta sección voy a extender la noción de *límite inferior, límite superior* y la de límite de las sucesiones infinitas de conjuntos del tipo ω *a las sucesiones de conjuntos de tipo arbitrario.*

Definición 7. ^{a}) $\underline{\lim}_{\xi<\alpha} F_\xi = \sum_{\xi<\alpha} \prod_{\xi\leq\eta<\alpha} F_\eta$;

^{b}) $\overline{\lim}_{\xi<\alpha} F_\xi = \sum_{\xi<\alpha} \prod_{\xi\leq\eta<\alpha} F_\eta$;

^{c}) *La sucesión de conjuntos* F *del tipo* α *es convergente, y el* $\lim_{\xi<\alpha} F_\xi = A$, *cuando* $\underline{\lim}_{\xi<\alpha} F_\xi = \overline{\lim}_{\xi<\alpha} F_\xi = A$.

Varias propiedades elementales de los conceptos definidos anteriormente se obtendrán por medio de generalizaciones fáciles de teoremas conocidos sobre los límites de sucesiones infinitas de tipo[1] ω.

Por lo tanto, me limito a establecer algunas fórmulas que, hasta donde yo sé, han sido hasta ahora señaladas en ninguna parte, incluso para las sucesiones infinitas ordinarias.

Lema 12. ^{a}) $\underline{\lim}_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot G_\xi) \subset \underline{\lim}_{\xi<\alpha} F_\xi \cdot \overline{\lim}_{\xi<\alpha} G_\xi \subset \overline{\lim}_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot G_\xi)$;

^{b}) *si las sucesiones de conjuntos* G_ξ *y* $F_\xi \cdot G_\xi$ *del tipo* α *son convergentes, la sucesión de conjuntos* $F_\xi \cdot \lim_{\xi<\alpha} G_\xi$ *es convergente y* $\lim_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot \lim_{\xi<\alpha} G_\xi) = \lim_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot G_\xi)$.

Demostración. De la definición $7^{a,b}$ que[2]) $\underline{\lim}_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot G_\xi) \subset \underline{\lim}_{\xi<\alpha} F_\xi$ y $\underline{\lim}_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot G_\xi) \subset \underline{\lim}_{\xi<\alpha} G_\xi \subset \overline{\lim}_{\xi<\alpha} G_\xi$, por lo tanto,

$$\underline{\lim}_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot G_\xi) \subset \underline{\lim}_{\xi<\alpha} F_\xi \cdot \overline{\lim}_{\xi<\alpha} G_\xi. \tag{1}$$

Por otra parte, como es fácil ver, ξ y ξ_1 siendo dos números ordinales tales que $\xi \leq \xi_1 < \alpha$, se tiene $\prod_{\xi\leq\eta<\alpha} F_\eta \cdot \sum_{\xi_1\leq\eta<\alpha} G_\eta \subset \sum_{\xi_1\leq\eta<\alpha} (F_\eta \cdot G_\eta)$, por lo tanto, a fortiori,

$$\prod_{\xi\leq\eta<\alpha} F_\eta \cdot \overline{\lim}_{\eta<\alpha} G_\eta = \prod_{\xi\leq\eta<\alpha} F_\eta \cdot \prod_{\xi<\alpha} \sum_{\xi\leq\eta<\alpha} (G_\eta) \subset \sum_{\xi_1\leq\eta<\alpha} (F_\xi \cdot G_\eta).$$

En consecuencia, para todo número $\zeta < \alpha$ (no necesariamente $\geq \xi$) se concluye: $\prod_{\xi\leq<\alpha} F_\eta \cdot$

[1]Veáse por ejemplo W. Sierpinski, op. citus, págs. 16-18.
[2]Estas son generalizaciones de las fórmulas conocidas de secesiones infinitas ordinarias (veáse nota anterior)

Traducción: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

$\overline{\lim\limits_{\eta<\alpha}}G_\eta \subset \sum\limits_{\zeta\leq<\alpha}(F_\eta \cdot G_\eta)$; entonces, se obtiene: $\sum\limits_{\xi<\alpha}\prod\limits_{\xi\leq\eta<\alpha} F_\eta \cdot \overline{\lim\limits_{\eta<\alpha}}G_\eta \subset \prod\limits_{\zeta<\eta<\alpha}\sum\limits_{\zeta\leq\alpha}(F_\eta \cdot G_\eta)$, lo que permite enunciar rápidamente la fórmula:

$$\underline{\lim_{\xi<\alpha}} F_\xi \cdot \overline{\lim_{\xi<\alpha}} G_\xi \subset \overline{\lim_{\xi<\alpha}}(F_\xi \cdot G_\xi). \tag{2}$$

Con las inclusiones (1) y (2) obtendremos la fórmula deseada ^{a}), es decir:

$$\underline{\lim_{\xi<\alpha}}(F_\xi \cdot G_\xi) \subset \underline{\lim_{\xi<\alpha}} F_\xi \cdot \overline{\lim_{\xi<\alpha}} G_\xi \subset \overline{\lim_{\xi<\alpha}}(F_\xi \cdot G_\xi) \tag{3}$$

Debido a la simetría de la fórmula (3) respecto de las dos sucesiones F y G se tiene:

$$\underline{\lim_{\xi<\alpha}}(F_\xi \cdot G_\xi) \subset \overline{\lim_{\xi<\alpha}} F_\xi \cdot \underline{\lim_{\xi<\alpha}} G_\xi \subset \overline{\lim_{\xi<\alpha}}(F_\xi \cdot G_\xi) \tag{4}$$

Supongamos ahora que las sucesiones de conjuntos G_ξ y $F_\xi \cdot G_\xi$ son convergentes, según la definición 7^c y las fórmulas (3), (4) darán:

$$\underline{\lim_{\xi<\alpha}} F_\xi \cdot \lim_{\xi<\alpha} G_\xi = \overline{\lim_{\xi<\alpha}} F \cdot \lim_{\xi<\alpha} G_\xi = \lim_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot G_\xi). \tag{5}$$

Sin embargo, es fácil deducir de la definición $7^{a,b}$ que para todo conjunto A se tiene[3] $\underline{\lim\limits_{\xi<\alpha}}(F_\xi \cdot A) = \underline{\lim\limits_{\xi<\xi}} F_\xi \cdot A$ y $\overline{\lim\limits_{\xi<\alpha}}(F_\xi \cdot A) = \overline{\lim\limits_{\xi<\alpha}} F_\xi \cdot A$

Esta observación, nos permite escribir (5) como:

$$\underline{\lim_{\xi<\alpha}}(F_\xi \cdot \lim_{\xi<\alpha} G_\xi) = \overline{\lim_{\xi<\alpha}}(F_\xi \cdot \lim_{\xi<\alpha} G_\xi) = \lim_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot G_\xi). \tag{6}$$

Debido a la definición 7^c , (6) expresa que *la sucesión de conjuntos* $F_\xi \cdot \lim\limits_{\xi<\alpha} G_\xi$ *es convergente* y que $\lim\limits_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot \lim\limits_{\xi<\alpha} G_\xi) = \lim\limits_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot G_\xi)$; la condición b) del lema queda establecida.

Amablemente me comunicó el Sr. Saks el lema 12^b (para $\alpha = \omega$) como una generalización de un lema, encontrado previamente por mí especialmente para uso en el presente trabajo, mientras que el lema 12^a era desconocido por mí.

Como es fácil de verificar, el signo de multiplicación puede ser sustituido en el lema 12 por el signo de adición.

A continuación voy a tener que operar varias veces con los conceptos presentados en esta sección sin indicar si quiera, las definiciones; voy a aplicar los conceptos introducidos en las definiciones 5 y 6, a conjuntos de todo tipo (no sólo a los conjuntos de individos, sino también a clases de conjuntos, a las familias de clases, etc.)

§2. Algoritmo de las operaciones sobre las clases de conjuntos.

[3]Véase la nota de la página 16.

Traducción: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Como se dijo en la introducción, nos ocuparemos en este trabajo de ciertas operaciones (funciones) $\mathbf{F}$ que hacen corresponder, a una clase cualquiera $\boldsymbol{K}$ de conjuntos, otra clase $\boldsymbol{F(K)}$. El uso de estas operaciones se facilita considerablemente por un algoritmo del cual voy a delinear a continuación los rasgos generales

Primero presento dos relaciones entre operaciones: la de *identidad* y la de *inclusión*, que denotaré $\overset{\circ}{=}$ y $\overset{\circ}{\subset}$, respectivamente.

Definición 8.

^{a}) $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{G}$, *cuando se tiene* $\mathbf{F}(X) = \mathbf{G}(X)$ *para cualquier clase de conjuntos* X;

^{b}) $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{G}$, *cuando se tiene* $\mathbf{F}(X) \subset \mathbf{G}(X)$ *para cualquier clase de conjuntos* X.

Entre las operaciones sobre operaciones, la de *adición* ocupa el primer lugar; el resultado de esta adición se denotará con $\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G}$ respectivamente con $\overset{\circ}{\sum\limits_{x \in A}} \mathbf{F}_x$

Definición 9.

^{a}) $[\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G}](\mathbf{K}) = \mathbf{F}(\mathbf{K}) + \mathbf{G}(\mathbf{K})$;

^{b}) $[\overset{\circ}{\sum\limits_{x\in A}} F_x](\mathbf{K}) = \sum\limits_{x\in A} F_x(\mathbf{K})$;

En la práctica, suprimiremos a veces los corchetes [ ] de las expresiones dadas por la definición $9^{a,b}$; las demás definiciones análogas se formularán sin esos corchetes.

En vez de establecer aquí, una por una, las leyes concernientes a las definiciones que se dieron, doy el lema general siguiente cuya demostración fácil estará al alcance del lector:

Lema 13. *Las relaciones* $\overset{\circ}{=}$, $\overset{\circ}{\subset}$ *y las operaciones* $\overset{\circ}{+}$, $\overset{\circ}{\sum}$ *satisfacen todos los postulados del álgebra de la lógica.*[1]

También defino la *multiplicación relativa* de las operaciones, designando el resultado por $\mathbf{FG}$, respectivamente mediante $\overset{\circ}{\prod\limits_{1 \le \xi \le \nu}} \mathbf{F}_\xi$; el producto $\overset{\circ}{\prod\limits_{1 \le \xi \le \nu}} \mathbf{F}_\xi$ cuyos factores son todos iguales entre sí, se denominará, como es costumbre, con *ν-ésima iteración (potencia) de la operación* $\mathbf{F}$ *y designará mediante* $\mathbf{F}^\nu$.

Definición 10.

[1]En el artículo de M.E.V. Huntington, *Sets of independent postulates for the algebra of Logic*, Transact. of the American Math. Soc. 5, 1904, págs. 288-309 pueden encontrarse conjuntos de postulados del algebra de la lógica que sólo contienen, en calidad de nociones primitivas, las de identidad y de inclusión o identidad y suma finita (dos sumandos). Es fácil modificar estos sistemas para involucrar la noción de suma generalizada, (suma de cualquier clase de sumandos), una noción que no suele considerarse en el álgebra de la lógica.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Traduccion Andres Sestier Bouclier

$^{a})$ $\mathbf{F\,G}(\mathbf{K}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{K}))$;

$^{b})$ $\overset{\circ}{\prod\limits_{1 \le \xi \le \nu}} \mathbf{F}_{\xi}(\mathbf{K}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{K})$ *para* $\nu = 1$;

$\overset{\circ}{\prod\limits_{1 \le \xi \le \nu}} \mathbf{F}_{\xi}(\mathbf{K}) = \overset{\circ}{\prod\limits_{1 \le \xi \le \nu - 1}} \mathbf{F}_{\xi}(\mathbf{F}_{\nu})(\mathbf{K})$ *para todo* ν *tal que* $1 < \nu < \omega$;

$^{c})$ $\mathbf{F}^{\nu}(\mathbf{K}) = \overset{\circ}{\prod\limits_{1 \le \xi \le \nu}} \mathbf{F}_{\xi}(\mathbf{K})$ *en el caso donde* $1 \le \nu < \omega$ *y* $\mathbf{F}_{\xi} \overset{\circ}{=} \mathbf{F}$ *para todo* ξ, $1 \le \xi \le \nu$.

Nos encontraremos frecuentemente con el producto relativo usual $\mathbf{FG}$; por lo tanto formularé aquí explicitamente algunas propiedades elementales de esta noción.

Por el contrario, la noción de producto general $\overset{\circ}{\prod\limits_{1 \le \xi \le \nu}} \mathbf{F}_{\xi}$, y en particular la de iteración ν-ésima de una operación $\mathbf{F}$, es decir $\mathbf{F}^{\nu}$, tendrá escasa importancia en lo que sigue. Nos encontramos habitualmente frente a operaciones $\mathbf{F}$ cuyas iteraciones son idénticas, que por lo tanto se pueden caracterizar por la fórmula: $\mathbf{F}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{F}$; las operaciones de este tipo pueden llamarse *iterables*.

Lema 14.

$^{a})$ $[\mathbf{FG}]\mathbf{H} \overset{\circ}{=} \mathbf{F}[\mathbf{GH}]$;

$^{b})$ *Si* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{G}$; *se tiene* $\mathbf{FH} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{GH}$;

$^{c})$ $[\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G}]\mathbf{H} \overset{\circ}{=} \mathbf{FH} \overset{\circ}{+} \mathbf{GH}$;

$^{d})$ $\left[\overset{\circ}{\sum\limits_{\mathbf{F} \in \mathfrak{F}}} \mathbf{F}\right] \mathbf{G} \overset{\circ}{=} \overset{\circ}{\sum\limits_{\mathbf{F} \in \mathfrak{F}}} [\mathbf{FG}]$;

$^{e})$ *Si* $\mathbf{F}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{F}$, $\mathbf{G}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{G}$ *y* $\mathbf{FG} \overset{\circ}{=} \mathbf{GF}$, *se tiene* $[\mathbf{FG}]^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{FG}$.

Demostración. La demostración es evidente.

En virtud de la ley asociativa recién formulada en el lema 13^{a} no surgirán equívocos por suprimir paréntesis en los símbolos de la fórmula $[\mathbf{FG}]\mathbf{H}$ o $\mathbf{F}[\mathbf{GH}]$.

A toda clase de operaciones $\mathfrak{F}$ vienen a corresponder otras clases de operaciones, especificamente las clases de todas las operaciones que se obtienen por adición o multiplicación relativa o finalmente mediante las dos operaciones efectuadas a la vez sobre los elementos de la clase $\mathfrak{F}$. Voy a introducir símbolos especiales: $\mathfrak{S}(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{F})$, y $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$ para designar las clases de operaciones así obtenidas.

Definición 11.

$^{a})$ $\mathfrak{S}(\mathfrak{F})$ es la clase de todas las operaciones $\mathbf{F}$ *que se pueden poner en la forma:* $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \overset{\circ}{\sum\limits_{G \in \mathfrak{G}}} \mathbf{G}$ *donde* $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ *y* $\mathfrak{G} \ne 0$;

MEXICO

Traducción: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

b) *$\mathfrak{P}(\mathfrak{F})$ es la clase de todas las operaciones $\mathbf{F}$ de la forma $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \overset{\circ}{\prod\limits_{1 \leq \xi \leq \nu}} \mathbf{F}_\xi$, donde $1 \leq \nu < \omega$ y $F_\xi \in \mathfrak{F}$ para $1 \leq \xi \leq \nu$;*

c) $\mathfrak{B}(\mathfrak{F}) = \prod(\underset{\mathfrak{G}}{E}[\mathfrak{F} + \mathfrak{S}(\mathfrak{G}) + \mathfrak{P}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G}])$.

Dejaré que el lector establezca las propiedades antes definidas, por ejemplo las propiedades, que se expresan en las fórmulas:

$\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{F})) = \mathfrak{S}(\mathfrak{F}),\ \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{F})) = \mathfrak{P}(\mathfrak{F}),\ \mathfrak{B}(\mathfrak{B}(\mathfrak{F})) = \mathfrak{B}(\mathfrak{F}),\ \mathfrak{S}(\mathfrak{F}) + \mathfrak{P}(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{F})$, etc.

A propósito de las fórmulas *b*) - *d*) del lema 14, hay que observar que la inclusión $\mathbf{G} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{H}$ no siempre implica: $\mathbf{FG} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{FH}$, igualmente no siempre se verifica la ley distributiva: $\mathbf{F}\left[\overset{\circ}{\sum\limits_{\mathbf{G} \in \mathfrak{G}}} \mathbf{G}\right] \overset{\circ}{=} \overset{\circ}{\sum\limits_{\mathbf{G} \in \mathfrak{G}}} [\mathbf{FG}]$ (y en particular tampoco lo hace $\mathbf{F}[\mathbf{G} \overset{\circ}{+} \mathbf{H}] \overset{\circ}{=} \mathbf{FG} \overset{\circ}{+} \mathbf{FH}$). Pero se conocen númerosas operaciones $\mathbf{F}$ que llenan las condiciones en cuestión relativas a las operaciones arbitrarias $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ o relativas a la clase arbitraria de operaciones $\mathfrak{G}$. Las operaciones tales se llamarán *monótonas*, respectivamente, *totalmente aditivas*; para designar las clases de todas las operaciones monotonas o aditivas se emplearán respectivamente los símbolos $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{U}$. Es importante distinguir además las operaciones de las categorías intermedias, mas particulares que $\mathfrak{M}$, pero más generales que $\mathfrak{U}$; son especialmente *las operaciones semiaditivas de grado β* (donde β es un ordinal arbitrario), cuyas clases se denotarán aquí mediante $\mathfrak{U}_\beta$.

Definición 12.

a) *$\mathfrak{M}$ es la clase de todas las operaciones $\mathbf{F}$ que cumplen la condición: si $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ son operaciones arbitrarias tales que $\mathbf{G} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{H}$, se tiene $\mathbf{FG} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{FH}$;*

b) *$\mathfrak{U}$ es la clase de todas las operaciones $\mathbf{F}$ que cumplen la condición: si $\mathfrak{G}$ es una clase arbitraria de operaciones, se tiene*

$$F\left[\overset{\circ}{\sum_{G \in \mathfrak{G}}} G\right] \overset{\circ}{=} \overset{\circ}{\sum_{G \in \mathfrak{G}}} [\mathbf{FG}];$$

c) *$\mathfrak{U}_\beta$ es la clase de todas las operaciones $\mathbf{F}$ que cumplen la condición: si $\mathfrak{G}$ es una clase arbitraria de operaciones, se tiene*

$$F\left[\overset{\circ}{\sum_{G \in \mathfrak{G}}} \mathbf{G}\right] \overset{\circ}{=} \overset{\circ}{\sum_{\mathfrak{K} \in U_\beta(\mathfrak{G})}} \left[\mathbf{F}\left[\overset{\circ}{\sum_{G \in \mathfrak{K}}} \mathbf{G}\right]\right].$$

La definición $12^{a,b}$ se aleja de las definiciones universalmente admitidas, pero les es equivalente como lo muestra el siguiente:

Lema 15.

a) *$\mathfrak{M}$ es la clase de todas las operaciones $\mathbf{F}$ sujetas a la condición: si $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ son clases arbitrarias de conjuntos, tales que $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$, se tiene $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{F}(\mathbf{Y})$;*

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

[b]) *$\mathfrak{U}$ es la clase de todas las operaciones* $\mathbf{F}$ *sujetas a la condición: si* $\mathfrak{Y}$ *es una familia arbitraria de clases, se tiene*

$$F\left(\sum(\mathfrak{Y})\right) = \sum_{\mathbf{X}\in\mathfrak{Y}} \mathbf{F}(\mathbf{X});$$

[c]) *$\mathfrak{U}_\beta$ es la clase de todas las operaciones* $\mathbf{F}$ *sujetas a la condición: si* $\mathbf{Y}$ *es una clase arbitraria de conjuntos, se tiene* $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{X}\in\mathbf{U}_\beta(\mathbf{Y})} \mathbf{F}(\mathbf{X})$

Demostración. [a]) Que la condición del lema es suficiente para que $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$, se deduce fácilmente de las definiciones 8^b, 10^a y 12^a. Para probar que esta condición es a la vez necesaria, se tiene la razón siguiente:

Supongamos que $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$ y consideremos dos clases arbitrarias $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ tales que $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$. Definimos las operaciones $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$, pidiendo por ejemplo: $\mathbf{G}(\mathbf{Z}) = \mathbf{X}$ y $\mathbf{H}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Y}$ para cualquier clase $\mathbf{Z}$. Según la definición 8^b se tiene $\mathbf{G} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{H}$, por lo tanto, debido a la definición 12^a obtenemos: $\mathbf{FG} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{FH}$. Usando las definiciones 8^b y 10^a llegamos a la conclusión de que $\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{Y})) \subset \mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{Y}))$, por lo tanto $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{F}(\mathbf{Y})$. Se ha mostrado que para cualquier operación monótona $\mathbf{F}$ la fórmula $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ implica $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{F}(\mathbf{Y})$, l.q.q.d.

[b]) y [c]) se demuestran de manera análoga.

Con ayuda del lema 15^a se puede establecer una serie de *condiciones*, bien conocidas, que son a la vez *necesarias* y *suficientes* para que *una operación dada* $\mathbf{F}$ *sea monótona, como por ejemplo*: $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{X}\subset\mathbf{Y}} \mathbf{F}(\mathbf{X})$ *para toda clase* $\mathbf{Y}$; $\mathbf{F}(\mathbf{X})+\mathbf{F}(\mathbf{Y}) \subset \mathbf{F}(\mathbf{X}+\mathbf{Y})$, respectivamente $\mathbf{F}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}) \subset \mathbf{F}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ *para cualesquier clases* $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$, $\sum_{\mathbf{X}\in\mathfrak{Y}} \mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{F}\left(\sum(\mathfrak{Y})\right)$, respectivamente $\mathbf{F}(\prod(\mathfrak{Y})) \subset \prod_{\mathbf{X}\in\mathfrak{Y}} \mathbf{F}(\mathbf{X})$ *para cualesquier familia de clases* $\mathfrak{Y}$, etc; también podemos formular las condiciones análogas en términos del algoritmo de las operaciones. Las operaciones totalmente aditivas puede ser caracterizadas por la siguiente fórmula: $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{X}\in\mathbf{Y}} \mathbf{F}(\{\mathbf{X}\})$ para toda clase $\mathbf{Y}$.

Algunas propiedades adiconales de las clases de operaciones consideradas se formulan en el lema siguiente:

Lema 16.

[a]) *$\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}_\beta \subset \mathfrak{M}$; si $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ y $2^{\aleph_\alpha} < \aleph_\beta$, se tiene $\mathfrak{U}_\beta = \mathfrak{M}$;*

[b]) *si $\beta \leq \gamma$, se cumple: $\mathfrak{U}_\beta \subset \mathfrak{U}_\gamma$;*

[c]) *si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$ *y* $\mathbf{G} \in \mathfrak{M}$, *ocurre* $\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G} \in \mathfrak{M}$ *y* $\mathbf{FG} \in \mathfrak{M}$; *si* $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$, *se tiene* $\overset{\circ}{\sum_{\mathbf{F}\in\mathfrak{F}}} \mathbf{F} \in \mathfrak{M}$;

[d]) *si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}$ *y* $\mathbf{G} \in \mathfrak{U}$ *se deduce* $\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G} \in \mathfrak{U}$ *y* $\mathbf{FG} \in \mathfrak{U}$; *si* $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{U}$, *se tiene* $\overset{\circ}{\sum_{\mathbf{F}\in\mathfrak{F}}} \mathbf{F} \in \mathfrak{U}$;

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

[e]) *si* $\mathfrak{F} \in \mathfrak{U}_\beta$ *y* $\mathbf{G} \in \mathfrak{U}_\beta$, *se infiere* $\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G} \in \mathfrak{U}_\beta$; *si* $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{U}_\beta$, *se tiene* $\overset{\circ}{\sum\limits_{\mathbf{F} \in \mathfrak{F}}} \mathbf{F} \in \mathfrak{U}_\beta$;

[f]) *si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}_\beta$ *y* $\mathbf{G} \in \mathfrak{U}_\gamma$ *entonces la fórmula:* $\gamma < \beta$ *implica* $\mathbf{FG} \in \mathfrak{U}_\beta$, *y la fórmula:* $\beta \leq cf(\gamma)$ *trae consigo* $\mathbf{FG} \in \mathfrak{U}_\gamma$;

[g]) *si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}_\beta$, $\mathbf{G} \in \mathfrak{U}_\beta$ *y* $cf(\beta) = \beta$ *o bien si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}$ *y* $\mathbf{G} \in \mathfrak{U}_\beta$ *se tiene* $\mathbf{FG} \in \mathfrak{U}_\beta$.

Demostración. Las fórmulas a) y b) resultan facilmente del lema 15 (si en particular, $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ y $2^{\aleph_\alpha} < \aleph_\beta$, entonces en virtud del lema 10^a, se tiene $\overline{\overline{\mathbf{U}(1)}} = 2^{\aleph_\alpha} < \aleph_\beta$, de donde $\overline{\overline{X}} < \aleph_\beta$ y $\mathbf{U}_\beta(X) = \mathbf{U}(X)$, para toda clase de conjuntos X; relacionándolo con el lema $15^{a,c}$ se concluye la equivalencia de las fórmulas: $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$ y $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}_\beta$ y por consiguiente que $\mathfrak{U}_\beta = \mathfrak{M}$).

Las fórmulas [c]) - [e]) se deducen de la definición 12 con ayuda del lema $14^{a,c,d}$

En cuanto a la proposición [f]) se razona como sigue: Consideremos una clase arbitraria de conjuntos $\mathbf{K}$. Las operaciones $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ siendo, por hipótesis, semiaditivas, son con mayor razón monótonas, por la parte a) del teorema tratado. En virtud de [e]) la operación $\mathbf{FG}$ también lo es; con ayuda del lema 15^a se concluye que $\mathbf{FG}(X) \subset \mathbf{FG}(\mathbf{K})$ para toda clase $\mathbf{X} \subset \mathbf{K}$. Por consiguiente:

$$\sum_{X \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{K})} \mathbf{FG}(X) \subset \mathbf{FG}(\mathbf{K}) \quad y \quad \sum_{X \in \mathbf{U}_\gamma(\mathbf{K})} \mathbf{FG}(X) \subset \mathbf{FG}(\mathbf{K}). \tag{1}$$

Pero, sea Z un conjunto arbitrario de la clase $\mathbf{FG}(\mathbf{K})$:

$$Z \in \mathbf{FG}(\mathbf{K}). \tag{2}$$

Como $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}_\beta$, se tiene según el lema 15^c) $\mathbf{FG}(\mathbf{K}) = \sum\limits_{Y \in \mathbf{U}_\beta G(\mathbf{K})} \mathbf{F}(Y)$;

como consecuencia de (2) y de la definición 5^b existe entonces una clase de conjuntos $\mathbf{L}$ que verifica las fórmulas:

$$Z \in \mathbf{F}(\mathbf{L}), \tag{3}$$

$$\mathbf{L} \subset G(\mathbf{K}) \quad y \quad \overline{\overline{\mathbf{L}}} < \aleph_\beta. \tag{4}$$

Por aplicación repetida del lema $15^{c)}$ (para $\mathbf{F} = \mathbf{G}$ y $\beta = \gamma$) se obtiene: $\mathbf{G}(\mathbf{K}) = \sum\limits_{\mathbf{X} \in \mathbf{U}_\gamma(\mathbf{K})} \mathbf{G}(X)$.
Teniendo en cuenta (4) se deduce con ayuda del axioma de elección, la existencia de una función $\mathbf{H}$ que hace corresponder a todo conjunto Y de $\mathbf{L}$ una clase de conjuntos $\mathbf{H}(Y)$ de manera que se tenga:

$$Y \in \mathbf{G}(\mathbf{H})(Y) \quad para \quad Y \in \mathbf{L}; \tag{5}$$

$$\mathbf{H}(Y) \subset \mathbf{K} \quad y \quad \overline{\overline{\mathbf{H}(Y)}} < \aleph_\gamma \quad para \quad Y \in \mathbf{L}. \tag{6}$$

Traduccion. Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

Como ya se ha dicho, las operaciones **F** y **G** son monótonas; de conformidad con el lema 15^a y en virtud de (5) se tiene pues:

$$\mathbf{L} \subset \sum_{Y \in \mathbf{L}} \mathbf{GH}(Y) \subset \mathbf{G}\left(\sum_{Y \in \mathbf{L}} \mathbf{H}(Y)\right), \quad \textit{de donde} \quad \mathbf{F}(\mathbf{L}) \subset \mathbf{FG}\left(\sum_{Y \in \mathbf{L}} \mathbf{H}(Y)\right);$$

en combinación con (3) y (6), se obtiene:

$$Z \in \mathbf{FG}\left(\sum_{Y \in \mathbf{L}} \mathbf{H}(Y)\right), \quad \textit{donde} \quad \sum_{Y \in \mathbf{L}} \mathbf{H}(Y) \subset \mathbf{K}. \tag{7}$$

Pero, sea $\gamma < \beta$, de donde $\aleph_\gamma < \aleph_\beta$. En virtud de (4) y (6) se tiene entonces $\overline{\overline{\sum_{Y \in \mathbf{L}} \mathbf{H}(Y)}} \leq \aleph_\gamma \cdot \overline{\overline{L}} < \aleph_\beta^2 = \aleph_\beta$. Según (7) se concluirá que

$$Z \in \sum_{\mathbf{X} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{K})} \mathbf{FG}(X) \ \ \textit{para} \ \ \gamma < \beta. \tag{8}$$

Si por el contrario $\beta \leq cf(\gamma)$, se tiene en virtud de (4): $\overline{\overline{\mathbf{L}}} < \aleph_{cf(\gamma)}$. Poniendo pues en el lema 3(b): $B = \mathbf{L}$ y $F \overset{\circ}{=} \mathbf{H}$ y teniendo en cuenta (6) se llega a la fórmula: $\overline{\overline{\sum_{Y \in \mathbf{L}} \mathbf{H}(Y)}} < \aleph_\gamma$, que junto con (7), trae consigo:

$$Z \in \sum_{\mathbf{X} \in \mathbf{U}_\gamma(\mathbf{K})} \mathbf{FG}(\mathbf{X}) \ \ \textit{para} \ \ \beta \leq cf(\gamma). \tag{9}$$

Asi se prueba que (2) implica (8) y (9) para toda Z. Con ayuda de (1) se deducen las igualdades

$$\begin{aligned} \mathbf{FG}(\mathbf{K}) &= \sum_{\mathbf{X} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{K})} \mathbf{FG}(\mathbf{X}) \ \ \text{para} \ \ \gamma < \beta \\ \mathbf{FG}(\mathbf{K}) &= \sum_{X \in \mathbf{U}_\gamma(\mathbf{K})} \mathbf{FG}(\mathbf{X}), \ \text{para}\ \beta \leq cf(\gamma). \end{aligned} \tag{10}$$

En consecuencia del lema 15^c las fórmulas (10) que son válidas para toda clase de conjuntos **K**, dan finalmente:

$$\mathbf{FG} \in \mathfrak{U}_\beta \ \ \textit{para} \ \ \gamma < \beta \ \ \textit{y} \ \ \mathbf{FG} \in \mathfrak{U}_\gamma \ \ \textit{para} \ \ \beta \leq cf(\gamma) \ \ \texttt{l.q.q.d.}$$

Pero si en la afirmación ^{f}) recién establecida, ponemos $\gamma = \beta$ respectivamente $\beta = 0$ y $\gamma = \beta$ (y si se toma en cuenta ^{a})) se alcanza de inmediato la proposición ^{g}).

Así queda por completo demostrado el lema 16.

Teníendo en cuenta la definición 11, el lema 16^{c,d,e} puede ser enunciado mas brevemente con ayuda de las fórmulas: $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$, y $\mathfrak{S}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{P}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$ y $\mathfrak{S}(\mathfrak{U}_\beta) = \mathfrak{U}_\beta$; según el lema 16^g se tiene además $\mathfrak{P}(\mathfrak{U}_\beta) = \mathfrak{B}(\mathfrak{U}_\beta) = \mathfrak{U}_\beta$, cuando $cf(\beta) = \beta$.

Traduccion Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Aparte las operaciones semiaditivas de grado β se pueden considerar otras clases de operaciónes más estrechas que $\mathfrak{M}$ y más amplias que $\mathfrak{U}$. Como ejemplo de tal clase se puede mencionar la de las operaciones *aditivas en sentido estricto* es decir operaciones $\mathbf{F}$ que verifican la fórmula: $\mathbf{F}[\mathbf{G} \overset{\circ}{+} \mathbf{H}] \overset{\circ}{=} \mathbf{FG} \overset{\circ}{+} \mathbf{FH}$ *para todas las operaciónes* $\mathbf{G}$ *y* $\mathbf{H}$ (respectivamente $\mathbf{F}(X + Y) = \mathbf{F}(X) + \mathbf{F}(Y)$ para todas las clases X,Y). Generalizando esta noción, se llega a la de las *operaciones aditivas de grado* β es decir, caracterizables por la condición: $\mathbf{F}\left[\overset{\circ}{\sum\limits_{\mathbf{G}\in\mathfrak{G}}} \mathbf{G}\right] \overset{\circ}{=} \overset{\circ}{\sum\limits_{\mathbf{G}\in\mathfrak{G}}} [\mathbf{FG}]$, *cuando* $\overline{\overline{\mathfrak{G}}} < \aleph_\beta$ (respectivamente $\mathbf{F}(\sum(\mathcal{Y})) = \sum\limits_{X\in\mathcal{Y}} \mathbf{F}(X)$, *cuando* $\overline{\overline{\mathcal{Y}}} < \aleph_\beta$); esta noción, por demás importante quedará sin aplicación en las cuestiones que nos ocupan.

Como ejemplo de operaciónes efectuadas sobre las clases de conjuntos y que son totalmente aditivas, que por ello presentan todas las otras propiedades vistas anteriormente, se pueden citar las operaciones de la forma $\overline{\mathbf{F}}$ (véase la definición 6), donde F es una operación arbitraria que hace corresponder los conjuntos de individuos a los conjuntos de individuos.

En relación con la multiplicación de las operaciónes desempeña cierto papel la operación de la identidad $\mathbf{I}$, que la modula. Se debe observar que casi todas las operaciones de que nos ocuparemos en estas consideraciones verifican la inclusión $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$; la operación $\mathbf{I}$ constituye pues desde cierto punto de vista su cota inferior. Las operaciones $\mathbf{F}$ que cumplen la fórmula $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$ pueden ser llamadas *adjuntivas*

Definición 13. $\mathbf{I}(\mathbf{K}) = \mathbf{K}$.

A continuación algunas propiedades de la operación $\mathbf{I}$ y las operaciones adjuntivas:

Lema 17.

a) $\mathbf{I} \in \mathfrak{U}$, luego $\mathbf{I} \in \mathfrak{U}_\beta$ e $\mathbf{I} \in \mathfrak{M}$;

b) $\mathbf{IF} \overset{\circ}{=} \mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{FI}$, en particular $\mathbf{I}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{I}$;

c) si $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$ se tiene $\mathbf{G} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{FG}$; si además $\mathbf{G} \in \mathfrak{M}$, ocurre $\mathbf{G} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{GF}$;

d) si $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{G}$ y $\mathbf{G}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{G}$, se tiene $\mathbf{FG} \overset{\circ}{=} \mathbf{G}$; si además $\mathbf{G} \in \mathfrak{M}$, se cumple $\mathbf{GF} \overset{\circ}{=} \mathbf{G}$;

e) si $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$ y $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{G}$, se deduce $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{FG}$;

f) si $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$, ocurre $\mathbf{K} \subset \mathbf{F}(\mathbf{K})$ y $\overline{\overline{\mathbf{K}}} \leq \overline{\overline{\mathbf{F}(\mathbf{K})}}$.

Obsérvese que todas las nociones definidas hasta aquí en esta sección son aplicables no solo a las operaciones que hacen corresponder las clases de conjuntos a las clases de conjuntos, sino también a toda operación sobre conjuntos cualesquiera y teniendo como resultado conjuntos cualesquiera; en lo que se refiere a la definición 10, tal restricción de los resultados de las operaciones no es esencial. Un manejo sistemático con las nociones aquí introducidas y utilizadas en la extensión más vasta haría posible una descripción muy breve aunque poco intuitiva de varios hechos obtenidos. Así, por ejemplo, las operaciones monótonas podrían ser caracterizadas por una de las fórmulas: $\overline{\mathbf{F}}\mathbf{U} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{UF}$, $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \sum \overline{\mathbf{F}}\mathbf{U}$, $\sum \overline{\mathbf{F}} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F\Sigma}$ o $\mathbf{F\Pi} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{\Pi}\overline{\mathbf{F}}$, las operaciones totalmente aditivas por una de las fórmulas: $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \sum \overline{\mathbf{F}J}$ o $\sum \mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{F\Sigma}$, y finalmente las operaciones semiaditivas de grado β por la fórmula: $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \sum \overline{\mathbf{F}}\mathbf{U}_\beta$. Sin embargo, para no dificultar aún más la lectura de esta obra no abusaré más de la simbólica de este tipo; tan sólo de la noción de multiplicación relativa (definición 10^α) haré un uso lo más vasto posible lo cual

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

me permite por ejemplo suprimir los paréntesis exteriores en todas las expresiones de la forma $f(g(x))$.

A parte de la operación $\mathbf{I}$, otra operación particular es de importancia considerable en lo que sigue, a saber la operación $\mathbf{C}$ que consiste en reemplazar los conjuntos X de una clase $\mathbf{K}$ por sus complementarios $1 - X$.

Definición 14. $\mathbf{C}(\mathbf{K}) = \underset{1-X}{E}[X \in \mathbf{K}]$.

Revisemos algunas propiedades elementales de la operación C:

Lema 18.

$^{a})$ $\mathbf{C} \in \mathfrak{U}$, *luego* $\mathbf{C} \in \mathfrak{U}_\beta$ *y* $\mathbf{C} \in \mathfrak{M}$*;*

$^{b})$ $\mathbf{C}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{I}$*;*

$^{c})$ $[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}$*;*

$^{d})$ $\mathbf{C}(0) = 0$ *y* $\mathbf{C}\mathbf{U}(1) = \mathbf{U}(1)$*;*

$^{e})$ $\overline{\overline{\mathbf{C}(\mathbf{K})}} = \overline{\overline{\mathbf{K}}}$.

Demostración. ^{a}), ^{b}) y ^{d}) evidentes; ^{c}) puede deducirse de ^{a}) y ^{b}) con ayuda de las definiciones 10 y 12^b y de los lemas 14^c y 17^b. La fórmula e) resulta del hecho de que la función $\mathbf{F}(X) = 1 - X$ es biunívoca.

A toda operación $\mathbf{F}$ se puede asociar otra operación $\mathbf{CFC}$ que conserva muchas propiedades de la operación $\mathbf{F}$; esta operación $\mathbf{CFC}$ se llamara *operación doble de* $\mathbf{F}$ y se denotara $\mathbf{F}^*$. Usaré constantemente esta noción de dualidad en los capítulos por venir; gracias a estas propiedades, muchos razonamientos se verán muy simplificados.

Definición 15. $\mathbf{F}^*(\mathbf{K}) = \mathbf{CFC}(\mathbf{K})$.

Algunas propiedades de las operaciones dobles estan reunidas en el siguiente:

Lema 19.

$^{a})$ $\mathbf{CFC} \overset{\circ}{=} \mathbf{F}^*$, $\mathbf{CF} \overset{\circ}{=} \mathbf{F}^*\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^* \overset{\circ}{=} \mathbf{C}$*;*

$^{b})$ $\mathbf{F}^{**} \overset{\circ}{=} \mathbf{F}$*;*

$^{c})$ *si* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{G}$*, se tiene* $\mathbf{F}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{G}^*$*;*

$^{d})$ $[\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G}]^* \overset{\circ}{=} \mathbf{F}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{G}^*$ *y en general* $\left[\overset{\circ}{\sum_{\mathbf{F} \in \mathfrak{F}}} \mathbf{F}\right]^* \overset{\circ}{=} \overset{\circ}{\sum_{\mathbf{F} \in \mathfrak{F}}} \mathbf{F}^*$*;*

$^{e})$ $[\mathbf{FG}]^* \overset{\circ}{=} \mathbf{F}^*\mathbf{G}^*$*;*

$^{f})$ *si* $\mathbf{F}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{F}$*, se tiene* $[\mathbf{F}^*]^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{F}^*$*;*

Traduccion. Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Traduccion Andres Sestier Bouclier

^{g}) *si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$, *se cumple* $\mathbf{F}^* \in \mathfrak{M}$;

^{h}) *si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}$, *ocurre* $\mathbf{F}^* \in \mathfrak{U}$;

^{i}) *Si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}_\beta$, *entonces* $\mathbf{F}^* \in \mathfrak{U}_\beta$;

^{j}) $\mathbf{I}^* \overset{\circ}{=} \mathbf{I}$; *si* $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$; *se deduce* $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}^*$;

^{k}) *si* $\mathbf{F}(0) = 0$, *se tiene* $\mathbf{F}^*(0) = 0$;

^{l}) *si* $\overline{\overline{\mathbf{F}(\mathbf{X})}} \leq \mathfrak{f}(\overline{\overline{\mathbf{X}}})$, *respectivamente* $\overline{\overline{\mathbf{F}(\mathbf{X})}} \geq \mathfrak{f}(\overline{\overline{\mathbf{X}}})$ *para toda clase de conjuntos* $\mathbf{X}$, *se tiene también* $\overline{\overline{\mathbf{F}^*(\mathbf{X})}} \leq \mathfrak{f}(\overline{\overline{\mathbf{X}}})$ *respectivamente* $\overline{\overline{\mathbf{F}^*(\mathbf{X})}} \geq \mathfrak{f}(\overline{\overline{\mathbf{X}}})$ *para toda clase* $\mathbf{X}$.

Demostración. No presenta dificultad; uno se apoya en las definiciones 15, anteriores y en el lema 18.

Como es fácil ver, la significación del símbolo $\mathbf{F}^*$ depende no sólo de la de $\mathbf{F}$, tanto como en el caso del símbolo $\mathbf{C}$, de la interpretación del signo 1 (véase página 2). Si se quiere suprimir esta dependencia de la operación $\mathbf{F}^*$ respecto del significado de 1, habría que transformar convenientemente las definiciones 14 y 15, poniendo por ejemplo $\mathbf{C}_A(\mathbf{K}) = \underset{A-X}{\mathrm{E}}[X \in \mathbf{K}]$ y $\mathbf{F}^\times(\mathbf{K}) = \mathbf{C}_{\Sigma(\mathbf{K})}\mathbf{F}\mathbf{C}_{\Sigma(\mathbf{K})}(\mathbf{K})$. La noción de operación doble así modificada no coincide ya con la noción primitiva y pierde valiosas propiedades previas desde el punto de vista de estas investigaciones (en particular el teorema 33 de la sección siguiente deja de ser válido). Sin embargo, existen operaciones $\mathbf{F}$ para las que las dos operaciones dobles $\mathbf{F}^*$ y $\mathbf{F}^\times$ coinciden, de tal manera que la operación $\mathbf{F}^*$ recupera entonces su significación única independientemente del modo de la interpretación del signo 1; de tal naturaleza son las operaciones que serán tema de §§5 y 6 de esta obra.

§3. Noción general de clase cerrada respecto de una operación dada

En esta sección me propongo examinar las propiedades generales de las clases cerradas con respecto a operaciones cualesquiera.

Una clase de conjuntos $\mathbf{K}$ se dice que es *cerrada respecto a una operación* $\mathbf{F}$ dada cuando $\mathbf{F}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{K}$

Se podría además distinguir las clases *cerradas en sentido restringido* es decir que verifican la fórmula: $\overline{\mathbf{F}}\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{U}(\mathbf{K})$. Sin embargo esta distinción no tiene importancia aquí puesto que ambas nociones coinciden para las operaciones monótonas, y las operaciones que nos interesan en este trabajo son de ésta suerte.

Voy a introducir un signo especial para designar la familia de todas las clases cerradas respecto de una operación $\mathbf{F}$:

Definición 16. $cl(\mathbf{F}) = \underset{\mathbf{X}}{E}[\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}]$.

Voy a admitir como siempre que las clases de la familia $cl(\mathbf{F})$ se conforman exclusivamente de subconjuntos de un conjunto 1 dado de antemano (aunque la relativización de la noción considerada en razón del conjunto 1 no es evidenciada en el símbolo $cl(\mathbf{F})$ como ya se mencionó al principio. Teniendo en cuenta este hecho se establece fácilmente el:

Traduccion. Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

MEXICO

Teorema 20. *Si* $\mathbf{F}$ *es una operación arbitraria, se tiene* $\mathbf{U}(1) \in cl(\mathbf{F})$ *y* $cl(\mathbf{F}) \subset \mathbf{UU}(1)$.

Demostración. Segun la definición 5(a), $\mathbf{U}(1)$ es la clase de todos los conjuntos posibles (contenidos en 1) y $\mathbf{UU}(1)$ es la familia de todas las clases posibles (contenidas en $\mathbf{U}(1)$). Pero como $\mathbf{F}(\mathbf{U}(1))$ es igualmente una clase de conjuntos, se tiene $\mathbf{F}(\mathbf{U}(1)) \subset \mathbf{U}(1)$, de donde, por la definición 16, $\mathbf{U}(1) \subset cl(\mathbf{F})$; además $cl(\mathbf{F})$ por ser una familia de clases, se tiene $cl(\mathbf{F}) \subset \mathbf{UU}(1)$. l.q.q.d

Teorema 21.

^{a}) *si* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{G}$, *se tiene* $cl(\mathbf{G}) \subset cl(\mathbf{F})$;

^{b}) $cl(\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G}) = cl(\mathbf{F}) \cdot cl(\mathbf{G})$ *y en general* $cl\left(\overset{\circ}{\sum}_{\mathbf{F}\in\mathfrak{F}} \mathbf{F}\right) = \prod_{\mathbf{F}\in\mathfrak{F}} cl(\mathbf{F})$.

Demostración. Esta resulta fácilmente de las definiciones 8^{b}, 9 y 16.

Apoyándome en el teorema 21^{b} voy a utilizar constantemente los símbolos $cl(\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G})$ y $cl(\overset{\circ}{\sum}_{\mathbf{F}\in\mathfrak{F}} \mathbf{F})$ para designar las familias de todas las clases cerradas, con respecto a dos operaciones $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ a la vez, respectivamente con respecto a todas las operaciones de una clase $\mathfrak{F}$ dada, simultáneamente.

El teorema 21^{b} implica inmediatamente el

Corolario 22. *Si* $cl(\mathbf{F}) = cl(\mathbf{G})$, *se tiene* $cl(\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{H}) = cl(\mathbf{G} \overset{\circ}{+} \mathbf{H})$.

Teorema 23.

^{a}) $cl(\mathbf{I}) = \mathbf{UU}(1)$;

^{b}) $cl(\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}) = cl(\mathbf{F})$;

^{c}) *si* $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$, *se tiene* $cl(\mathbf{F}) = E_{\mathbf{X}}[\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}]$;

^{d}) *si* $\mathbf{F}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{F}$ *y* $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$, *entonces* $cl(\mathbf{F}) = \overline{\mathbf{F}}\mathbf{UU}(1)$.

Demostración.

^{a}) Resulta inmediatamente de las definiciones 16 y 13

^{b}) En virtud del teorema 21^{b}, $cl(\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}) = cl(\mathbf{I}) \cdot cl(\mathbf{F})$; como, en razón de ^{a}) y del teorema 20, $cl(\mathbf{F}) \subset cl(\mathbf{I})$, se obtiene $cl(\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}) = cl(\mathbf{F})$

^{c}) Es una consecuencia inmediata de la definición 16 y del lema 17^{f}.

^{d}) $\mathbf{UU}(\mathbf{I})$ es la familia de todas las clases de conjuntos, por lo tanto concluímos de ^{c}) que

$$cl(\mathbf{F}) \subset \underset{\mathbf{F}(\mathbf{X})}{E}[\mathbf{X} \in \mathbf{UU}(1)]. \tag{1}$$

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Por otro lado, consideremos una clase arbitraria de conjuntos $\mathbf{X}$ ($\mathbf{X} \in \mathbf{UU}(1)$) y escribiamos: $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$. Como $\mathbf{F}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{F}$, se tiene según las definiciones 8^a y 10: $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \mathbf{FF}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}^2(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$, de donde a fortiori $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) \subset \mathbf{Y}$, por tanto, de conformidad con la definición 16, $\mathbf{Y} \in cl(\mathbf{F})$. Así se demuestra que para todo $\mathbf{X} \in \mathbf{UU}(1)$ se tiene $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \in cl(\mathbf{F})$; en otros términos:

$$\mathop{\mathrm{E}}_{\mathbf{F}(\mathbf{X})}[\mathbf{X} \in \mathbf{UU}(1)] \subset cl(\mathbf{F}). \tag{2}$$

Las inclusiones (1) y (2) dan la igualdad:

$$cl(F) = \mathop{\mathrm{E}}_{\mathbf{F}(\mathbf{X})}[\mathbf{X} \in \mathbf{UU}(1)];$$

poniendo en la definición 6, $f \overset{\circ}{=} \mathbf{F}$ y $A = \mathbf{UU}(1)$, se obtiene la fórmula que se busca:

$$cl(\mathbf{F}) = \overline{\mathbf{F}}\mathbf{UU}(1).$$

En razón del teorema 23^b se comprende que aqui nos podemos limitar a las operaciones adjuntivas $\mathbf{G}$, es decir que verifiquen la inclusión: $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{G}$ (véase la pág 24). Al examinar la noción de clase cerrada respecto de una operación arbitraria $\mathbf{F}$ se puede, en efecto reemplazar esta operación por una operación adjuntiva $\mathbf{G}$ (por $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}$) de modo que las familias correspondientes $cl(\mathbf{F})$ y $cl(\mathbf{G})$ coincidan.

Teorema 24.

a) *Si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$ *o* $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{G}$*, ocurre* $cl(\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G}) \subset cl(\mathbf{FG})$*;*

b) *si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$ *y* $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{G}$*, se tiene* $cl(\mathbf{FG}) \subset cl(\mathbf{F})$*;*

c) *si* $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$*, se cumple* $cl(\mathbf{FG}) \subset cl(\mathbf{G})$*;*

d) *si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$*,* $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$ *e* $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{G}$*, se tiene* $cl(\mathbf{FG}) = cl(\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G}) = cl(\mathbf{F}) \cdot cl(\mathbf{G})$*.*

Demostración.

a) Sea $\mathbf{X} \in cl(\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G})$. En razón de las definiciones 16 y 9^a se tiene $\mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{G}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}$, de donde $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}$ y $\mathbf{G}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}$. Si $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$, se aplica el lema 15^a, reemplazando $\mathbf{X}$ por $\mathbf{G}(\mathbf{X})$ y $\mathbf{Y}$ por $\mathbf{X}$; de la inclusión $\mathbf{G}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}$ se obtiene asi: $\mathbf{FG}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{F}(\mathbf{X})$, lo cual junto con la fórmula: $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}$ dará: $\mathbf{FG}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}$. Si por otra parte $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{G}$ se tiene en virtud del lema 17^f $\mathbf{X} \subset \mathbf{G}(\mathbf{X})$ de donde $\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$; al reemplazar por tanto $\mathbf{X}$ por $\mathbf{G}(\mathbf{X})$ en la fórmula: $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}$ se obtiene de nuevo: $\mathbf{FG}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}$. Ahora, de acuerdo con la definición 6, esta última inclusión equivale a la fórmula: $\mathbf{X} \in cl(\mathbf{FG})$.

Así hemos probado que las hipótesis de la fórmula: $\mathbf{X} \in cl(\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G})$ siempre implica $\mathbf{X} \in cl(\mathbf{FG})$. Por consiguiente la inclusión buscada $cl(\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G}) \subset cl(\mathbf{FG})$ queda establecida.

b) Segun el lema 17^c las fórmulas $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$ e $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{G}$ dan $F \overset{\circ}{\subset} \mathbf{FG}$; con ayuda del teorema 21^a se concluye que $cl(\mathbf{FG}) \subset cl(\mathbf{F})$, l.q.q.d.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

^{c}) se demuestra en forma completamente análoga.

^{d}) las fórmulas ^{a}) a la ^{c}) antes establecidas implican que $cl(\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G}) \subset cl(\mathbf{FG}) \subset cl(\mathbf{F}) \cdot cl(\mathbf{G})$. Juntando esta doble inclusión con el teorema 21^{b} se obtiene:

$$cl(\mathbf{FG}) = cl(\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G}) = cl(\mathbf{F}) \cdot cl(\mathbf{G}), \quad \text{l.q.q.d.}$$

Teorema 25. *Si* $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$ *y* $1 \leq \nu < \omega$, *se tiene* $cl(\mathbf{F}^{\nu}) = cl(\mathbf{F})$.

Demostración. De la definición 10 se deducen las fórmulas siguientes:

$$\mathbf{F}^{1} \overset{\circ}{=} F \quad y \quad \mathbf{F}^{\nu} F \overset{\circ}{=} \mathbf{F}\mathbf{F}^{\nu} \overset{\circ}{=} \mathbf{F}^{\nu+1} \quad (\text{ para } 1 \leq \nu < \omega). \tag{1}$$

Remplazando en los teorema 21^{b} y 24^{a}, $\mathbf{F}$ por $\mathbf{F}^{\nu}$ y $\mathbf{G}$ por $\mathbf{F}$ se obtiene: $cl(\mathbf{F}^{\nu}) \cdot cl(\mathbf{F}) = \varphi(\mathbf{F}^{\nu} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}) \subset cl(\mathbf{F}^{\nu} F)$; de donde según (1):

$$cl(\mathbf{F}^{\nu}) \cdot cl(\mathbf{F}) \subset cl(\mathbf{F}^{\nu+1}). \tag{2}$$

Con ayuda del principio de la inducción completa se concluye que

$$cl(\mathbf{F}) \subset cl(\mathbf{F}^{\nu}) \quad (\text{para } 1 \leq \nu < \omega). \tag{3}$$

En efecto, el número $\nu = 1$ verifica la fórmula (3), pues según (1) se tiene $cl(\mathbf{F}) = cl(\mathbf{F}^{1})$; si ahora un número arbitrario ν con $1 \leq \nu < \omega$ verifica la fórmula (3) se obtiene por (4), $cl(\mathbf{F}) \subset cl(\mathbf{F}^{\nu+1})$, de modo que el número $\nu + 1$ verifica la misma fórmula.

Por otra parte, poniendo en el teorema 24^{c} $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{F}^{\nu}$ y tomando en cuenta (1) se llega a la fórmula $cl(\mathbf{F}^{\nu+1}) \subset cl(\mathbf{F}^{\nu})$; de donde se obtiene fácilmente por inducción:

$$cl(\mathbf{F}^{\nu}) \subset cl(\mathbf{F}^{1}) = cl(\mathbf{F}) \qquad (\text{para } 1 \leq \nu < \omega). \tag{4}$$

la inclusiones (3) y (4) dan inmediatamente

$$cl(\mathbf{F}^{\nu}) = cl(\mathbf{F}), \quad \text{l.q.q.d.}$$

Teorema 26. $cl(\mathbf{F}^{*}) = \overline{\mathbf{C}}(cl(\mathbf{F}))$.

Demostración. Sea $\mathbf{X} \in cl(\mathbf{F})$, luego según la definición 16, $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}$ con ayuda de los lemas 15^{a} y 18^{a} se obtiene: $\mathbf{CF}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{C}(\mathbf{X})$, de donde, en virtud del lema 19^{a} $\mathbf{F}^{*}\mathbf{C}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{C}(\mathbf{X})$. Por consiguiente, en razón de la definición 16, se tiene $\mathbf{C}(\mathbf{X}) \in cl(\mathbf{F}^{*})$.

Este raciocinio demuestra la inclusión: $\overline{\mathbf{C}}(cl(\mathbf{F})) \subset cl(\mathbf{F}^{*})$.

De manera por completo análoga podemos demostrar que a toda clase $\mathbf{Y} \in cl(\mathbf{F}^{*})$ le corresponde una clase $\mathbf{X} \in cl(\mathbf{F})$ tal que $\mathbf{Y} = \mathbf{C}(\mathbf{X})$. Resulta de ello la inclusión: $cl(\mathbf{F}^{*}) \subset \overline{\mathbf{C}}(cl(\mathbf{F}))$ que junto con la inclusión precedente, proporciona la identidad buscada:

$$cl(\mathbf{F}^{*}) = \overline{\mathbf{C}}(cl(\mathbf{F})).$$

Traduccion. Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Corolario 27. *Si* $cl(\mathbf{F}) = cl(\mathbf{G})$*, se tiene* $cl(\mathbf{F}^*) = cl(\mathbf{G}^*)$*.*

Teorema 28.

^{a}) *Si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$ *y* $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$*, se tiene* $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{E}^*) = cl(\mathbf{CF}) = cl(\mathbf{CF}^*) = cl(\mathbf{CFF}^*)$*;*

^{b}) *si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$*, se tiene* $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*)$*.*

Demostración.

^{a}) En virtud del lema $19^{g,j}$ ocurre por hipótesis

$$\mathbf{F}^* \in \mathbf{M} \quad e \quad \mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}^*; \tag{1}$$

con ayuda de los lemas 16^c, 17^e y 18^a se obtiene de la hipótesis y de (1):

$$\mathbf{FF}^* \subset \mathfrak{M} \ \text{y} \ \mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{FF}^*; \ \mathbf{CF} \in \mathfrak{M} \ \text{y} \ \mathbf{CF}^* \in \mathfrak{M}. \tag{2}$$

Aplicando dos veces el teorema 24^a (para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{C}$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{F}$ y luego para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{C}$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{F}^*$) y tomando en cuenta el lema 18^a, se concluye que

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}) \subset cl(\mathbf{CF}) \ \text{ y } \ cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*) \subset cl(\mathbf{CF}^*); \tag{3}$$

e igualmente, en virtud de la hipótesis y de (1), el teorema 24^b proporciona:

$$cl(\mathbf{CF}) \subset cl(\mathbf{C}) \ \text{ y } \ cl(\mathbf{CF}^*) \subset cl(\mathbf{C}). \tag{4}$$

Al reemplazar en el teorema 24^a, $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ por $\mathbf{CF}$ y $\mathbf{CF}^*$ respectivamente, se obtiene según (2): $cl(\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{CF}) \subset cl(\mathbf{CFCF})$, respectivamente $cl(\mathbf{CF}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{CF}^*) \subset cl(\mathbf{CF}^*\mathbf{CF}^*)$ de donde en razón del lema $19^{a,b}$

$$cl(\mathbf{CF}) \subset cl(\mathbf{F}^*\mathbf{F}) \ \text{ y } \ cl(\mathbf{CF}^*) \subset cl(\mathbf{FF}^*). \tag{5}$$

Teniendo en cuenta la hipótesis y (1), el teorema 24^b implica además que $cl(\mathbf{F}^*\mathbf{F}) \subset cl(\mathbf{F}^*)$ y $cl(\mathbf{FF}^*) \subset cl(\mathbf{F})$; al juntar estas inclusiones con (5), obtenemos:

$$cl(\mathbf{CF}) \subset cl(\mathbf{F}^*) \ \text{ y } \ cl(\mathbf{CF}^*) \subset cl(\mathbf{F}). \tag{6}$$

Las fórmulas (4) y (6) proporcionan: $cl(\mathbf{F}) \subset cl(\mathbf{C}) \cdot cl(\mathbf{F}^*)$ y $cl(\mathbf{CF}^*) \subset cl(\mathbf{C}) \cdot cl(\mathbf{F})$; como en virtud del teorema 21^b,

$$cl(\mathbf{C}) \cdot cl(\mathbf{F}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*) \ \text{ y } \ cl(\mathbf{C}) \cdot cl(\mathbf{F}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}),$$

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

y se concluye que

$$cl(\mathbf{CF}) \subset cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*) \ \ y \ \ cl(\mathbf{CF}^*) \subset cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}). \tag{7}$$

De (3) y (7) se deduce inmediatamente:

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*) = cl(\mathbf{CF}) = cl(\mathbf{CF}^*). \tag{8}$$

El corolario 22, si en él reemplazamos $\mathbf{F}$ por $\mathbf{C} \overset{\circ}{+} F$, $\mathbf{G}$ por $\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*$ y $\mathbf{H}$ por $\mathbf{F}^*$, nos conduce, según (8) a:

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*). \tag{9}$$

Apliquemos finalmente el teorema 24^d; poniendo $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{F}^*$; en virtud de la hipótesis y de (1) conclumos que $cl(\mathbf{FF}^*) = cl(\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*)$ de donde por el corolario 22:

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{FF}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*). \tag{10}$$

La fórmula (8) deducida para toda operación monótona y adjuntiva, permiten según (2) en particular cambiar $\mathbf{F}$ por de $\mathbf{EF}^*$; se obtiene pues: $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{FF}^*) = cl(\mathbf{CFF}^*)$ de donde en virtud de (10):

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*) = cl(\mathbf{CFF}^*). \tag{11}$$

Las igualdades (8), (9), y (11) constituyen la fórmula por demostrar

^{b}) En virtud de los lemas 16^c, 17^a y 13 se tiene $\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{F} \in \mathfrak{M}$ e $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}$, de donde poniendo en ^{a}) $\mathbf{F}$ en vez de $\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}$ y teniendo en cuenta el lema $19^{d,j}$, se obtiene:

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*).$$

Usando el teorema 23^b resulta la fórmula que se busca.

De los teoremas 24 y 28 se pueden deducir ciertas consecuencias de un caracter más general. Consideremos una clase arbitraria $\mathfrak{F}$ compuesta exclusivamente de operaciones monótonas y adjuntivas y agreguemos a esta clase, si se quiere, la operación $\mathbf{C}$ que es monótona pero no adjuntiva. Con ayuda de la adición y de la multiplicación relativa se pueden formar de las operaciones de la clase $\mathfrak{F}$, resp. $\{\mathbf{C}\}+\mathfrak{F}$, diversas operaciones más; hemos convenido en designar con el símbolo $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$, respectivamente $\mathfrak{B}(\{\mathbf{C}\}+\mathfrak{F})$ la clase de todas las operaciones formadas así (véase definición 11^c). Ahora bien, generalizar los resultados expresados por los teoremas 24^d y 28^a, se puede mostrar que en el curso de tal estudio de las clases cerradas respecto a las operaciones consideradas uno se puede restringir a sólo considerar operaciones de estructura bastante simples, a saber, las que se obtienen de las clase primitiva $\mathfrak{F}$, de sus operaciones dobles y de las operaciones $\mathbf{C}$ e $\mathbf{I}$ por adición únicamente. En símbolos que se introdujeron en la definición 11, se pueden especialmente demostrár los siguientes teoremas:

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

A. Si $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M} \cdot \mathrm{E}_{\mathbf{F}}[\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}]$ se tiene $\mathrm{E}_{cl(\mathbf{G})}[\mathbf{G} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{F})] = \mathrm{E}_{cl(\mathbf{G})}[\mathbf{G} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{F})]$.

B. Si $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M} \cdot \mathrm{E}_{\mathbf{F}}[\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}]$ y $\mathfrak{G} = \mathrm{E}_{\mathbf{F}^*}[\mathbf{F} \in \mathfrak{F}]$, se tiene

$$\underset{cl(\mathbf{G})}{\mathrm{E}}[\mathbf{G} \in \mathfrak{B}(\{\mathbf{C}\} + \mathfrak{F})] = \underset{cl(\mathbf{G})}{\mathrm{E}}[\mathbf{G} \in \mathfrak{S}(\{\mathbf{I}, \mathbf{C}\} + \mathfrak{F} + \mathfrak{G})] = \{cl(\mathbf{I}), cl(\mathbf{C})\} + \underset{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{G})}{\mathrm{E}}[\mathbf{G} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{F})] + \underset{cl(\mathbf{G})}{\mathrm{E}}[\mathbf{G} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})].$$

En el caso particular donde la clase $\mathfrak{F}$ consta de una sola operación, los teoremas A y B propician los corolarios siguientes:

C. Si $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$ y $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$, se tiene $\mathrm{E}_{cl(\mathbf{G})}[\mathbf{G} \in \mathfrak{B}(\{\mathbf{F}\})] = \{cl(\mathbf{F})\}$.

D. Si $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$ y $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$, se tiene

$$\underset{cl(\mathbf{G})}{\mathrm{E}}[\mathbf{G} \in \mathfrak{B}(\{\mathbf{C}, \mathbf{F}\})] = \{cl(\mathbf{I}), cl(\mathbf{C}), cl(\mathbf{F}), cl(\mathbf{F}^*), cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}), cl(\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*)\}.$$

Además se puede suprimir en el corolario C la hipótesis: $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$, obteniendo asi una generalización del teorema 25. Limitándonos a las operaciones de la clase $\mathfrak{P}(\{C, F\})$ (véase la def 11^b), el corolario D puede ser desarrollado y completado como sigue:

E ^{a}) $\mathfrak{P}(\{\mathbf{C}, \mathbf{F}\}) = \{\mathbf{I}, \mathbf{C}\} + \mathfrak{P}(\{\mathbf{F}, \mathbf{F}^*\}) + \mathrm{E}_{\mathbf{CG}}[\mathbf{G} \in \mathfrak{P}(\{\mathbf{F}, \mathbf{F}^*\})]$;

^{b}) si $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$ e $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$, se tiene

$$\underset{cl(\mathbf{G})}{\mathrm{E}}[\mathbf{G} \in \mathfrak{P}(\{\mathbf{F}, \mathbf{F}^*\})] = \{cl(\mathbf{F}), cl(\mathbf{F}^*), cl(\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{F}^*)\} \ \ y$$

$$\underset{cl(\mathbf{CG})}{\mathrm{E}}[\mathbf{G} \in \mathfrak{P}(\{\mathbf{F}, \mathbf{F}^*\})] = (cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F})).$$

No voy a dar aquí la demostración de estos teoremas.

El siguiente teorema merece mención por su interes especial, aunque no tendrá aplicación en lo que sigue:

Teorema 29. *Si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$ *y* $\mathfrak{K} \subset cl(\mathbf{F})$, *se tiene* $\Pi(\mathfrak{K}) \in cl(\mathbf{F})$

Sea $\mathbf{X} \in \mathfrak{K}$. Se tiene claramente $\Pi(\mathfrak{K}) \subset \mathbf{X}$; como la operación $\mathbf{F}$ es monótona se concluye por el lema 15^a que $\mathbf{F}\Pi(\mathfrak{K}) \subset \mathbf{F}(\mathbf{X}))$. Pero, puesto que este razonamiento vale para una clase arbitraria de $\mathfrak{K}$, se obtiene de ello la fórmula:

$$\mathbf{F}\Pi(\mathfrak{K}) \subset \prod_{\mathbf{X} \in \mathfrak{K}} \mathbf{F}(\mathbf{X}). \tag{1}$$

Traduccion: Pref. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Como por otro lado $\mathfrak{K} \subset cl(\mathbf{F})$ se tiene de conformidad con la definición 16:

$$\prod_{\mathbf{X}\in\mathfrak{K}} \mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \prod_{\mathbf{X}\in\mathfrak{K}} \mathbf{X} = \Pi(\mathfrak{K}). \tag{2}$$

Las fórmulas (1) y (2) dan inmediatamente: $\mathbf{F}\Pi(\mathfrak{K}) \subset \Pi(\mathfrak{K})$, de donde, por la definición 16:

$$\Pi(\mathfrak{K}) \in cl(\mathbf{F}), \text{l.q.q.d.}$$

Corolario 30. *Si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$*, a toda clase de conjuntos* $\mathbf{K}$ *corresponde una clase* $\mathbf{L}$ *que verifica las fórmulas:* $\mathbf{L} \in V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{F})$ *y* $V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{F}) \subset V(\mathbf{L})$*.*

Vamos a escribir: $\mathfrak{K} = V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{F})$ y $\mathbf{L} = \Pi(\mathfrak{K})$. Tomando en cuenta la definición 5^c, se concluye inmediatamente que $\mathbf{L} \in V(\mathbf{K})$ y que $V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{F}) \subset V(\mathbf{L})$; además el teorema 29 proporciona: $\mathbf{L} \in cl(\mathbf{F})$. Por tanto, $\mathbf{L}$ es la clase que se busca.

Hay que notar que la hipótesis: $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$ tiene un papel esencial en los teoremas 29 y 30; se le podía suprimir, sin embargo, si se hubiese convenido designar $cl(\mathbf{F})$ a la familia de todas las clases cerradas en el sentido más estrecho con respecto a la operación $\mathbf{F}$ (véase pág. 26).

De acuerdo con el corolario 30, en la hipótesis de que $\mathbf{F}$ es una operación monótona puede hacerse corresponder a toda clase de conjuntos $\mathbf{K}$, la clase más pequeña $\mathbf{L}$ que contenga a $\mathbf{K}$ y sea cerrada respecto a $\mathbf{F}$. En el caso más general poco puede decirse de la naturaleza de esta clase. Sólo en las hipótesis especiales se puede establecer algunas propiedades más profundas de la clase $\mathbf{L}$; se tiene por ejemplo el teorema siguiente:

Teorema 31. *Si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}_\beta$*, donde* $cf(\beta) = \beta$*, y si para toda clase* $\mathbf{X}$ se tiene $\overline{\overline{\mathbf{F}(\mathbf{X})}} \leq (\overline{\overline{\mathbf{X}}})^{\aleph_\beta}_{\smile}$ *entonces a toda clase de conjuntos* $\mathbf{K}$ *tal que* $\overline{\overline{\mathbf{K}}} \geq 2$ corresponde *una clase* $\mathbf{L}$ *que verifica las fórmulas:*

$$\mathbf{L} \in V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{F}), \quad V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{F}) \subset V(\mathbf{L}) \ \text{ y } \overline{\overline{\mathbf{L}}} \leq (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\aleph_\beta}_{\smile}.$$

Demostración. Definamos por recurrencia una función transfinita de clases de conjuntos $\mathbf{K}_\xi$ del tipo ω_β, escribiendo

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}, \tag{1}$$

$$\mathbf{K}_\xi = \mathbf{F}\left(\sum_{\eta<\xi} \mathbf{K}_\eta\right) \ \text{ para } 0 < \xi < \omega_\beta; \tag{2}$$

además sea

$$\mathbf{L} = \sum_{\xi<\omega_\beta} \mathbf{K}_\xi. \tag{3}$$

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Consideremos un conjunto arbitrario X tal que

$$X \in \mathbf{F}(\mathbf{L}). \tag{4}$$

Como por hipótesis $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}_\beta$, el lema 15^a proporciona: $\mathbf{F}(\mathbf{L}) = \sum_{\mathbf{Y} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{L})} \mathbf{F}(\mathbf{Y})$, en virtud de (4) se concluye que existe una clase $\mathbf{Y}$ de conjuntos que verifican las fórmulas:

$$X \in \mathbf{F}(\mathbf{Y}) \tag{5}$$

y $\mathbf{Y} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{L})$, o en otras palabras (véase la definición 5^b)

$$\mathbf{Y} \subset \mathbf{L} \text{ y } \overline{\overline{\mathbf{Y}}} < \aleph_\beta. \tag{6}$$

Tomando en cuenta la hipótesis y (3), se obtiene de (6): $\overline{\overline{\mathbf{Y}}} < \aleph_{cf(\beta)}$ y $\mathbf{Y} \subset \sum_{\xi<\omega_\beta} \mathbf{K}_\xi$. De conformidad con el lema 3^c (para $B = \mathbf{Y}$, $\alpha = \beta$ y $F_\xi = \mathbf{K}_\xi$), estas fórmulas implican la existencia de un número ordinal ξ tal que

$$0 < \xi < \omega_\beta \ \text{ y } \mathbf{Y} \subset \sum_{\eta<\xi} \mathbf{K}_\eta. \tag{7}$$

La operación $\mathbf{F}$ es por hipótesis semiaditiva y con más razón, monótona (lema 16^a). Por consiguiente según el lema 15^a, las fórmulas (7) implican: $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) \subset \mathbf{F}(\sum_{\eta<\xi} \mathbf{K}_\eta)$, de donde, según (2) $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) \subset \mathbf{K}_\xi$; en virtud de (3) se obtiene

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}) \subset \mathbf{L}. \tag{8}$$

Las fórmulas (5) y (8) dan de inmediato:

$$X \in \mathbf{L}. \tag{9}$$

Así hemos mostrado que (4) siempre trae consigo (9). Se tiene pues la inclusión $\mathbf{F}(\mathbf{L}) \subset \mathbf{L}$, de donde por la definición 16 $\mathbf{L} \in cl(\mathbf{F})$; como además, por (1) y (3), $\mathbf{K} \subset \mathbf{L}$, se llega a la fórmula:

$$\mathbf{L} \in \boldsymbol{V}(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{F}). \tag{10}$$

Pero se puede probar que $\mathbf{L}$ es la mas pequeña clase de la familia $\boldsymbol{V}(\mathbf{K})$. $cl(\mathbf{F})$. Con este fin consideremos una clase arbitraria $\mathbf{X}$ tal que

$$\mathbf{X} \in \boldsymbol{V}(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{F}). \tag{11}$$

Por inducción fácil se obtiene la fórmula:

$$\mathbf{K}_\xi \subset \mathbf{X} \qquad \text{para } \xi < \omega_\beta. \tag{12}$$

En efecto, en virtud de (1) y (11), el número $\xi = 0$ verifica esta fórmula. Dése ahora un número ξ, $0 < \xi < \omega_\beta$ y admitamos que todos los números $\eta < \xi$ cumplen con la fórmula (12). Se tiene pues $\sum_{\eta<\xi} \mathbf{K}_\beta \subset \mathbf{X}$; siendo monótona la función $\mathbf{F}$ (como se dijo antes), se concluye del lema 15^a que $\mathbf{F}(\sum_{\eta<\xi} \mathbf{K}_\eta) \subset \mathbf{F}(\mathbf{X})$, de donde en razón de (2) $\mathbf{K}_\xi \subset \mathbf{F}(\mathbf{X})$. Ya que por otra parte, por la definición

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

16, la fórmula (11) da: $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}$, se obtiene de ello: $\mathbf{K}_\xi \subset \mathbf{X}$, lo que quiere decir que el número ξ tambien cumple la fórmula en cuestión.

La fórmula (12), establecida antes, implica que $\sum_{\xi<\omega_\beta} \mathbf{K}_\xi \subset \mathbf{X}$, de donde, según (3), $\mathbf{L} \subset \mathbf{X}$. Así se ve que la clase $\mathbf{L}$ está contenida en toda clase de la familia $\boldsymbol{V}(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{F})$; se tiene pues

$$\boldsymbol{V}(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{F}) \subset \boldsymbol{V}(\mathbf{L}). \tag{13}$$

En cuanto a la potencia de las clases $\mathbf{K}_\xi$ y $\mathbf{L}$, observamos en primer lugar las desigualdades

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}} \leq (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \tag{14}$$

y

$$\aleph_\beta \leq (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}, \tag{15}$$

que se deducen fácilmente del lema $5^{c,d}$ (tomando en cuenta la desigualdad: $\overline{\overline{\mathbf{K}}} \geq 2$).
Aplicando nuevamente el principio de inducción transfinita, establecemos la fórmula:

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}}_\xi \leq (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \text{ para } \xi < \omega_\beta. \tag{16}$$

En virtud de (1) y (14);

$$\text{el número } \xi = 0 \text{ verifica la fórmula (16).} \tag{17}$$

Sea ahora ξ un número ordinal tal que

$$0 < \xi < \omega_\beta \tag{18}$$

y supongamos que

$$\textit{todo número } \eta, \eta < \xi \textit{ verifica la fórmula (16).} \tag{19}$$

Resulta de (18) y (19) que $\overline{\overline{\sum_{\eta<\xi} \mathbf{K}_\eta}} \leq (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \cdot \overline{\xi} \leq (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \cdot \aleph_\beta$ de donde, en razón de (15), $\overline{\overline{\sum_{\eta<\xi} \mathbf{K}_\eta}} \leq (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$. Aplicando el lema 5^b, se concluye inmediatamente que: $\overline{\overline{(\sum_{\eta<\xi} \mathbf{K}_\eta)}}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \leq ((\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$. Como por hipótesis se tiene $cf(\beta) = \beta$, el lema 8^a (para $\mathfrak{a} = \overline{\overline{\mathbf{K}}}$ y $\gamma = \beta$) proporciona: $((\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} = (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$, y finalmente se obtiene la fórmula:

$$\left(\overline{\overline{\sum_{\eta<\xi} \mathbf{K}_\eta}}\right)^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \leq (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}. \tag{20}$$

por otra parte, de conformidad con la hipótesis del teorema, se tiene:

$$\overline{\overline{\mathbf{F}\left(\sum_{\eta<\xi} \mathbf{K}_\eta\right)}} \leq \left(\overline{\overline{\sum_{\eta<\xi} \mathbf{K}_\eta}}\right)^{\aleph_\beta},$$

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

de donde, por (2),

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}}_\xi \leq \left(\overline{\overline{\sum_{\eta<\xi} \mathbf{K}_\eta}} \right)^{\aleph_\beta}. \tag{21}$$

Las desigualdades (20) y (21) dan inmediatamente: $\overline{\overline{\mathbf{K}_\xi}} \leq (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\aleph_\beta}_{\smile}$; en otros términos

$$\textit{el número } \xi \textit{ verifica la fórmula } (16) \tag{22}$$

Así se demuestra que las condiciones (18) y (19) siempre implican (22); tomando en cuenta (17), se llega pues a la conclusión de que todo número $\xi < \omega_\beta$ verifica la fórmula (16).

De (3) y (16) fácilmente se deduce

$$\overline{\overline{\mathbf{L}}} \leq \sum_{\xi<\omega_\beta} \overline{\overline{\mathbf{K}_\xi}} \leq (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\aleph_\beta}_{\smile} \cdot \aleph_\beta,$$

de donde, en virtud de (15)

$$\overline{\overline{\mathbf{L}}} \leq (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\aleph_\beta}_{\smile}. \tag{23}$$

Las fórmulas (10), (13) y (23) prueban que la clase $\mathbf{L}$ satisface a todas las condiciones del teorema.

Se debe observar que con la hipótesis: $cf(\beta) < \beta$ la desigualdad $\overline{\overline{\mathbf{L}}} \leq (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\aleph_\beta}_{\smile}$, que figura en la hipótesis del teorema anterior, debe ser reemplazada por una desigualdad más debil, a saber:

$$\overline{\overline{\mathbf{L}}} \leq (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\aleph_\beta}_{\smile}.$$

El propósito de este artículo es la determinación de las potencias de las familias $cl(\mathbf{F})$ según la potencia del conjunto universal 1 en el caso de diferentes operaciones particulares $\mathbf{F}$, y entonces conviene hacer notar que en el caso general sólo se pueden establecer las cotas: ínferior y superior de esas potencias, como lo muestra el teorema siguiente sencillo, por demás:

Teorema 32. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$*, se tiene* $1 \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} \leq 2^{2^{\aleph_\alpha}}$*; existen operaciones* $\mathbf{F}$ *tales que* $\overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} = 1$ *y existen también operaciones* $\mathbf{F}$*, por ejemplo* $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{I}$*, tales que* $\overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$*.*

Demostración. En razón del lema 10^a se tiene para todo conjunto A : $\overline{\overline{\mathbf{U}\,\mathbf{U}(A)}} = 2^{\overline{\overline{\mathbf{U}(A)}}} = 2^{2^{\overline{\overline{A}}}}$ de donde, en particular $\overline{\overline{\mathbf{U}\,\mathbf{U}(1)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$. Juntando esta fórmula con los teoremas 20 y 23^a se obtiene de inmediato: $1 \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ y $\overline{\overline{cl(\mathbf{I})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$. Consideremos luego la operación $\mathbf{F}$ definida por la fórmula: $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{U}(1)$ para toda clase $\mathbf{X}$. Con ayuda de la definición 16 fácilmente se verifica que $cl(\mathbf{F}) = \{\mathbf{U}(1)\}$, por lo tanto que $\overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} = 1$, con lo cual se ha llevado a cabo la demostración del teorema.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Suelen presentarse operaciones $\mathbf{F}$ que verifican la fórmula: $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{U\Sigma}$ (es decir $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{U}(\mathbf{\Sigma}(\mathbf{X}))$ para toda clase $\mathbf{X}$). Y limitándose a operaciones como éstas y a sus operaciones dobles, puede establecerse para la potencia de $cl(\mathbf{F})$ una delimitación más precisa que la del teorema 32, a saber $2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} \leq 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ (véase el teorema 49, §5).

Teorema 33. $\overline{\overline{cl(\mathbf{F}^*)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{F})}}$.

Demostración. La función $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ es biunívoca; en efecto si, $\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{C}(\mathbf{Y})$, se tiene $\mathbf{C}\,\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{C}\,\mathbf{C}(\mathbf{Y})$, luego según el lema 18^a y la definición 13 se obtiene $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. De aquí que las familias $cl(\mathbf{F})$ y $\overline{\mathbf{C}}(cl(\mathbf{F}))$ tienen sus potencias iguales, de donde por el teorema 26 $\overline{\overline{cl(\mathbf{F}^*)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{F})}}$, l.q.q.d.

No hace falta explicar la importancia del teorema precedente para los problemas fundamentales de estas investigaciones.

Cuando se trata de determinar la potencia de la familia $cl(\mathbf{F})$ en casos particulares, el lema siguiente es a veces de gran utilidad:

Lema 34.

^{a}) *Si* $\mathbf{F}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{F}$ *y* $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$ *y si además la clase de conjuntos* $\mathbf{K}$ *verifica la fórmula* $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset E_{\mathbf{X}}[\mathbf{K} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}]$*, se tiene* $\overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} \geqslant 2^{\overline{\overline{\mathbf{K}}}}$.

^{b}) *Si además* $\overline{\overline{\mathbf{1}}} = \aleph_\alpha$ *y* $\overline{\overline{\mathbf{K}}} = 2^{\aleph_\alpha}$*, se tiene* $\overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Demostración.

^{a}) *Consideremos dos clases* $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ sujetas a las condiciones:

$$X \in U(\mathbf{K}), \quad Y \in U(\mathbf{K}) \tag{1}$$

y

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{Y}). \tag{2}$$

Según la hipótesis, las fórmulas (1) dan:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X} \text{ y } \mathbf{K} \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{Y})) \subset \mathbf{Y}. \tag{3}$$

Como $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$, por el lema 17^t $\mathbf{X} \subset \mathbf{F}(\mathbf{X})$ y $\mathbf{Y} \subset \mathbf{F}(\mathbf{Y})$, por lo tanto en virtud de (1) $\mathbf{X} \subset \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X})$ y $\mathbf{Y} \subset \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Y})$; teniendo en cuenta (3), se concluye que

$$\mathbf{K} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}) \text{ y } \mathbf{Y} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Y}). \tag{4}$$

De (2) y (4) se obtiene desde luego la igualdad:

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y}. \tag{5}$$

Así las fórmulas (1) y (2) constantemente implican (5). Resulta de ello que la función $\mathbf{F}$ transforma biunívocamente la familia $\mathbf{U}(\mathbf{K})$ en $\overline{\mathbf{F}}\,\mathbf{U}(\mathbf{K})$ en $\overline{\mathbf{F}}U(\mathbf{K})$; son familias, por tanto de igual potencia, de donde por el lema 10^a

$$\overline{\overline{\overline{\mathbf{F}}\mathbf{U}(\mathbf{K})}} = 2^{\overline{\overline{\mathbf{K}}}} \tag{6}$$

Por otra parte la conclusión evidente: $\mathbf{K} \subset \mathbf{U}(1)$ implica que $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{U}\,\mathbf{U}(1)$ y $\overline{\mathbf{F}}\,\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset \overline{\mathbf{F}}\,\mathbf{U}\,\mathbf{U}(1)$; con ayuda del teorema 23^d y en virtud de la hipótesis concluimos que

$$\overline{\mathbf{F}}\,\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset cl(\mathbf{F}). \tag{7}$$

las fórmulas (6) y (7) de inmediato proporcíonan:

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} \geq 2^{\overline{\overline{\mathbf{K}}}}$$

l.q.q.d.

^{b}) resulta fácilmente de ^{a}) y del teorema 32.

Sería deseable tener las generalizaciones de este lema, en que las condíciones concernientes a la operación $\mathbf{F}$ (sobre todo la condición: $\mathbf{F}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{F}$) sean reemplazados por condiciones menos restríctivas.

En cuanto a las operaciones $\mathbf{F}$ que son simultáneamente iterativas, adjuntivas y monótonas, se puede demostrar la equivalencia de las fórmulas: $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset \mathrm{E}_{\mathbf{X}}[\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}]$ y $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \cdot \mathrm{E}_{\mathbf{X}}[\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{K})] = \{\mathbf{K}\}$, de las cuales la primera figura en la hipótesis del lema 34; las clases $\mathbf{K}$ que verifican la segunda fórmula podrían ser llamadas *irreducibles respecto a la operación* $\mathbf{F}$. Es fácil ver que toda subclase $\mathbf{X}$ de una clase $\boldsymbol{K}$ que cumpla la hipótesis del lema 34^a tambien cumple esta hipótesis; esta observación es susceptible de facilitar la determinación de la potencia de la familia de las clases de esta especie.

El lema 34 proporciona un método para determinar la potencia de la familia $cl(\mathbf{F})$ en el caso donde la operación $\mathbf{F}$ es iterativa y adjuntiva. Este método que utilizarémos varias veces, consiste en construír una clase $\boldsymbol{K}$ que cumple con las condiciones del lema 34^a y tenga la mas grande potencia posible es decir $2^{\aleph_\alpha}$ (donde $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$); resulta entonces del lema 34^b que la familia $cl(\mathbf{F})$ es también de la mayor potencia posible, es decir $2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Es manifiesto que este método no es aplicable siempre: falla en todos los casos donde la clase $\mathbf{K}$ sujeta a las condiciones del lema, y que sabemos construír es de potencia $< 2^{\aleph_\alpha}$. Aunque en este caso todavía sea posible conseguir con ayuda del lema 34^a una delimitación inferior de la potencia de $cl(\mathbf{F})$, es normalmente más fácil alcanzar este resultado por otro camino. Así, en el caso general, la clase vacía puede ser la única clase $\boldsymbol{K}$ que verifica la fórmula: $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset \mathrm{E}_{\mathbf{X}}[\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}]$; el lema 34^a no da entonces mas que una delimitación banal: $\overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} \geq 1$. En la hipótesis de que $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{U}\,\Sigma$, se cumple esta fórmula, como se ve fácilmente por toda clase de conjuntos ajenos.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Por consiguiente, entre las clases de potencial $\aleph_\alpha$, por ejemplo $\mathbf{K} = \overline{J}(1) = \mathrm{E}_{\{x\}}[x \in 1]$, de donde en virtud del lema 34^a $\overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} \geq 2^{\aleph_\alpha}$; pero la misma delimitación sera obtenida en el teorema 49 de §5, por un camino más simple.

El método recién descrito se usará de inmediato para determinar la potencia de la familia $cl(\mathbf{C})$.

Lema 35. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$*, existe una clase de conjuntos* $\mathbf{K}$ *que verifican las fórmulas:* $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset E_{\mathrm{X}}[\mathbf{K} \cdot \mathbf{C}(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}]$ *y* $\overline{\overline{\mathbf{K}}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Consideremos un elemento arbitrario a de 1 y escribamos:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}(1 - \{a\}). \tag{1}$$

De (1) resulta que para todo conjunto Y, la fórmula $Y \in \mathbf{K}$, implica: $a \in 1 - Y$ luego $1 - Y \notin \mathbf{K}$. Como según la definición 15 $\mathbf{C}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}_{1-Y}[Y \in \mathrm{X}]$, se concluye que para toda clase X contenida en $\boldsymbol{K}$ se tiene $\mathbf{K} \cdot \mathbf{C}(\mathrm{X}) = 0$ y necesariamente

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{C}(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}.$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset \underset{\mathrm{X}}{\mathrm{E}}[\mathbf{K} \cdot \mathbf{C}(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}]. \tag{2}$$

Después tenemos $\overline{\overline{1 - \{a\}}} = \aleph_\alpha - 1 = \aleph_\alpha$; la fórmula (1) proporciona por tanto en virtud del lema 10^a:

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}} = 2^{\aleph_\alpha}. \tag{3}$$

En razón de (2) y (3), $\boldsymbol{K}$ es la clase que se busca.

Teorema Fundamental I. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$*, se tiene* $\overline{\overline{cl(\mathbf{C})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Demostración. Sea $\boldsymbol{K}$ una clase arbitraria que cumpla con la tesis del lema previo. Conforme a las definiciones 9^a y 13 ocurre

$$\mathbf{K} \cdot [\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}](\mathrm{X}) = \mathbf{K} \cdot (\mathrm{X} + \mathbf{C}(\mathrm{X})) \subset \mathrm{X} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{C}(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}$$

para $\mathrm{X} \subset \mathbf{K}$; por consiguiente, se pueden transformar las fórmulas del lema 35 de la manera que sigue:

$$\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset \underset{\mathrm{X}}{\mathrm{E}}[\mathbf{K} \cdot [\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}](\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}] \text{ y } \overline{\overline{\mathbf{K}}} = 2^{\aleph_\alpha}. \tag{1}$$

La operación $\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}$ es evidentemente adjuntiva ($\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}$) y además iterativa (como lo prueba el lema 18^c), y entonces se puede aplicar el lema 34^b, poniendo ahí: $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}$; en virtud de (1) se obtiene de ello:

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}. \tag{2}$$

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico
MEXICO

Como en razón del teorema 23^b, $cl(\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}) = cl(\mathbf{C})$, al fórmula (2), proporciona:

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{C})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}} \quad \text{l.q.q.d.}$$

Aquí nos interesan exclusivamente los conjuntos infinitos, si bien algunos modos de razonar, y algunos resultados, se prestan luego de modificaciones convenientes a extensiones a los conjuntos finitos. Hay que observar en particular que en el teorema 32 y el lema 34, el número $\aleph_\alpha$ puede ser reemplazado por un número cardinal $\mathfrak{a}$ completamente arbitrario. En cuanto al teorema fundamental I, se le puede extender a números finitos bajo la forma que sigue:

Si $\overline{\overline{1}} = \mathfrak{a} > 0$, *se tiene* $2^{2^{\mathfrak{a}-1}} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{C})}} \leq 2^{2^{\mathfrak{a}}}$.

§4. Operación T. Clases hereditarias de conjuntos

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

A partír de este sección nuestras investigaciones sólo conciernen a operaciones especiales.

La operación que será primordial y que designaré mediante $\mathbf{T}$, consiste en agregar a una clase de conjuntos $\boldsymbol{K}$ dada todos los subconjuntos de los elementos de esta clase.

Las clases de conjuntos cerradas con respecto a esta operación pueden llamarse en el lenguaje ordinario *clases hereditarias*

Definición 17. $\mathbf{T}(\mathbf{K}) = \sum_{X \in \mathbf{K}} \mathbf{U}(X)$.

Observemos las propiedades siguientes de la operación $\mathbf{T}$:

Teorema 36.

a) $\mathbf{T} \in \mathfrak{U}$, *luego* $\mathbf{T} \in \mathfrak{U}_\beta$ *y* $\mathbf{T} \in \mathfrak{M}$;

b) $\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}$ *y* $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}$;

c) $\mathbf{T}(0) = 0$;

d) $\mathbf{T}(\{A\}) = \mathbf{U}(A)$, *en particular* $\mathbf{T}(\{0\}) = \{0\}$;

e) *si* $\mathbf{K} \neq 0$, *se tiene* $0 \in \mathbf{T}(\mathbf{K})$;

f) *si* $1 \in \mathbf{K}$, *ocurre* $\mathbf{T}(\mathbf{K}) = \mathbf{U}(1)$

g) $E_{\{x\}}[x \in \Sigma(\mathbf{K})] \subset \mathbf{T}(\mathbf{K})$;

h) *si* $\Sigma(\mathbf{K}) \in \mathbf{K}$, *entonces* $\mathbf{T}(\mathbf{K}) = \mathbf{U}\Sigma(\mathbf{K})$.

Demostración. Es evidente.

Fuera de la operación $\mathbf{T}$, será la operación $\mathbf{T}^*$, doble de $\mathbf{T}$, la que nos ocupe aquí; como lo veremos, consiste en agregar a una clase $\boldsymbol{K}$ dada, todos los supraconjuntos de los elementos de esta clase.

Teorema 37. $\mathbf{T}^*(\mathbf{K}) = \sum_{X \in \mathbf{K}} \boldsymbol{V}(X)$.

Demostración. Resultá de las definiciones 15 y 17.

Ciertas propiedades de la operación $\mathbf{T}^*$ se pueden deducir fácilmente con ayuda del lema 19 a partir de las propiedades correspondientes de la operación $\mathbf{T}$ que acaban de ser formuladas en el teorema $36^{a,b,c}$. Daré aquí algunas propiedades más de la operación $\mathbf{T}^*$

Teorema 38.

$^{a})$ *Si* $\mathbf{K} \neq 0$*, se tiene* $1 \in \mathbf{T}^*(\mathbf{K})$*;*

$^{b})$ *si* $0 \in \mathbf{K}$*, se tiene* $\mathbf{T}^*(\mathbf{K}) = \boldsymbol{V}(0) = \mathbf{U}(1)$*;*

$^{c})$ *para cualesquiera clases* $\mathbf{K}$ *y* $\mathbf{L}$*, son equivalentes las tres fórmulas:* $\mathbf{T}(\mathbf{K}) \cdot \mathbf{L} = 0$*,* $\mathbf{T}(\mathbf{K}) \cdot \mathbf{T}^*(\mathbf{L}) = 0$ *y* $\mathbf{K} \cdot \mathbf{T}^*(\mathbf{L}) = 0$*;*

$^{d})$ $\mathbf{T}\,\mathbf{T}^*(0) = 0 = \mathbf{T}^*\mathbf{T}(0)$*;* $\mathbf{T}\,\mathbf{T}^*(\mathbf{K}) = \mathbf{U}(1) = \mathbf{T}^*\mathbf{T}(\mathbf{K})$ *para* $\mathbf{K} \neq 0$*;*

$^{e})$ $\mathbf{T}\,\mathbf{T}^* \overset{\circ}{=} \mathbf{T}^*\mathbf{T} \overset{\circ}{=} \mathbf{C}\,\mathbf{T}\,\mathbf{T}^*$*;*

$^{f})$ *para que* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}\mathbf{T}^*$*, es necesario y suficiente que* $\mathbf{F}(0) = 0$*.*

Demostración.

$^{a})$ y $^{b})$ se obtienen de inmediato del teorema 37.

$^{c})$ Supongamos que $\mathbf{T}(\mathbf{K}) \cdot \mathbf{T}^*(\mathbf{L}) \neq 0$; sea por ejemplo $\mathbf{Z} \in \mathbf{T}(\mathbf{K}) \cdot \mathbf{T}^*(\mathbf{L})$. Por la definición 17 y el teorema 37, existen, por tanto, conjuntos X y Y tales que $X \in \mathbf{K}$, $Y \in \mathbf{L}$ y $Y \subset Z \subset X$, de donde $Y \subset Z$. Aplicando una vez más la definición 17 y el teorema 37 se obtiene: $X \in \mathbf{K} \cdot \mathbf{T}^*(\mathbf{L})$ y $Y \in \mathbf{T}(\mathbf{K}) \cdot \mathbf{L}$; consecuentemente $\mathbf{K} \cdot \mathbf{T}^*(\mathbf{L}) \neq 0$ y $\mathbf{T}(\mathbf{K}) \cdot \mathbf{L} \neq 0$.

Se concluye por contraposición de este razonamiento que cada una de las fórmulas $\mathbf{T}(\mathbf{K}) \cdot \mathbf{L} = 0$ y $\mathbf{K} \cdot \mathbf{T}^*(\mathbf{L}) = 0$ implica: $\mathbf{T}(\mathbf{K}) \cdot \mathbf{T}^*(\mathbf{L}) = 0$. Teniendo en cuenta las inclusiones: $\mathbf{K} \subset \mathbf{T}(\mathbf{K})$ y $\mathbf{L} \subset \mathbf{T}^*(\mathbf{L})$ (que deducimos del teorema 36^b con ayuda de los lemas 19^j y 17^f), se convence uno que las implicaciones inversas también se presentan. Las tres fórmulas son por tanto equivalentes, l.q.q.d.

$^{d})$ En virtud del teorema 36^c y del lema 19^k se obtiene $\mathbf{T}(0) = 0 = \mathbf{T}^*(0)$, luego $\mathbf{T}\mathbf{T}^*(0) = 0 = \mathbf{T}^*\mathbf{T}(0)$. Si por el contrario $\mathbf{K} \neq 0$, se tiene $1 \in \mathbf{T}^*(\mathbf{K})$ y $0 \in \mathbf{T}(\mathbf{K})$ (teoremas 38^a y 36^c), de donde en razón de los teoremas 36^f y 38^b $\mathbf{T}\mathbf{T}^*(\mathbf{K}) = \mathbf{U}(1) = \mathbf{T}^*\mathbf{T}(\mathbf{K})$. Las fórmulas $^{d})$ quedan pues establecidas.

$^{e})$ y $^{f})$ resultan de $^{d})$ y del lema 18^d.

Dos operaciones arbitrarias $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ que cumplen la condición siguiente: *las fórmulas* $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{Y} = 0$ y $\mathbf{X} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{Y}) = 0$ *son equivalentes para* cualesquiera clases $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$, pueden llamarse *conjugadas*; conforme al teorema 38^c, $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}^*$ son por tanto operaciones conjugadas. Yo había demostrado a este respecto el teorema general siguiente:[1]

[1]Vease mi comunicacion: *Sobre algunas propiedades características de las imágenes de conjuntos* en los Comptes-rendus des séances de la Soc. Pol. de Math, Section de Varsovia, Ann. de la Soc. Pol. de Math VI, pág. 127-128.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

La *aditividad total de una operación* $\mathbf{F}$ *dada es condición necesaria y suficiente a la vez para que* $\mathbf{F}$ *admita una operación conjugada.*

He omitido, por supuesto, en los teoremas 36 y 38 varias propiedades elementales de las operaciones $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}^*$ de las que no haré uso en lo que sigue como por ejemplo $\mathbf{T} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{U}\Sigma$, $\mathbf{T}^* \overset{\circ}{\subset} V\Pi$; $\Sigma\mathbf{T} \overset{\circ}{=} \Sigma$, $\Pi\,\mathbf{T} \overset{\circ}{=} \Pi$; $\overline{\overline{\Sigma(\mathbf{K})}} \leq \overline{\overline{\mathbf{T}(\mathbf{K})}} \leq 2^{\overline{\overline{\Sigma(\mathbf{K})}}}$; $\mathbf{T}^*J \overset{\circ}{=} V$; $\mathfrak{B}(\{\mathbf{C},\mathbf{T}\}) = \{\mathbf{I},\mathbf{C},\mathbf{T},\mathbf{T}^*,\mathbf{CT},\mathbf{CT}^*,\mathbf{TT}^*\}$ y $\mathfrak{B}(\{\mathbf{C},\mathbf{T}\}) = \mathfrak{G}\mathfrak{B}(\{\mathbf{C},\mathbf{T}\})$. Además, ciertas fórmulas que se muestran en los teoremas precedentes pueden ponerse en otra forma, menos intuitiva, pero más concisa, por ejemplo. $\mathbf{T} \overset{\circ}{=} \Sigma\overline{\mathbf{U}}$ (definición 17), $\mathbf{T}J \overset{\circ}{=} \mathbf{U}$ (teorema 36^d), $\bar{J}\Sigma \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}$, (teorema 36^g) y $\mathbf{T}^* \overset{\circ}{=} \Sigma\overline{V}$ (teorema 37); véase las observaciones dadas anteriormente en la pág. 24.

Es un hecho notable que las dos operaciones $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}^*$ satisfacen a todos los postulados que el *Sr. Kuratowski admitió en su tesis para la operación* cerradura[1]; una operación más de esta naturaleza es $\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \bar{J}\Sigma$.

En lo que sigue de esta sección se estudiarán clases cerradas respecto de las operaciones $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}^*$.

Teorema 39. $cl(\mathbf{T}^*) = E_{\mathrm{U}(1)-\mathrm{X}}[\mathrm{X} \in cl(\mathbf{T})]$.

Demostración. El teorema 38^c, si se escribe: $\mathbf{L} = \mathbf{U}(1) - \mathbf{T}(\mathbf{K})$, proporciona: $\mathbf{T}(\mathbf{K}) \cdot \mathbf{T}^*(\mathbf{U}(1) - \mathbf{T}(\mathbf{K})) = 0$; la función $\mathbf{T}^*$ admite como valores, clases de conjuntos, por lo cual se tiene evidentemente además $\mathbf{T}^*(\mathbf{U}(1) - \mathbf{T}(\mathbf{K})) \subset \mathbf{U}(1)$. Por consiguiente,

$$\mathbf{T}^*(\mathbf{U}(1) - \mathbf{T}(\mathbf{K})) \subset \mathbf{U}(1) - \mathbf{T}(\mathbf{K}). \tag{1}$$

En virtud del teorema 36^b y del lema 19^j se obtiene:

$$\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*, \tag{2}$$

de donde por el lema 17^f (para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{T}^*$)

$$\mathbf{U}(1) - \mathbf{T}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{T}^*(\mathbf{U}(1) - \mathbf{T}(\mathbf{K}));$$

juntando esta inclusión con (1), se concluye que

$$\mathbf{T}^*(\mathbf{U}(1) - \mathbf{T}(\mathbf{K})) = \mathbf{U}(1) - \mathbf{T}(\mathbf{K}) \quad \textit{para toda clase } \mathbf{K}\,. \tag{3}$$

De manera completamente análoga se establece la fórmula:

$$\mathbf{T}(\mathbf{U}(1) - \mathbf{T}^*(\mathbf{L})) = \mathbf{U}(1) - \mathbf{T}^*(\mathbf{L}) \text{ para toda clase } (\mathbf{L}). \tag{4}$$

Pero, sea $\mathbf{X}$ una clase arbitraria de $cl(\mathbf{T})$ y $\mathbf{Y} = \mathbf{U}(1) - \mathbf{X}$. En razón del teorema 23^c (para $\mathbf{F} = \mathbf{T}$) y 36^b tenemos $\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$; poniendo en la fórmula (3): $\mathbf{K} = \mathbf{X}$, se obtiene: $\mathbf{T}^*(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}$, luego, por la definición 16 $\mathbf{Y} \in cl(\mathbf{T}^*)$. Con la ayuda de las fórmulas (2) y (4) se prueba asimismo que a toda clase $\mathbf{Y}$ de $cl(\mathbf{T}^*)$ viene a corresponder una clase $\mathbf{X}$ (a saber $\mathbf{X} = \mathbf{U}(1) - \mathbf{Y}$) tal que $\mathbf{Y} = \mathbf{U}(1) - \mathbf{X}$ y $\mathbf{X} \in cl(\mathbf{T})$.

[1] Sobre la operación $\overline{A}$ del Analisis Situs, Fund. Math III, págs. 182-199

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

HEmos establecido la equivalencia de las condiciones siguientes: (a) $\mathbf{Y} \in cl(\mathbf{T}^*)$ y $\mathrm{X} \in cl(\mathbf{T})$. De aquí resulta inmediatamente la identidad buscada:

$$cl(\mathbf{T}^*) = \underset{\mathbf{U}(1)-\mathrm{X}}{\mathrm{E}}[\mathrm{X} \in cl(\mathbf{T})].$$

Sea $\mathfrak{H}$ es una familia de clases y por analogía completa con la definición 15 escribiamos: $\mathcal{C}(\mathfrak{H}) = \mathrm{E}_{\mathbf{U}(1)-\mathrm{X}}[\mathrm{X} \in \mathfrak{H}]$; el teorema 39 toma entonces la forma siguiente: $cl(\mathbf{T}^*) = cl(cl(\mathbf{T}))$; Es instructivo comparar esta identidad de la que se obtiene como caso particular del teorema 26: $cl(\mathbf{T}^*) = \overline{\mathbf{C}}(cl(\mathbf{T}))$; a pesar del parecido exterior de estas fórmulas, una de ellas expresa una propiedad especifica de la operación $\mathbf{T}$, mientras que la otra resulta de las propiedades mas generales de la noción de operación doble.

Para examinar la potencia de las familias $cl(\mathbf{T})$ y $cl(\mathbf{T}^*)$, hay que recordar previamente el lema siguiente debido a Knaster [1] que se formula aquí en términos un poco diferentes:

Lema 40. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, *existe una clase de conjuntos* $\mathbf{K}$ *que verifican las fórmulas* $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset E_{\mathrm{X}}[\mathbf{K} \cdot \mathbf{T}(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}]$, $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset E_{\mathrm{X}}[\mathbf{K} \cdot \mathbf{T}^*(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}]$ *y* $\overline{\overline{\mathbf{K}}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Esta demostración ya es conocida [2] y me limitaré a dar un esbozo.

La fórmula $\aleph_\alpha = 2 \cdot \aleph_\alpha$ implica la existencia de un conjunto A tal que $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{1 - A}} = \aleph_\alpha$. Se concluye que existe una función f que transforma biunívocamente el conjunto A en su complemento $1 - A : \overline{f}(A) = 1 - A$. Pongamos $F(X) = X + \overline{f}(A - X)$ para $X \subset A$ y $\mathbf{K} = \overline{F}\mathbf{U}(A)$. Es fácil demostrar que las fórmulas $Y \in \mathbf{K}$, $Z \in \mathbf{K}$ y $Z \subset Y$ implican siempre: $Y = Z$, luego que $\mathbf{K} \cdot \mathbf{U}(Y) = \{Y\}$ y $\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{V}(Z) = \{Z\}$ para todos los conjuntos Y y Z de la clase $\mathbf{K}$. Se obtiene de ahí con ayuda de la definición 17 y del teorema 37: $\mathbf{K} \cdot \mathbf{T}(\mathrm{X}) = \mathbf{K} \cdot \sum_{Y \in \mathrm{X}} \mathbf{U}(Y) = \sum_{Y \in \mathrm{X}} \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}(Y) = \sum_{Y \in \mathrm{X}} \{Y\} = \mathrm{X}$ y de manera semejante: $\mathbf{K} \cdot \mathbf{T}^*(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$ para toda subclase X de $\mathbf{K}$. Por consiguiente, la clase $\mathbf{K}$ verifica las fórmulas: $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset \mathrm{E}_{\mathrm{X}}[\mathbf{K} \cdot \mathbf{T}(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}]$ y $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset \mathrm{E}_{\mathrm{X}}[\mathbf{K} \cdot \mathbf{T}^*(\mathrm{X}) \cdot \mathrm{X}]$.

Por otra parte, se ve con facilidad que la función F es biunívoca, por tanto, que la clase $\mathbf{U}(A)$ es de potencia igual a la de su imagen $\overline{\mathbf{F}}\mathbf{U}(A) = \mathbf{K}$; en virtud del lema 10^a se concluye que $\overline{\overline{\mathbf{K}}} = 2^{\overline{\overline{A}}} = 2^{\aleph_\alpha}$. Así, $\mathbf{K}$, es la clase que se busca.

Como una consecuencia fácil del lema anterior se obtiene el

Teorema Fundamental II. *Si* $1 = \aleph_\alpha$, *tenemos*

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{T})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^*)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

Demostración. Por el lema $19^{i,j}$ siendo iterable y adjuntiva la operación $\mathbf{T}$ (teorema 36^{b}), la operación doble $\mathbf{T}^*$ también lo es. Se puede entonces aplicar dos veces el lema 34^b, poniendo $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{T}$ y luego $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{T}^*$; tomando en cuenta el lema 40, se llega de inmediato a la fórmula buscada: $\overline{\overline{cl(\mathbf{T})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^*)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Este teorema se debe a la colaboración del autor con el Sr. Lindernbaum.

[1] Ver C. Kuratowski. *Sobre la potencia de "los números de dimensiones" en el sentido de Frechet*, Fund. Math VII pág 205, nota v.

[2] Veáse la nota previo.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

Al analizar la demostración del teorema anterior se obtiene un teorema un tanto más general que se suele aplicar al caso de los conjuntos finitos.

Si $\overline{\overline{1}} = \mathfrak{a}$, *se tiene* $2^{2^{E(\frac{\mathfrak{a}}{2})}} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{T})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^*)}} \leq 2^{2^{\mathfrak{a}}}$ (*donde el símbolo* $E(\frac{\mathfrak{a}}{2})$) *denota el más grande* de los números $\mathfrak{r}$ que verifican la fórmula: $2 \cdot \mathfrak{r} \leq \mathfrak{a}$).

Hay que observar que la fórmula: $\overline{\overline{cl(\mathbf{T})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^*)}}$ establecida en el teorema fundamental II se obtiene fácilmente del teorema 39; por otro lado sólo presenta un caso particular del teorema 33.

En cuanto a las clases cerradas respecto de las dos operaciones $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}^*$ a la vez, se tiene el siguiente

Teorema 41.

^{a}) $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^*) = cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^*) = \{0, \mathbf{U}(1)\}$;

^{b}) *si* $\mathbf{H}(0) = 0$, *se tiene* $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{H}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{H}) = cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{H}) = \{0, \mathbf{U}(1)\}$.

Demostración.

^{a}) En virtud del teorema $36^{a,b}$, se puede recurrir al teorema 28^{a} (para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{T}$); teniendo en cuenta el teorema 38^{e} se concluye que $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^*) = cl(\mathbf{C}\,\mathbf{T}\,\mathbf{T}^*) = cl(\mathbf{T}\,\mathbf{T}^*)$. Asímismo poniendo en el teorema 24^{d}: $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{T}$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{T}^*$, se obtiene en razón del teorema $30^{a,b}$ y del lema 19^{j}: $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^*) = cl(\mathbf{T}\,\mathbf{T}^*)$. Pero, si se juntan la definición 16 y el teorema 38^{d} se convence uno sin dificultad de que solo hay dos clases de conjuntos cerrados respecto de la operación $\mathbf{T}\,\mathbf{T}^*$ a saber 0 y $\mathbf{U}(1) : cl(\mathbf{T}\,\mathbf{T}^*) = \{0, \mathbf{U}(1)\}$. Así se llega a la fórmula buscada:

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^*) = cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^*) = \{0, \mathbf{U}(1)\}.$$

^{b}) De conformidad con la definición 16 la fórmula $\mathbf{F}(0) = 0$, proporciona: $0 \in cl(\mathbf{H})$; y como además, según el teorema 20, $\mathbf{U}(1) \in cl(\mathbf{H})$, se obtiene: $\{0, \mathbf{U}(1)\} \subset cl(\mathbf{H})$. Por otro lado, el teorema 21^{b} (para $\mathbf{F} = \mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{H}$) implica: $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{H}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}) \cdot cl(\mathbf{H})$, de donde, en virtud de la fórmula ^{a}): $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{H}) = \{0, \mathbf{U}(1)\} \cdot cl(\mathbf{H})$, las otras partes de la fórmula b) se obtienen análogamente.

Dado que la fórmula $\mathbf{H}(0) = 0$ se cumple para todas las operaciones que nos interesan aquí, el teorema recién establecido nos permite desdeñar a las operaciones de la forma $\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{H}$, $\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{H}$ y $\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{H}$.

Teorema Fundamental III.

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^*)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^*)}} = 2.$$

Es concecuencia inmediata del teorema 41^{a}.

Dejamos que el lector examine las propiedades de la operación $\mathbf{T}^{\times}$ (es decir, de la segunda operación doble de $\mathbf{T}$; véase el final de §2) y en particular que establezca los siguientes teoremas:

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

A. Si $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, se tiene $\overline{\overline{cl(\mathbf{T}^\times)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ y $\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^\times)}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

B. $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^\times) = \{0, \mathbf{U}(1)\}$ y $\overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^\times)}} = 2$.

§5. Operación S. Clases aditivas de conjuntos.

Paso a la operación $\mathbf{S}$ que consiste en formular todos los conjuntos sumas de subclases cualesquiera de una clase de conjuntos $\boldsymbol{K}$ dada; las clases cerradas respecto de esta operación se llamarán a veces *clases aditivas*.

Definición 18. $\mathbf{S}(\mathbf{K}) = \overline{\Sigma}(\mathbf{U}(\mathbf{K}) - \{0\})$.

La operación $\mathbf{S}'(\mathbf{K}) = \overline{\Sigma}(\mathbf{U}(\mathbf{K}))$, que parece más natural, es menos cómoda a causa de la propiedad: $0 \in \mathbf{S}'(\mathbf{K})$, que se presenta para toda $\mathbf{K}$, luego aún para $\mathbf{K} = 0$. En consecuencia los teoremas $42^{c,d}$ y $43^{d,e}$ fallarían.

Ciertas propiedades elementales de la operación $\mathbf{S}$ se darán en el siguiente:

Teorema 42.

$^{a})$ $\mathbf{S} \in \mathfrak{M}$;

$^{b})$ $\mathbf{S}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{S}$ *e* $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}$;

$^{c})$ $\mathbf{S}(0) = 0$;

$^{d})$ $\Sigma\, \mathbf{S}(\mathbf{K}) = \Sigma(\mathbf{K})$ *y* $\Pi\, \mathbf{S}(\mathbf{K}) = \Pi(\mathbf{K})$;

$^{e})$ *si* $\mathbf{K} \neq 0$, *tenemos* $\Sigma(\mathbf{K}) \in \mathbf{S}(\mathbf{K})$;

f) si $\mathbf{K} \neq 0$, *y* $E_{\{x\}}[x \in \Sigma(\mathbf{K})] \subset \mathbf{K}$, *tenemos* $\mathbf{S}(\mathbf{K}) = \mathbf{U}\Sigma(\mathbf{K})$;

g) $\mathbf{S}(\mathbf{K}) \leq 2^{\overline{\overline{\mathbf{K}}}}$.

Demostración. Es completamente elemental. En particular, la fórmula $\mathbf{S}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{S}$ de $^{b})$ se deduce fácilmente de la ley asociativa general de adición de los conjuntos con ayuda del axioma de elección. Pero si se quiere evitar aquí usar el axioma, basta observar que es posible definir de manera efectiva una función $\mathbf{F}$ que hace corresponder a todo conjunto X de $\mathbf{S}(\mathbf{K})$ una clase de conjuntos $\mathbf{F}(X)$ tal que $\mathbf{F}(X) \subset \mathbf{K}$, $\mathbf{F}(X) \neq 0$, y $X = \Sigma\mathbf{F}(X)$; se escribe de hecho: $\mathbf{F}(X) = \sum_{\mathbf{Y} \in \mathbf{K} \text{ y } \Sigma(\mathbf{Y}) = X} \mathbf{Y}$. Esta función es además biunívoca y por lo tanto su existencia implica según el lema 10^{a}, la fórmula g).

Voy a establecer ahora algunas relaciones que existen entre la operación $\mathbf{S}$ y las operaciones $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}^*$ examinadas en la sección anterior.

Teorema 43.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

^{a}) $\mathbf{T}\,\mathbf{S}(0) = 0 = \mathbf{S}\,\mathbf{T}(0)$*; si* $\mathbf{K} \neq 0$*, se tiene* $\mathbf{T}\,\mathbf{S}(\mathbf{K}) = \mathbf{U}\Sigma(\mathbf{K}) = \mathbf{S}\,\mathbf{T}(\mathbf{K})$*;*

^{b}) $\mathbf{T}\,\mathbf{S} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}\,\mathbf{T}$*;*

^{c}) *para que* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}\,\mathbf{S}$*, es necesario y suficiente que* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{U}\Sigma$ *y que* $\mathbf{F}(0) = 0$*;*

^{d}) $\mathbf{S} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^{*}$*;*

^{e}) $\mathbf{S}(\mathbf{K} + \mathbf{L}) \subset \mathbf{T}^{*}(\mathbf{K}) + \mathbf{S}(\mathbf{L})$ *para cualesquier dos clases* $\mathbf{K}$ *y* $\mathbf{L}$ *(*$\mathbf{S}[\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G}] \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^{*}\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}\,\mathbf{G}$ *para cualquier operaciones* $\mathbf{F}$ *y* $\mathbf{G}$*).*

Demostración.

^{a}) Los teoremas 36^{c} y 42^{c} dan de inmediato: $\mathbf{T}\,\mathbf{S}(0) = 0 = \mathbf{S}\,\mathbf{T}(0)$. Si por el contrario $\mathbf{K} \neq 0$ se tiene en virtud de los teoremas 42^{e} y 36^{g}, $\Sigma(\mathbf{K}) \in \mathbf{S}(\mathbf{K})$ y $E_{\{x\}}[x \in \Sigma(\mathbf{K})] \subset \mathbf{T}(\mathbf{K})$, de donde según los teoremas 36^{h} y 42^{f} $\mathbf{T}(\mathbf{S}(\mathbf{K})) = \mathbf{U}\Sigma(\mathbf{K}) = \mathbf{S}(\mathbf{T}(\mathbf{K}))$. Las fórmulas ^{a}) quedan establecidas.

^{b}) y ^{c}) se obtienen inmediátamente de ^{a})

^{d}) y ^{e}) resultan fácilmente de la definición 18 y del teorema 37.

Como fue dicho en la pág. 24, la operación $\mathbf{I}$ constituye en cierto sentido la cota inferior de casi todas las operaciones en este trabajo; pero la operación $\mathbf{T}\,\mathbf{S}$ considerada en el teorema precedente representa en el mismo sentido la cota superior. Las operaciones $\mathbf{F}$ que verifican la inclusión: $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}\,\mathbf{S}$ (o si se quiere la inclusión un poco más general: $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{U}\Sigma$) pueden llamarse *intrínsecas*.

Vale la pena observar que hay operaciones intrínsecas $\mathbf{F}$ como por ejemplo $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{T}$, cuyas operaciones dobles $\mathbf{F}^{*}$ no lo son. Sin embargo, se conocen operaciones que son intrínsecas con sus dobles y que por esa razón podran llamarse *intrínsecas en sentido estricto*; como son, por ejemplo, la operación $\mathbf{S}$ y las que serán definidas en §6. Se ve fácilmente que las operaciones de este tipo se caracterizan por las fórmulas: $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}\,\mathbf{S}$ y $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^{*}\,\mathbf{S}^{*}$ (o lo que es igual por las fórmulas: $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{U}\Sigma$ y $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} V\Pi$). Se debe, finalmente, observar que la propiedad de ser una operación intrínseca subsiste si pasamos de $\mathbf{F}$ a la operación $\mathbf{F}^{\times}$ mencionada al final de §2.

El siguiente teorema, que presenta una consecuencia inmediata de las definiciónes 15 y 18 y de las leyes muy conocidas de De Morgan, caracteriza a la operación $\mathbf{S}^{*}$, doble de $\mathbf{S}$:

Teorema 44. $\mathbf{S}^{*}(\mathbf{K}) = \overline{\Pi}(\mathbf{U}(\mathbf{K}) - \{0\})$.

Así se ve que la operación $\mathbf{S}^{*}$ consiste en formar todos los productos de los conjuntos de una clase $\boldsymbol{K}$ dada. En vista de la importancia de la operación se designa con un signo especial, por ejemplo $\mathbf{P}$; las clases de conjunto que son cerradas respecto a $\mathbf{S}^{*}$ pueden ser llamadas *clases multiplicativas*.

Vamos a recurrir en lo que sigue a las diversas propiedades de la operación $\mathbf{S}^{*}$ que se deducen de los teoremas $42^{\,a-c}$ y $43^{b,d,e}$ por aplicación del lema 19. Consideremos además las propiedades siguientes que resultán inmediatamente del teorema 44 (y de la definición 17):

Teorema 45.

Traduccion Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Traduccion Andres Sestier Bouclier

$^{a})$ *$\Sigma\mathbf{S}^*(\mathbf{K}) = \Sigma(\mathbf{K})$ y $\Pi\mathbf{S}^*(\mathbf{K}) = \Pi(\mathbf{K})$;*

$^{b})$ *si $K \neq 0$, tenemos $\Pi(\mathbf{K}) \in \mathbf{S}^*(\mathbf{K})$; en particular, si $\Pi(\mathbf{K}) = 0$, tenemos[1] $0 \in \mathbf{S}^*(\mathbf{K})$;*

$^{c})$ *$\mathbf{S}^*(\mathbf{K} + \mathbf{L}) \subset \mathbf{T}(\mathbf{K}) + \mathbf{S}^*(\mathbf{L})$ para cualesquiera dos clases $\mathbf{K}$ y $\mathbf{L}$ ($\mathbf{S}^*[\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G}] \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*\mathbf{G}$ para cualesquiera dos operaciones $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$).*

Al estudiar a profundidad las operaciones $\mathbf{S}$ y $\mathbf{S}^*$ (y sobre todo en el estudio de las clases de conjuntos que son tanto aditivas como multiplicativas) hay una operación auxiliar $\mathbf{M}$ que es de gran utilidad. Esta operación consiste en formar, a partir de conjuntos de una clase $\boldsymbol{K}$ dada, otros llamados *moléculas* o *átomos* de esta clase. Generalizando una noción que introdujo M. Fréchet[2] llamamos *átomo de la clase $\boldsymbol{K}$ respecto al elemento a* de $\Sigma(\mathbf{K})$, en símbolos $A_{\mathbf{K}}(a)$, a la parte común (el producto) de todos los conjuntos de la clase $\boldsymbol{K}$ que contienen al elemento a; la clase $\mathbf{M}(\mathbf{K})$ está formada por todos estos átomos $A_{\mathbf{K}(a)}$ (donde $a \in \Sigma(\mathbf{K})$) y además por el conjunto 0 en caso de que este conjunto coincida con $\Pi(\mathbf{K})$.

Definición 19.

$^{a})$ *$A_{\mathbf{K}}(a) = \prod_{a \in X \in \mathbf{K}} X$;*

$^{b})$ *$\mathbf{M}(\mathbf{K}) = \overline{A_{\mathbf{K}}}(\Sigma(\mathbf{K})) + \{0\} \cdot \{\Pi(\mathbf{K})\}$.*

Algunas propiedades de la operación $\mathbf{M}$, que son de importancia para nuestras investigaciones, se formulan en el siguiente

Teorema 46.

$^{a})$ *$\mathbf{M} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}^*$;*

$^{b})$ *$\mathbf{M}\,\mathbf{S} \overset{\circ}{=} \mathbf{M} \overset{\circ}{=} \mathbf{M}\,\mathbf{S}^*$;*

$^{c})$ *$\mathbf{S}\,\mathbf{M} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$;*

$^{d})$ *$\overline{\overline{\mathbf{M}(\mathbf{K})}} \leq \overline{\overline{\Sigma(\mathbf{K})}} + 1$.*

Demostración.

$^{a})$ Sea $\boldsymbol{K}$ una clase arbitraria de conjuntos. Según la definición 19^a, a todo $x \in \Sigma(\mathbf{K})$ corresponde una clase $\mathbf{Y}$ tal que $\mathbf{Y} \subset \mathbf{K}$, $\mathbf{Y} \neq 0$ y $A_{\mathbf{K}}(x) = \Pi(\mathbf{Y})$, a saber: $\mathbf{Y} = \boldsymbol{V}(\{x\}) \cdot \mathbf{K}$. Resulta entonces que $\overline{A_{\mathbf{K}}}(\Sigma(\mathbf{K})) = \mathrm{E}_{A_{\mathbf{K}}(x)}[x \in \Sigma(\mathbf{K})] \subset \overline{\Pi}(\mathbf{U}(\mathbf{K}) - \{0\})$, de donde, en razón del teorema 44, $\overline{A_{\mathbf{K}}}(\Sigma(\mathbf{K})) \subset \mathbf{S}^*(\mathbf{K})$.

Como además, por el teorema 45^b, $\{0\} \cdot \{\Pi(\mathbf{K})\} \subset \mathbf{S}^*(\mathbf{K})$, se obtiene de ello, conforme a la definición 19^b: $\mathbf{M}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{S}^*(\mathbf{K})$ para toda clase $\mathbf{K}$. En consecuencia, $\mathbf{M} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}^*$, l.q.q.d.

[1]Como de costumbre, admito $\Pi(0) = 1$; la fórmula $\Pi(\mathbf{K}) = 0$ implica pues que $\mathbf{K} \neq 0$.
[2]Véase *De las familias y funciones aditivas de conjuntos abstractos*, Fund. Math. V, págs 210-213, 217-218.

MEXICO

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

[b]) Siendo $\boldsymbol{K}$ una clase cualquiera, se obtiene del teorema 42^b con ayuda de los lemas 17^f y 19^j las inclusiones: $\mathbf{K} \subset \mathbf{S}(\mathbf{K})$ y $\mathbf{K} \subset \mathbf{S}^*(\mathbf{K})$, de donde para todo x:

$$\prod_{x\in X\in \mathbf{S}(\mathbf{K})} X \subset \prod_{x\in X\in\mathbf{K}} X \quad y \qquad \prod_{x\in X\in \mathbf{S}^*(\mathbf{K})} X \subset \prod_{x\in X\in\mathbf{K}} X. \tag{1}$$

Consideremos un conjunto arbitrario Y tal que $x \in Y \in \mathbf{S}(\mathbf{K})$. De acuerdo con la definición 18, Y se puede representar bajo la forma $Y = \Sigma(\mathbf{L})$ donde $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$. Se tiene entonces $x \in \Sigma(\mathbf{L}) = Y$ lo cual implica la existencia de un conjunto Z que verifica: $x \in Z \in L$ y $Z \subset Y$. Por consiguiente $\prod_{x\in X\in\mathbf{K}} X \subset \prod_{x\in X\in\mathbf{L}} X \subset Z \subset Y$, de donde $\prod_{x\in X\in\mathbf{K}} X \subset Y$. Pero esta última inclusión se satisface para todo conjunto Y sujeto a la condicion $x \in Y \in \mathbf{S}(\mathbf{K})$ y por lo tanto se concluye que

$$\prod_{x\in X\in\mathbf{K}} X \subset \prod_{x\in X\in \mathbf{S}(\mathbf{K})} X. \tag{2}$$

De manera análoga, sea $x \in Y \in \mathbf{S}^*(\mathbf{K})$. De acuerdo con el teorema 44, existe una clase $\mathbf{L}$ tal que $Y = \Pi(\mathbf{L})$ y $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$. Luego se tiene $x \in Z \in \mathbf{K}$ para todo conjunto Z de $\mathbf{L}$, de donde $\prod_{x\in X\in\mathbf{K}} X \subset Z$. Se obtiene a continuación $\prod_{x\in X\in\mathbf{K}} X \subset \prod_{Z\in\mathbf{L}} Z = \Pi(\mathbf{L}) = Y$. Puesto que este razonamiento se aplica a todo conjunto Y tal que $x \in Y \in \mathbf{S}^*(\mathbf{K})$, se llega a la fórmula

$$\prod_{x\in X\in\mathbf{K}} X \subset \prod_{x\in X\in \mathbf{S}^*(\mathbf{K})} X. \tag{3}$$

las inclusiones (1)-(3) inmediatamente implican: $\prod_{x\in X\in\mathbf{S}(\mathbf{K})} X = \prod_{x\in X\in\mathbf{K}} X = \prod_{x\in X\in\mathbf{S}^*(\mathbf{K})} X$, de donde, por la definición 19^a,

$$A_{\mathbf{S}(\mathbf{K})}(x) = A_{\mathbf{K}}(x) = A_{\mathbf{S}^*(\mathbf{K})(x)} \textit{ para todo elemento } x. \tag{4}$$

Con ayuda de (4) se deduce de la definición 19^b que

$$\mathbf{M}\,\mathbf{S}(\mathbf{K}) = \overline{A_{\mathbf{K}}}(\Sigma\,\mathbf{S}(\mathbf{K})) + \{0\}\cdot\{\Pi\mathbf{S}(\mathbf{K})\},\ \mathbf{M}(\mathbf{K}) = \overline{A_{\mathbf{K}}}(\Sigma(\mathbf{K})) + \{0\}\cdot\{\Pi(\mathbf{K})\} \text{ y}$$
$$\mathbf{M}\,\mathbf{S}^*(\mathbf{K}) = \overline{A_{\mathbf{K}}}(\Sigma\,\mathbf{S}^*(\mathbf{K})) + \{0\}\cdot\{\Pi\mathbf{S}^*(\mathbf{K})\}. \tag{5}$$

Como en virtud de los teoremas 42^d y 45^a: $\Sigma\mathbf{S}(\mathbf{K}) = \Sigma(\mathbf{K}) = \Sigma\mathbf{S}^*(\mathbf{K})$ y $\Pi(\mathbf{S}(\mathbf{K})) = \Pi(\mathbf{K}) = \Pi\,\mathbf{S}^*(\mathbf{K})$ las fórmulas (15) traen consigo: $\mathbf{M}\,\mathbf{S}(\mathbf{K}) = \mathbf{M}(\mathbf{K}) = \mathbf{M}\,\mathbf{S}^*(\mathbf{K})$ para toda clase $\mathbf{K}$; consecuentemente, $\mathbf{M}\,\mathbf{S} \overset{\circ}{=} \mathbf{M} \overset{\circ}{=} \mathbf{M}\,\mathbf{S}^*$ l.q.q.d.

[c]) Consideremos X un conjunto arbitrario tal que

$$X \in \mathbf{K} - \{0\}. \tag{6}$$

En virtud de (6) $X \subset \Sigma(\mathbf{K})$, luego $\overline{A_{\mathbf{K}}}(X) \subset \overline{A_{\mathbf{K}}}(\Sigma(\mathbf{K}))$, de donde por la definición 19^b

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

$$\overline{A_{\mathbf{K}}}(X) \subset \mathbf{M}(\mathbf{K}); \tag{7}$$

como además, $X \neq 0$, tenemos:

$$\overline{A_K}(X) \neq 0. \tag{8}$$

Teniendo en cuenta (6), es fácil concluír de la definición 19^a, que $A_{\mathbf{K}}(x) \subset X$ para toda $x \in X$, luego que

$$\Sigma(\overline{A_{\mathbf{K}}}(X)) \subset X. \tag{9}$$

Por otra parte, la definición (19^a) igualmente implica que $x \in A_{\mathbf{K}}(x)$, para cualquier x de X se tiene $x \in \Sigma(\overline{A_{\mathbf{K}}}(X))$; resulta que $X \subset \Sigma(\overline{A_{\mathbf{K}}}(X))$. Esta inclusión junto con (9) permíte obtener:

$$X = \Sigma(\overline{A_{\mathbf{K}}}(X)). \tag{10}$$

Las fórmulas (7), (8) y (10) muestran que el conjunto X es de la forma $X = \Sigma(\mathbf{L})$ donde $\mathbf{L} \subset \mathbf{M}(\mathbf{K})$ y $\mathbf{L} \neq 0$; en otras palabras $X \in \overline{\Sigma}(\mathbf{U}\,\mathbf{M}(\mathbf{K}) - \{0\})$, luego conforme a la definición 18:

$$X \in \mathbf{S}\,\mathbf{M}(\mathbf{K}). \tag{11}$$

Así, se prueba que la fórmula (6) siempre implica (11); esta implicacion puede obviamente expresarse mediante la fórmula:

$$\mathbf{K} - \{0\} \subset \mathbf{S}\,\mathbf{M}(\mathbf{K}). \tag{12}$$

Pasamos al caso donde $X \in \mathbf{K} \cdot \{0\}$. Entonces evidentemente se tiene $X = 0 = \Pi(\mathbf{K})$, luego $X \in \{0\} \cdot \{\Pi(\mathbf{K})\}$, de donde en razón de la definición 19^b: $X \in \mathbf{M}(\mathbf{K})$; como además, en virtud del teorema 42^b y del lema 17^f, $\mathbf{M}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{S}\,\mathbf{M}(\mathbf{K})$, se obtiene: $X \in \mathbf{S}\,\mathbf{M}(\mathbf{K})$. Por consiguiente:

$$\mathbf{K} \cdot \{0\} \subset \mathbf{S}\,\mathbf{M}(\mathbf{K}). \tag{13}$$

Las inclusiones (12) y (13) dan inmediatamente $\mathbf{K} \subset \mathbf{S}\,\mathbf{M}(\mathbf{K})$ para toda clase $\mathbf{K}$; de conformidad con las definiciones 13 y 8^b se tiene

$$\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{M}. \tag{14}$$

Poniendo $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}\,\mathbf{M}$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$ en el lema 17^c se obtiene de (14): $\mathbf{SS}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{SMSS}^*$. Pero la fórmula ^{b}) del teorema considerado, antes establecida implica que $\mathbf{SMSS}^* \overset{\circ}{=} \mathbf{S}[\mathbf{MS}]\mathbf{S}^* \overset{\circ}{=} \mathbf{S}[\mathbf{M}\,\mathbf{S}^*] \overset{\circ}{=} \mathbf{S}\,\mathbf{M}$. Se concluye que

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

$$\mathbf{S}\,\mathbf{S}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{M}. \tag{15}$$

Por otra parte, en virtud de la fórmula ^{a}) que ya fue establecida, se tiene $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}^*$; como además $\mathbf{S} \in \mathfrak{M}$ (teorema 42^a), se obtiene de ahí con ayuda de la definición 12^a:

$$\mathbf{S}\,\mathbf{M} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*. \tag{16}$$

Las fórmulas (15) y (16) implican inmediatamente la identidad que se busca:

$$\mathbf{S}\,\mathbf{M} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*.$$

^{d}) En el lema 11^a (que resulta del axioma de elección), póngase $f \overset{\circ}{=} A_{\mathbf{K}}$ y $A = \Sigma(\mathbf{K})$; se obtiene: $\overline{\overline{\overline{A_{\mathbf{K}}}(\Sigma(\mathbf{K}))}} \leq \overline{\overline{\Sigma(\mathbf{K})}}$, de donde según la definición 19^b $\overline{\overline{\mathbf{M}(\mathbf{K})}} \leq \overline{\overline{\overline{A_{\mathbf{K}}}(\Sigma(\mathbf{K}))}} + \overline{\overline{\{0\} \cdot \{\Pi(\mathbf{K})\}}} \leq \overline{\overline{\Sigma(\mathbf{K})}} + 1$, l.q.q.d.

Las propiedades de la operación $\mathbf{M}$ recién establecidas encontrarán una aplicación interesante en la demostración del siguiente:

Teorema 47. $\mathbf{S}\,\mathbf{S}^* \overset{\circ}{=} \mathbf{S}^*\,\mathbf{S}$.

Demostración. El teorema 46^b proporciona: $\mathbf{S}\,\mathbf{M}\,\mathbf{S} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}\,\mathbf{M}$; con ayuda del teorema 46^c se concluye que

$$\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*\,\mathbf{S} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*. \tag{1}$$

Poniendo en el lema 17^c: $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}^*\,\mathbf{S}$ y teniendo en cuenta el teorema 42^b, obtenemos: $\mathbf{S}^*\,\mathbf{S} \subset \mathbf{S}\mathbf{S}^*\mathbf{S}$, de donde según (1)

$$\mathbf{S}^*\,\mathbf{S} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*. \tag{2}$$

Aplicando el lema $19^{b,c,e}$ sucesivamente deducimos de (2): $[\mathbf{S}^*\,\mathbf{S}]^* \overset{\circ}{\subset} [\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*]^*$, $\mathbf{S}^{**}\mathbf{S}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}^*\,\mathbf{S}^{**}$ y finalmente

$$\mathbf{S}\,\mathbf{S}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}^*\mathbf{S}. \tag{3}$$

Las inclusiones (2) y (3) dan de inmediato

$$\mathbf{S}^*\mathbf{S} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*, \text{ l.q.q.d.}$$

El teorema anterior admite otra demostración, más natural quizá pero no más simple: en vez de la operación $\mathbf{M}$, se aplica en efecto las leyes distributivas de adición y multiplicación de los conjuntos en su forma más general. Sin embargo se topa uno con ciertas dificultades si se intenta evitar el axioma de elección en esta nueva demostración.

Traducción: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Voy a mencionar aquí algunas propiedades de las operaciones $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^*$ y $\mathbf{M}$ que se omitieron en los teoremas 42-47. Se puede demostrar que la *fórmula* $\mathbf{F}\Sigma \overset{\circ}{=} \Sigma\overline{\mathbf{F}}\mathbf{S}$ (es decir $\mathbf{F}(\Sigma)(\mathfrak{K}) = \sum_{\mathbf{X}\in\mathbf{S}(\mathfrak{K})\mathbf{F}(\mathbf{X})}$ *para toda familia de clases* $\mathfrak{K}$) *es una condición necesaria y suficiente* para *tener*: $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$ y $\mathbf{F}(0) = 0$; luego se tiene en particular: $\mathbf{S}\,\Sigma \overset{\circ}{=} \Sigma\,\overline{\mathbf{S}}\,\mathbf{S}$. El teorema 29 de §3 puede ser formulado de la siguiente manera: Si $\mathbf{F} \in \mathfrak{M}$, se tiene $\mathbf{S}^*(cl(\mathbf{F})) \subset cl(\mathbf{F})$. Después se tiene $\mathbf{S}\,J \overset{\circ}{=} J \overset{\circ}{=} \mathbf{S}^*J$; $\mathbf{T}^*\mathbf{S}^*(0) = 0 = \mathbf{S}^*\mathbf{T}^*(0)$, $\mathbf{T}^*\mathbf{S}^*(\mathbf{K}) = V\Pi(\mathbf{K}) = \mathbf{S}^*\mathbf{T}^*(\mathbf{K})$ para $\mathbf{K} \neq 0$;

$$\mathfrak{B}(\{\mathbf{C},\mathbf{T},\mathbf{S}\}) = \{\mathbf{I},\mathbf{C},\mathbf{T},\mathbf{T}^*,\mathbf{S},\mathbf{S}^*,\mathbf{CT},\mathbf{CT}^*,\mathbf{CS},\mathbf{CS}^*,\mathbf{TT}^*,\mathbf{TS},\mathbf{T}^*\mathbf{S}^*,\mathbf{SS}^*,\\ \mathbf{C\,T\,S},\mathbf{CT}^*\mathbf{S}^*,\mathbf{CSS}^*\}.$$

La operación $\mathbf{M}$ verifica además las fórmulas: $\mathbf{M}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{M}$; $\overline{J}(1)\cdot\mathbf{K} \subset \mathbf{M}(\mathbf{K})$; $\mathbf{M}(0) = 0$; $\Sigma\mathbf{M} \overset{\circ}{=} \Sigma$; $\mathbf{M\,T}(0) = 0$; $\mathbf{M\,T}(\mathbf{K}) = \overline{J}\Sigma(\mathbf{K}) + \{0\}$ para $\mathbf{K} \neq 0$; $\mathbf{M\,T} \in \mathfrak{U}$, $[\mathbf{M\,T}]^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{M\,T}$; $\mathbf{S}^*\mathbf{M} \overset{\circ}{=} \mathbf{M}$. Se debe observar que $\mathbf{M}(\mathbf{K})$ no es, en general, una clase de conjuntos ajenos entre sí.

Pasamos a los problemas concerníentes a las clases aditivas y multiplicativas de conjuntos.

Teorema Fundamental IV. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, *tenemos* $\overline{\overline{cl(\mathbf{S})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^*)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Demostración. El teorema 21^a trae consigo en virtud del teorema 43^d: $cl(\mathbf{T}^*) \subset cl(\mathbf{S})$, de donde por el teorema fundamental I $\overline{\overline{cl(\mathbf{S})}} \geq \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^*)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$. La desigualdad inversa, a saber $\overline{\overline{cl(\mathbf{S})}} \leq 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ resulta inmediatamente del teorema 32. Como además, en razón del teorema 33, $\overline{\overline{cl(\mathbf{S})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^*)}}$, se obtiene finalmente: $\overline{\overline{cl(\mathbf{S})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^*)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$, l.q.q.d.

Este teorema me fue comunicado por el Sr. Lindenbaum

Teorema 48.

^{a}) $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}) = cl(\mathbf{T\,S}) = \{0\} + \overline{\mathbf{U}}\mathbf{U}(1)$;

^{b}) $cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*) = cl(\mathbf{T}^*\mathbf{S}^*) = \{0\} + \overline{V}V(0) = \{0\} + \overline{V}\mathbf{U}(1)$.

Demostración.

^{a}) Tomando en cuenta de los teoremas $36^{a,b}$ y 42^b, se obtiene del teorema 24^d:

$$cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}) = cl(\mathbf{T\,S}). \tag{1}$$

Consideremos una clase arbitraria Y de $cl(\mathbf{T\,S})$, diferente de 0. Según la definición 16 $\mathbf{T\,S}(\mathbf{Y}) \subset \mathbf{Y}$, de donde, en razón del teorema 43^a $\mathbf{U}\Sigma(\mathbf{Y}) \subset \mathbf{Y}$; además es evidente que $\mathbf{Y} \subset \mathbf{U}\,\Sigma(\mathbf{Y})$ (para toda clase $\mathbf{Y}$). En consecuencia $\mathbf{Y} = \mathbf{U}\Sigma(\mathbf{Y})$; por tanto la clase $\mathbf{Y}$ es de la forma $\mathbf{Y} = \mathbf{U}(\mathbf{X})$, donde $\mathbf{X} = \Sigma(\mathbf{Y})$ pertenece a la clase $\mathbf{U}(1)$ (como conjunto de individuos).

De esto resulta que $cl(\mathbf{T\,S}) \subset \{0\} + \mathrm{E}_{\mathbf{U}(\mathbf{X})}[\mathbf{X} \in \mathbf{U}(1)]$. Pero, según la definición 6 (para $f \overset{\circ}{=} \mathbf{U}$ y $A = \mathbf{U}(1)$) esta inclusión puede expresarse en la forma:

MEXICO

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

$$cl(\mathbf{T}\,\mathbf{S}) \subset \{0\} + \overline{\mathbf{U}}\mathbf{U}(1). \tag{2}$$

Por otro lado, sea $\mathbf{Y} \in \{0\} + \overline{\mathbf{U}}\mathbf{U}(1)$. Si $\mathbf{Y} \in \{0\}$ se tiene $\mathbf{TS}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}$, de donde $\mathbf{Y} \in cl(\mathbf{T}\,\mathbf{S})$ (teorema 43^a, definición 16). Si, al contrario, $\mathbf{Y} \in \overline{\mathbf{U}}\mathbf{U}(1)$, existe un conjunto X tal que $\mathbf{Y} = \mathbf{U}(X)$ (y $X \in \mathbf{U}(1)$). Concluímos de inmediato que $\Sigma(\mathbf{Y}) = \Sigma\mathbf{U}(X) = X$, de donde $\mathbf{Y} = \mathbf{U}\Sigma(\mathbf{Y})$ y, por el teorema 43^a, $\mathbf{Y} = \mathbf{T}\,\mathbf{S}(\mathbf{Y})$; aplicando de nuevo la definición 16, se obtiene por tanto de nuevo la fórmula: $\mathbf{Y} \in cl(\mathbf{T}\,\mathbf{S})$.

Se ha probado que

$$\{0\} + \overline{\mathbf{U}}\mathbf{U}(1) \subset cl(\mathbf{T}\,\mathbf{S}). \tag{3}$$

Las fórmulas (1)-(3) traen consigo:

$$cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}) = cl(\mathbf{T}\,\mathbf{S}) = \{0\} + \overline{\mathbf{U}}\mathbf{U}(1), \quad \text{l.q.q.d.}$$

[b]) Con ayuda del teorema 26 se obtiene fácilmente de [a]): $cl([\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}]^* = cl([\mathbf{T}\,\mathbf{S}]^*) = \overline{\mathbf{C}}(\{0\} + \overline{\mathbf{U}}\mathbf{U}(1))$, de donde en virtud del lema $19^{d,e}$ $cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*) = cl(\mathbf{T}^*\mathbf{S}^*) = \overline{\mathbf{C}}(\{0\}) + \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{U}}\mathbf{U}(1)$. Ahora bien el lema 18^d da: $\overline{\mathbf{C}}(\{0\}) = \{0\}$, y con ayuda de las definiciones 5, 6 y 14 se convence uno fácilmente de que $\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{U}}\mathbf{U}(1) = \mathrm{E}_{\mathbf{CU}(X)}[X \in \mathbf{U}(1)] = \mathrm{E}_{\boldsymbol{V}(1-X)}[X \in \mathbf{U}(1)] = \mathrm{E}_{\boldsymbol{V}(\mathbf{Y})}[\mathbf{Y} \in \mathbf{U}(1)] = \overline{\boldsymbol{V}}\,\mathbf{U}(1)$. Así llegamos a la fórmula buscada: $cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*) = cl(\mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*) = \{0\} + \overline{\boldsymbol{V}}\,\mathbf{U}(1) = \{0\} + \overline{\boldsymbol{V}}\,\boldsymbol{V}(0)$.

Teorema Fundamental V. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$*, se tiene* $\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Demostración. $\mathbf{U}$ es evidentemente una función biunívoca: si $\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \mathbf{U}(\mathbf{Y})$, se tiene $\Sigma\mathbf{U}(X) = \Sigma\mathbf{U}(\mathbf{Y})$, de donde $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Por consiguiente, la clase $\mathbf{U}(1)$ es de la misma potencia que su imagen dada por $\mathbf{U}$: $\overline{\overline{\mathbf{U}(1)}} = \overline{\overline{\overline{U}\mathbf{U}(1)}}$. En razón del teorema 48^a se tiene entonces $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}) = \overline{\overline{\mathbf{U}(1)}} + \overline{\overline{\{0\}}}$, de donde en virtud del lema 10^a $\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})}} = 2^{\aleph_\alpha} + 1 = 2^{\aleph_\alpha}$. Como además, por el teorema 33 y del lema 19^d, $\overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)}} = \overline{\overline{cl([\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}]^*)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})}}$, obtenemos finalmente la fórmula deseada: $\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Con ayuda del teorema anterior es fácil determinar la cota inferior de las potencias de las familias $cl(\mathbf{F})$ que corresponden a las operaciones $\mathbf{F}$ intrínsecas y a sus operaciones dobles (en tanto que la cota superior de estas potencias sigue teniendo la misma del caso general):

Teorema 49. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$*, cada una de las fórmulas:* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}$*,* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}\,\mathbf{S}$*,* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*$ *y* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*$ *implica:* $2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} \leq 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Demotración. Según el teorema 21[a] la fórmula: $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}$ proporciona: $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}) \subset cl(\mathbf{F})$, de donde, en razón del teorema fundamental V, $2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{F})}}$. Al juntar esta desigualdad con el teorema 32, se obtiene la fórmula buscada: $2^{\aleph} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} \leq 2^{2^{\aleph_\alpha}}$. Teniendo en cuenta el teorema 48, se razona con las otras hipótesis de manera enteramente análoga.

Nótese que las inclusiones: $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}\,\mathbf{S}$ y $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*$ pueden reemplazarse en el teorema precedente por las fórmulas un poco más generales a saber: $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{U}\Sigma$ y $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{V}\Pi$.

Teorema Fundamenal VI. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, *tenemos* $\overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Demostración. De acuerdo con el teorema 42[a,b] y el lema 19[j], se tiene $\mathbf{S} \in \mathfrak{M}$, $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}$ y $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}^*$; en virtud del teorema 24[d] resulta de ello que

$$cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*) = cl(\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*). \tag{1}$$

De acuerdo con el lema 17[e], las inclusiones: $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}$ y $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}^*$ darán $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$. Se tiene además $\mathbf{S}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{S}$, $[\mathbf{S}^*]^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{S}^*$ y $\mathbf{S}\,\mathbf{S}^* \overset{\circ}{=} \mathbf{S}^*\mathbf{S}$ (teorema 42[b], lema 19[f] y teorema 47), de donde en razón del lema 14[e] $[\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*]^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$. Así pues la operación $\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$ es aditiva y adjuntiva y podemos aplicar el teorema 23[d], poniendo: $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$. Así obtenemos la fórmula: $cl(\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*) = \overline{\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*}\mathbf{U}\,\mathbf{U}(1)$, que junto con (1) dará: $cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*) = \overline{\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*}\mathbf{U}\,\mathbf{U}(1)$; como en virtud del teorema 46[c] $\mathbf{S}\,\mathbf{S}^* \overset{\circ}{=} \mathbf{S}\,\mathbf{M}$, tendremos:

$$cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*) = \overline{\mathbf{S}\,\mathbf{M}}\mathbf{U}\mathbf{U}(1). \tag{2}$$

Pero, según la propiedad conocida de las imágenes se tiene $\overline{fg}(A) = \overline{f}\,\overline{g}(A)$ para cualesquiera dos funciones f y g y para todo conjunto A. Se tiene pues en particular $\overline{\mathbf{SM}}(\mathbf{U}\mathbf{U}(1)) = \overline{\mathbf{S}}\overline{\mathbf{M}}\mathbf{U}\,\mathbf{U}(1)$. Poníendo en el lema 11[a]: $f \overset{\circ}{=} \mathbf{S}$ y $A = \overline{\mathbf{M}}\,\mathbf{U}\,\mathbf{U}(1)$, y se obtiene: $\overline{\overline{\overline{\mathbf{S}}\,\overline{\mathbf{M}}\mathbf{U}\,\mathbf{U}(1)}} \leq \overline{\overline{\overline{\mathbf{M}}\mathbf{U}\,\mathbf{U}(1)}}$, de donde, por (2)

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)}} \leq \overline{\overline{\overline{\mathbf{M}}\,\mathbf{U}\,\mathbf{U}(1)}}. \tag{3}$$

Consideremos una clase arbitraria $\mathbf{X}$ de $\mathbf{U}\mathbf{U}(1)$. En razón del teorema 46[d], se tiene $\overline{\overline{\mathbf{M}(\mathbf{X})}} \leq \overline{\overline{\Sigma(\mathbf{X})}} + 1$; como por hipótesis $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, y además $\Sigma(\mathbf{X}) \subset 1$, se concluye de esto que $\overline{\overline{\mathbf{M}(\mathbf{X})}} \leq \aleph_\alpha + 1 = \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1}$. Además, por la definición 19, $\mathbf{M}(\mathbf{X})$ es una clase de conjuntos por tanto $\mathbf{M}(\mathbf{X}) \subset U(1)$; tomando en cuenta la definición 5[b] (para $A = \mathbf{U}(1)$), se obtiene: $\mathbf{M}(\mathbf{X}) \in \mathbf{U}_{\alpha+1}\,\mathbf{U}(1)$.

Este prueba que $\overline{\mathbf{M}}\mathbf{U}\,\mathbf{U}(1) \subset \mathbf{U}_{\alpha+1}\,\mathbf{U}(1)$, de donde

$$\overline{\overline{\overline{\mathbf{M}}\mathbf{U}\,\mathbf{U}(1)}} \leq \overline{\overline{\mathbf{U}_{\alpha+1}\mathbf{U}(1)}}. \tag{4}$$

Con ayuda de los lemas 10[a,c] y 6[b] fácilmente se obtiene: $\overline{\overline{\mathbf{U}_{\alpha+1}\mathbf{U}(1)}} \leq \overline{\overline{(U(1))}}^{\underset{\smile}{\aleph_{\alpha+1}}} = (2^{\aleph_\alpha})^{\underset{\smile}{\aleph_{\alpha+1}}} = (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha^2} = 2^{\aleph_\alpha}$; juntando esto con (3) y (4) se deduce la igualdad:

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{S} + \mathbf{S}^*)}} \leq 2^{\aleph_\alpha}. \tag{5}$$

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico
MEXICO

Por otra parte el teorema 43^d implica: $\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}^* + \mathbf{T}^*$; aplicando el teorema 49 se concluye que

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)}} \geq 2^{\aleph_\alpha}. \tag{6}$$

las desigualdades (5) y (6) dan inmediatamente:

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)}} = 2^{\aleph_\alpha} \quad \text{l.q.q.d.}$$

El teorema conocido según el cual la clase $\mathbf{F}$ de todos los conjuntos cerrados de números reales es de potencia $2^{\aleph_\alpha}$, puede deducirse fácilmente del teorema anterior. En efecto, sea 1 el conjunto de todos los números racionales y R el de todos los números reales (incluído $+\infty$ y $-\infty$); pongamos $G(X) = 1 \cdot E[y < x]$ para todo $x \in R$. La función $G(X)$ transforma de forma biunívoca al conjunto R en una subclase de $\mathbf{U}(1)$. Se sigue que la función $\overline{G}(X)$ transforma de misma manera la clase $U(R)$ en una subfamilia de $\mathbf{UU}(1)$; siendo $\mathbf{F}$ una subclase de $\mathbf{U}(R)$ se concluye en particular que $\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{\overline{E_{\overline{G}(X)}[X \in \mathbf{F}]}}$. Pero, es fácil probar que la fórmula: $X \in \mathbf{F}$ implica: $\mathbf{S}\overline{G}(X) \subset \overline{G}(X)$ y $\mathbf{S}^*\overline{G}(X) \subset \overline{G}(X)$, de donde $\overline{G}(X) \in cl(\mathbf{S}) \cdot cl(\mathbf{S}^*) = cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)$; se tiene entonces $E_{\overline{G}(X)}[X \in \mathbf{F}] \subset cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)$, de donde $\overline{\overline{\mathbf{F}}} \leqslant \overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)}}$. Como en el caso considerado $\overline{\overline{1}} = \aleph_0$, se obtiene por el teorema fundamental VI: $\overline{\overline{\mathbf{F}}} \leqslant 2^{\aleph_0}$. Por otro lado es evidente que $\overline{\overline{\mathbf{F}}} \geqslant 2^{\aleph_0}$ (ya que por ejemplo $\overline{J}(R) \subset \mathbf{F}$ y $\overline{\overline{\overline{J}(R)}} = 2^{\aleph_0}$); llegamos así a la fórmula buscada: $\overline{\overline{\mathbf{F}}} = 2^{\aleph_0}$, y está completa la demostración.

Pero debemos observar que la deducción anterior se apoya implícitamente sobre el axioma de elección, en tanto que las otras demostraciones conocidas del teorema que acabamos de ver son independientes de él.

Teorema Fundamental VII. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$*, se tiene* $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}) = 2^{\aleph_\alpha}$.

Demostración. Considerando el teorema 42^a, se obtiene por aplicación del teorema 28^b: $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)$; con ayuda del teorema 21^b (con $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{C}$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*$), se concluirá que $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}) = cl(\mathbf{C}) \cdot cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)$ de donde $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}) \subset cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)$. Debido al teorema fundamental VI, esta inclusión proporciona:

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}) \leqslant 2^{\aleph_\alpha}. \tag{1}$$

Escribimos ahora

$$\mathbf{F}(X) = \{0, X, 1 - X, 1\} \textit{ para todo conjunto } X. \tag{2}$$

Si a es un elemento arbitrario de 1, y X es un conjunto cualquiera de la clase $\mathbf{U}(1-\{a\})$, es evidente que $1 - X$ no pertenece a esta clase. Según (2) se sigue con facilidad que las fórmulas: $X \in \mathbf{U}(1 - \{a\})$, $Y \in \mathbf{U}(1 - \{a\})$ y $\mathbf{F}(X) = \mathbf{F}(Y)$ implican: $X = Y$; en otras palabras, la función $\mathbf{F}$ transforma de manera biunívoca la clase $\mathbf{U}(1 - \{a\})$ en su imagen $\overline{\mathbf{F}}\mathbf{U}(1 - \{a\})$. Por consiguiente, se tiene $\overline{\overline{\overline{\mathbf{F}}\mathbf{U}(1 - \{a\})}} = \overline{\overline{\mathbf{U}(1 - \{a\})}}$; como además $\overline{\overline{1 - \{a\}}} = \aleph_\alpha - 1 = \aleph_\alpha$, se obtiene según el lema 10^a:

Traduccion. Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

$$\overline{\overline{\overline{\mathbf{F}}\mathbf{U}(1-\{a\})}} = 2^{\aleph_\alpha}. \tag{3}$$

Pero de (2) se concluye sin dificultad, con ayuda de las definiciones 14 y 18 que $\mathbf{SF}(X) \subset \mathbf{F}(X)$ y $\mathbf{CF}(X) \subset \mathbf{F}(X)$ para todo X, de donde, en vista de la definición 16 y del teorema 21[b], $\mathbf{F}(X) \in cl(\mathbf{C}) \cdot cl(\mathbf{S}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})$. Resulta en particular que $\overline{\mathbf{F}}\mathbf{U}(1-\{a\}) \subset cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})$; al juntar esta inclusión con (3), se obtiene:

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})}} \geqslant 2^{\aleph_\alpha}. \tag{4}$$

Las desigualdades (1) y (4) darán finalmente

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})}} = 2^{\aleph_\alpha}, \quad \text{l.q.q.d.}$$

El análisis de las demostraciones de los teoremas fundamentale $V - VII$ nos conduce a las siguientes proposiciones, para el caso de conjuntos finitos:

Si $\overline{\overline{1}} = \mathfrak{a} < \aleph_0$, se tiene

$^{a})$ $\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)}} = 2^{\mathfrak{a}} \overset{\circ}{+} 1$;

$^{b})$ $2^{\mathfrak{a}} + 1 \leqslant \overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)}} \leqslant \sum_{r \leqslant \mathfrak{a}+1} \binom{2^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{r}}$;

si además $\mathfrak{a} > 0$, se tiene

$^{c})$ $2^{\mathfrak{a}-1} \leqslant \overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)}} \leqslant \sum_{\mathfrak{r} \leqslant \mathfrak{a}+1} \binom{2^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{r}}$

(*donde el símbolo* $\binom{2^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{r}}$ *designa como es costumbre, el número de combinaciones de* $2^{\mathfrak{a}}$ *elementos tomados* $\mathfrak{r}$ *en* $\mathfrak{r}$).

En cuanto a las potencias de $cl(\mathbf{S})$ y $cl(\mathbf{S}^*)$, al analizar el teorema fundamental IV, se llega a las mismas deliberaciones indicadas con anterioridad (pág. 44) para las familias $cl(\mathbf{T})$ y $cl(\mathbf{T}^*)$.

Los teoremas fundamentales establecidos hasta este punto agotan todos los problemas concernientes a las potencias de las familias de la forma $cl(\mathbf{G})$ o $\mathbf{G} \in \mathfrak{S}(\{\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{T}^*, \mathbf{S}, \mathbf{S}^*\})$, es decir de las familias de clases cerradas respecto a una de las operaciones $\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{T}^*, \mathbf{S}$ y $\mathbf{S}^*$ o bien respecto a varias de estas operaciones a la vez. Los problemas no examinados se reducen a los que sí lo fueron explícitamente; se tiene por ejemplo, que, en virtud del teorema 28 $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)$, en virtud del teorema 41 $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)$ y por el teorema 43[d] $cl(\mathbf{T}^*) = cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S})$.

Los resultados obtenidos pueden resumirse como sigue:

A. *Cada una de las clases* $cl(\mathbf{G})$ *donde* $\mathbf{G} \in \mathfrak{S}(\{\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{T}^*, \mathbf{S}, \mathbf{S}^*\})$ *coincide con una de las clases siguientes:* $cl(\mathbf{C})$, $cl(\mathbf{T})$, $cl(\mathbf{T}^*)$, $cl(\mathbf{S})$, $cl(\mathbf{S}^*)$, $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T})$, $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})$, $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})$, $cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)$ *y* $cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)$.

Traduccion. Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

B. *En la hipótesis de que* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *las familias* $cl(\mathbf{C})$, $cl(\mathbf{T})$, $cl(\mathbf{T}^*)$, $cl(\mathbf{S})$ *y* $cl(\mathbf{S}^*)$ *tienen la misma potencia, a saber* $2^{2^{\aleph_\alpha}}$*; las familias* $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})$, $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})$, $cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)$, $cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)$*, tienen también potencia igual, a saber* $2^{\aleph_\alpha}$*, finalmente la familia* $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T})$ *sólo contiene dos elementos.*

Estos resultados pueden extenderse a todas las operaciones que se obtienen de las operaciones consideradas con ayuda de la adición y la multiplicación relativa, es decir a las operaciones de la clase $\mathfrak{B}(\{\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{S}\})$. Al aplicar el Teorema B de la pág 32 (§3) se puede ver facilmente que toda familia $cl(\mathbf{G})$ donde $\mathbf{G} \in \mathfrak{B}(\{\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{S}\})$ coincide ya sea con la familia $cl(\mathbf{I})$, ya con una de las familias antes mencionadas.

§6. Operación $\mathbf{S}_\beta$. Clases de conjuntos aditivas de grado β.

La operación $\mathbf{S}_\beta$, que trataremos en este párrafo, consiste en formar conjuntos sumas de menos de $\aleph_\beta$ conjuntos de la clase dada $\mathbf{K}$. Las clases de conjuntos pertenecientes a la famila $cl(\mathbf{S}_\beta)$ pueden denominarse clases *aditivas de grado* β.

La definición exacta de la operación $\mathbf{S}_\beta$ es como sigue:

Definición 20.

$$\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}) = \overline{\sum}(\mathbf{U}_\beta(\mathbf{K}) - \{0\}).$$

Más simple, aunque menos cómoda, sería la definición: $\mathbf{S}'_\beta(\mathbf{K}) = \overline{\sum}\mathbf{U}_\beta(\mathbf{K})$, respectivamente $\mathbf{S}'_\beta \overset{\circ}{=} \overline{\sum}\mathbf{U}_\beta$ (veáse las observaciones hechas al inicio de §5, respecto a la definición 18).

Es fácil establecer las propiedades de esta operación siguientes:

Teorema 50.

$^{a})$ $\mathbf{S}_\beta \in \mathfrak{U}_\beta$, luego $\mathbf{S}_\beta \in \mathfrak{M}$;

$^{b})$ $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_\beta$;

$^{c})$ $\mathbf{S}_\beta(0) = 0$;

$^{d})$ $\mathbf{S}_\beta(\{A\}) = \{A\}$;

$^{e})$ $\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K} + \{0\}) = \mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}) + \{0\}$;

$^{f})$ $\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}) \leqslant (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\aleph_\beta}_{\smile}$.

Demostración. Las fórmulas $^{a})-^{b})$ resultan fácilmente de la definición 20 y las consideraciones de §2; para demostrar la fórmula $^{a})$ es conveniente apoyarse en el lema 15^{c}.

En cuanto a la fórmula $^{f})$, en el lema 11^{a}: $f \overset{\circ}{=} \Sigma$ y $A = \mathbf{U}_\beta(\mathbf{K}) - \{0\}$, de donde, por la definición (20) $\overline{\overline{\mathbf{S}_\beta}}(\mathbf{K}) \leqslant \overline{\overline{\mathbf{U}_\beta(\mathbf{K}) - \{0\}}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{U}_\beta(\mathbf{K})}}$. Como en virtud del lema 10^{c}: $\overline{\overline{\mathbf{U}_\beta(\mathbf{K})}} \leqslant (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\aleph_\beta}_{\smile}$, se obtiene la desigualdad buscada: $\overline{\overline{\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K})}} \leqslant (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\aleph_\beta}$. No sé cómo prescindir del axioma de elección en esto.

Ciertas relaciones entre la operación $\mathbf{S}_\beta$ y las operaciones examinadas en los párrafos precedentes se pueden encontrar en el siguiente teorema.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Teorema 51. *a)* $\mathbf{TS}_\beta \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta\mathbf{T}$;

b) $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*$;

c) *Si* $\overline{\overline{\mathbf{K}}} < \aleph_\beta$ *o bien* $\overline{\overline{\sum(\mathbf{K})}} < \aleph_\beta$, *se tiene* $\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}) = \mathbf{S}(\mathbf{K})$;

d) *Si* $\overline{\overline{1}} < \aleph_\beta$ *se cumple* $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{=} \mathbf{S}$;

e) *Si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}_\beta$ *y* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}$, *ocurre* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_\beta$; *si* $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}_\beta$ *y* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{TS}$, *se tiene* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{TS}_\beta$.

Demostración. Las fórmulas ^{a}) y ^{b}) se deducen fácilmente de las definiciones 17, 18 y 20 y del teorema 43^{d}; tenemos que hacer notar que no sabemos demostrar la inclusión: $\mathbf{S}_\beta\mathbf{T} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{TS}_\beta$ sin recurrir al axioma de elección.

En cuanto a la fórmula ^{c}), evidentemente tenemos según la definición $5^{\mathrm{a,b}}$: $\mathbf{U}_\beta(\mathbf{K}) = \mathbf{U}(\mathbf{K})$ en el caso en que $\overline{\overline{\mathbf{K}}} < \aleph_\beta$, y entonces de conformidad con las definiciones 20 y 18: $\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}) = \mathbf{S}(\mathbf{K})$. En la hipótesis de que $\overline{\overline{\sum(\mathbf{K})}} < \aleph_\beta$ tendremos por lo contrario, que razonas como sigue. Consideremos un conjunto arbitrario X tal que

$$X \in \mathbf{S}(\mathbf{K}). \tag{1}$$

Por la definición 18, (1) trae consigo la existencia de una clase $\mathbf{L}$ que verifica las fórmulas:

$$X = \sum(\mathbf{L}), \tag{2}$$

$$\mathbf{L} \subset \mathbf{K} \text{ y } \mathbf{L} \neq 0. \tag{3}$$

De (2) y (3) se concluye en primer lugar que $X \subset \sum(\mathbf{K})$, luego, que $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{\sum(\mathbf{K})}}$, de donde en virtud de la hipótesis

$$\overline{\overline{X}} < \aleph_\beta. \tag{4}$$

Tomando en cuenta (2) y aplicando el axioma de elección se llega a la conclusión de que es posible hacer corresponder a todo elemento y de X un conjunto $\mathbf{F}(y)$ de tal manera que tengamos: $y \in \mathbf{F} \in \mathbf{L}$. Por consiguiente esta función $\mathbf{F}$ cumple con las condiciones siguientes:

$$X \subset \sum_{y \in X} \mathbf{F}(y) = \sum \overline{\mathbf{F}}(X) \tag{5}$$

y

$$\overline{\mathbf{F}}(X) \subset \mathbf{L} \tag{6}$$

De (6) y (2) se sigue que $\sum \overline{\mathbf{F}}(X) \subset \sum(\mathbf{L}) = X$; junto con la inclusión de (5), obtenemos:

$$X = \sum \overline{\mathbf{F}}(X). \tag{7}$$

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

De (3) y (6) se tiene $\overline{\mathbf{F}}(X) \subset \mathbf{K}$; el lema 11[a] proporciona también $\overline{\overline{\overline{\mathbf{F}}(X)}} \leqslant \overline{\overline{X}}$, en donde en virtud de (4) $\overline{\overline{\overline{\mathbf{F}}(X)}} < \aleph_\beta$. Se concluye que

$$\overline{\mathbf{F}}(X) \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{K}). \tag{8}$$

Si $X \neq 0$, se tiene $\overline{\mathbf{F}}(X) \neq 0$, luego entonces por (8) y (7) $\overline{\mathbf{F}}(X) \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{K}) - \{0\}$ y $X \in \overline{\sum}(\mathbf{U}_\beta(\mathbf{K}) - \{0\})$, de donde según la definición 20,

$$X \in \mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}). \tag{9}$$

Pero esta fórmula (9) también se verifica en el caso de $X = 0$.

Entonces se tiene, en razón de (2) y (3), $\mathbf{L} = \{0\}$, de donde $\overline{\overline{\mathbf{L}}} < \aleph_\beta$ y $\mathbf{L} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{K}) - \{0\}$, por lo tanto, como antes $X \in \overline{\sum}(\mathbf{U}_\beta(\mathbf{K}) - \{0\}) = \mathbf{S}_\beta(\mathbf{K})$.

Así, la fórmula (1) implica (9); por lo tanto la clase $\mathbf{K}$ verifica la inclusión: $\mathbf{S}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{S}_\beta(\mathbf{K})$. Por otra parte la fórmula ^{b}) del teorema que nos ocupa proporciona en virtud de la definición 8[b]: $\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}) \subset \mathbf{S}(\mathbf{K})$. Se llega fácilmente entonces a:

$$\mathbf{S}(\mathbf{K}) = \mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}) \text{ en la hipótesis } \overline{\overline{\sum(\mathbf{K})}} < \aleph_\beta, \text{ l.q.q.d.}$$

La fórmula ^{d}) presenta una consecuencia fácil de la proposición establecida antes. Si, en efecto, $\overline{\overline{1}} < \aleph_\beta$, con mayor razón $\overline{\overline{\sum(\mathbf{K})}} < \aleph_\beta$, y por lo tanto $\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}) = \mathbf{S}(\mathbf{K})$ para toda clase $\mathbf{K}$; con ayuda de la definición 8[a] de ello se obtiene inmediatamente la identidad buscada: $\mathbf{S}_\beta = \mathbf{S}$.

Para, por fin, demostrar la proposición ^{e}) consideremos una operación arbitraria $\mathbf{F}$, semi-aditiva de grado β, y contenida en $\mathbf{S}$, (es decir, que satisface las fórmulas $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}_\beta$ y $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}$). De acuerdo con el lema 15[c], para toda clase de conjuntos $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{X} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{Y})} \mathbf{S}_\beta(\mathbf{X}). \tag{10}$$

La aplicación del mismo lema a la operación $\mathbf{S}_\beta$ dará, debido al teorema 50[a]:

$$\mathbf{S}_\beta(\mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{X} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{Y})} \mathbf{S}_\beta(\mathbf{X}). \tag{11}$$

Pero, sea $\mathbf{X} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{Y})$, por lo tanto $\overline{\overline{\mathbf{X}}} < \aleph_\beta$. Como consecuencia de la fórmula ^{d}) antes demostrada se obtiene: $\mathbf{S}_\beta(\mathbf{X}) = \mathbf{S}(\mathbf{X})$; como $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}$, se tiene además $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{S}(\mathbf{X})$, de modo que

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{S}_\beta(\mathbf{X}), \textit{ para todo } \mathbf{X} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{Y}). \tag{12}$$

Las fórmulas (10)-(12) implican de inmediato que $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) \subset \mathbf{S}_\beta(\mathbf{Y})$, para toda clase $\mathbf{Y}$, de donde

$$\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_\beta, \quad \text{l.q.q.d}$$

La operación $\mathbf{TS}_\beta$, también es como $\mathbf{S}_\beta$, semiaditiva de grado β (por el lema 16[g], y por tanto la segunda parte de la proposición e) se demuestra de manera enteramente análoga).

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

La afirmación e) del teorema precedente se debe a los señores Kozniewski y Lindenbaum[1].

Ahora toca el turno de establecer ciertas relaciones entre operaciones $\mathbf{S}_\beta$, con índice β variable.

Teorema 52. ^{a}*) Si* $A \neq 0$ *y* $\beta = sup(\overline{\varphi}(A))$*, se tiene* $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{=} \overset{\circ}{\sum}_{x \in A} \mathbf{S}_{\varphi(x)}$*;*

^{b}*) si* $\beta \leqslant \gamma$*, se tiene* $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_\gamma$*;*

^{c}*) si* $\gamma < \beta$*, se tiene* $\mathbf{S}_\beta \mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta$*;*

^{d}*) si* $\beta \leqslant cf(\gamma)$*, se tiene* $\mathbf{S}_\beta \mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\gamma$*;*

^{e}*) si* $cf(\gamma) < \beta \leqslant \gamma + 1$*, se cumple* $\mathbf{S}_\beta \mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{\gamma+1}$*;*

^{f}*) si* $cf(\beta) = \beta$*, entonces* $\mathbf{S}_\beta^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta$*;*

^{g}*) si* $cf(\beta) < \beta$*, ocurre* $\mathbf{S}_\beta^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta^3 \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{\beta+1}$*.*

Demostración. La fórmula ^{a}) constituye una consecuencia fácil de las definiciones 20 y 9^b dado que, por la definición 5^b, $\mathbf{U}_\beta(\mathbf{K}) = \sum_{x \in A} \mathbf{U}_{\varphi(x)}(\mathbf{K})$, tomando en cuenta la hipótesis de que $\beta = \sup(\overline{\varphi}(A))$. Si en particular escribimos $\beta = \gamma$, $A = \{0, 1\}$ y $\varphi(0) = \beta \leqslant \varphi(1) = \gamma$, se obtiene de ^{a}): $\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma$ y llegamos así a la inclusión ^{b}).

^{c}) Según el teorema $50^{a,b}$, se tiene $\mathbf{S}_\beta \in \mathfrak{M}$ e $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_\gamma$; al aplicar entonces la segunda parte del lema 17^{c} (para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\gamma$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta$), se obtiene de ello:

$$\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_\beta \mathbf{S}_\gamma. \tag{1}$$

Pongamos en el lema 16^{f}: $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\gamma$; como según el teorema 50^{a} $\mathbf{S}_\beta \in \mathfrak{U}_\beta$ y $\mathbf{S}_\gamma \in \mathfrak{U}_\gamma$ y como por hipótesis $\gamma < \beta$, este lema proporciona:

$$\mathbf{S}_\beta \mathbf{S}_\gamma \in \mathfrak{U}_\beta. \tag{2}$$

Las fórmulas: $\mathbf{S} \in \mathbf{M}$ y $\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}$ (teorema 50^{a}, teorema 51^{b}) implica entonces, de acuerdo con la definición 12^{a}: $\mathbf{S}_\beta \mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_\beta \mathbf{S}$; como por otro lado $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_\beta \subset \mathbf{S} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}^2$ (teorema 50^{a}, teorema 51^{b}, teorema 42^{b}), se obtiene con la ayuda del lema 17^{d}: $\mathbf{S}_\beta \mathbf{S} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{S}_\beta \mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}. \tag{3}$$

Pero, por el teorema 51^{e} (para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta \mathbf{S}_\gamma$), las fórmulas (2) y (3) implican la inclusión: $\mathbf{S}_\beta \mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_\beta$ que junto con (1) finalmente proporciona:

$$\mathbf{S}_\beta \mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta, \quad \text{l.q.q.d.}$$

La fórmula ^{d}) se obtiene de manera enteramente análoga.

Para la proposición ^{e}); admitimos pues que $cf(\gamma) < \beta \leqslant \gamma + 1$. Por la fórmula ^{b}) establecida antes tenemos en este caso $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_{\gamma+1}$, de donde por el lema 14^{b} $\mathbf{S}_\beta \mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_{\gamma+1} \mathbf{S}_\gamma$; por otro lado si se pone: $\beta = \gamma + 1$ en la fórmula ^{c}), se obtiene: $\mathbf{S}_{\gamma+1} \mathbf{S} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{\gamma+1}$. Por lo tanto,

[1] Relacionado con esto véase *Sur les opérations d'addition et de multiplication dans les classes d'ensembles*, Fund. Math. XV, pág. 343, Th. 1.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

$$\mathbf{S}_\beta\,\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_{\gamma+1},\ \text{cuando}\ \beta \leqslant \gamma + 1. \tag{14}$$

Sea $\mathbf{K}$ una clase arbitraria de conjuntos y X un conjunto tal que

$$X \in \mathbf{S}_{\gamma+1}(\mathbf{K}). \tag{15}$$

De acuerdo con las definiciones 20 y 5^{b}, (15) trae consigo la existencia de una clase $\mathbf{L}$ que satisface las condiciones:

$$\mathbf{X} = \sum(\mathbf{L}), \tag{16}$$

$$\mathbf{L} \subset \mathbf{K},\ \overline{\overline{\mathbf{L}}} < \aleph_{\gamma+1}\ \text{y}\ \mathbf{L} \neq 0. \tag{17}$$

De (17) resulta que $0 < \overline{\overline{\mathbf{L}}} \leqslant \aleph_\gamma$. En virtud del lema 2^{b} (con $A = \mathbf{L}$ y $\alpha = \gamma$) se concluye que existe una sucesión de clases $\mathbf{L}_\xi$ del tipo $\omega_{cf(\gamma)}$ que verifica las fórmulas:

$$\mathbf{L} = \sum_{\xi<\omega_{cf(\gamma)}} \mathbf{L}_\xi; \tag{18}$$

$$\overline{\overline{\mathbf{L}}} < \aleph_\gamma\ \textit{y}\ \mathbf{L}_\xi \neq 0\ \textit{para}\ \xi < \omega_{cf(\gamma)}. \tag{19}$$

Las fórmulas (16) y (18) proporcionan, a causa de la ley asociativa de la adición de conjuntos:

$$X = \Sigma\left(\sum_{\xi<\omega_{cf(\gamma)}} \mathbf{L}_\xi\right) = \sum_{\xi<\omega_{cf(\gamma)}} \Sigma(\mathbf{L}_\xi) = \Sigma(E_{\sum(\mathbf{L}_\xi)}[\xi < \omega_{cf(\gamma)}]). \tag{20}$$

En virtud de (17) y (18), $\mathbf{L}_\xi \subset \mathbf{K}$ para $\xi < \omega_{cf(\gamma)}$, de donde, por (19), $\mathbf{L}_\xi \in \mathbf{U}_\gamma(\mathbf{K}) - \{0\}$. Por consiguiente, $\Sigma(\mathbf{L}_\xi) \in \overline{\Sigma}(\mathbf{U}_\gamma(\mathbf{K})) - \{0\}$ y por la definición 20,

$$\Sigma(\mathbf{L}_\xi) \in \mathbf{S}_\gamma(\mathbf{K})\ \text{para}\ \xi < \omega_{cf(\gamma)}. \tag{21}$$

Por un momento, escribamos: $\Sigma(\mathbf{L}_\xi) = F(\xi)$, de donde $E_{\Sigma(\mathbf{L}_\xi)}[\xi < \omega_{cf(\gamma)}] = \overline{F}(E_\xi[\xi < \omega_{cf(\gamma)}])$. Aplicando el lema 11^{a} (para $f \overset{\circ}{=} F$ y $A = E_\xi[\xi < \omega_{cf(\gamma)}]$) obtenemos: $\overline{\overline{E_{\Sigma(\mathbf{L}_\xi)}[\xi < \omega_{cf(\gamma)}]}} \leqslant \overline{\overline{E_\xi[\xi < \omega_{cf(\gamma)}]}} = \aleph_{cf(\gamma)}$, y a fortiori $\overline{\overline{E_{\sum(\mathbf{L}_\xi)}[\xi < \omega_{cf(\gamma)}]}} < \aleph_\beta$, cuando $cf(\gamma) < \beta$. Como además, según (21) $E_{\Sigma(\mathbf{L}_\xi)}[\xi < \omega_{cf(\gamma)}]$ es una clase no vacía contenida en $\mathbf{S}_\gamma(\mathbf{K})$, se concluye de la definición 5^{b} que

$$E_{\Sigma(\mathbf{L}_\xi)}[\xi < \omega_{cf(\gamma)}] \in \mathbf{U}_\beta,\quad \mathbf{S}_\gamma(\mathbf{K}) - \{0\}\ \text{para}\ cf(\gamma) < \beta. \tag{22}$$

De (20) y (22) resulta que $X \in \overline{\Sigma}(\mathbf{U}_\beta\,\mathbf{S}_\gamma(\mathbf{K}) - \{0\})$, de donde por la definición 20

$$X \in \mathbf{S}_\beta\,\mathbf{S}_\gamma(\mathbf{K}),\ \textit{cuando}\ cf(\gamma) < \beta. \tag{23}$$

Así, la fórmula (15) implica (23). Toda clase de conjuntos $\mathbf{K}$ verifica entonces la inclusión: $\mathbf{S}_{\gamma+1}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{S}_\beta\,\mathbf{S}_\gamma(\mathbf{K})$; dicho de otra forma,

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

$$\mathbf{S}_{\gamma+1} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_{\beta}\,\mathbf{S}_{\gamma},\ \textit{cuando } cf(\gamma) < \beta. \tag{24}$$

Las fórmulas (14) y (24) conducen a:

$$\mathbf{S}_{\beta}\,\mathbf{S}_{\gamma} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{\gamma+1}\ \textit{cuando } cf(\gamma) < \beta \leqslant \gamma + 1, \quad \text{l.q.q.d.}$$

Teniendo en cuenta la definición 10[a,b,c], se obtiene como caso particular de la fórmula [d]) (para $\gamma = \beta$) la fórmula [f]): $\mathbf{S}_{\beta} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{\beta}$, *cuando* $cf(\beta) = \beta$.

Así también poniendo en la fórmula [a]): $\gamma = \beta$, se llega a la igualdad: $\mathbf{S}^2_{\beta} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{\beta+1}$ *cuando* $cf(\beta) < \beta$, $\mathbf{S}^3_{\beta} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}^2_{\beta}\,\mathbf{S}_{\beta} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{\beta+1}\,\mathbf{S}_{\beta}$; como por demás, según la fórmula [c]), $\mathbf{S}_{\beta+1}\,\mathbf{S}_{\beta} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{\beta+1}$, finalmente tenemos [g]): $\mathbf{S}^2_{\beta} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}^3_{\beta} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{\beta+1}$, *cuando* $cf(\beta) < \beta$.

Así se concluye la demostración del teorema 52.

Se aprecia fácilmente la analogía entre el lema 8[a,b,c] y el teorema 52[c,d,e]: la operación $\mathbf{S}_{\beta}\,\mathbf{S}_{\gamma}$ coincide respectivamente con una de las operaciones $\mathbf{S}_{\beta}$, $\mathbf{S}_{\gamma}$ o $\mathbf{S}_{\gamma+1}$ bajo las mismas hipótesis bajo las cuales $(\underset{\smile}{\mathfrak{a}}^{\aleph_\gamma})^{\aleph_\beta}$ es igual a uno de los números $\underset{\smile}{\mathfrak{a}}^{\aleph_\beta}$, $\underset{\smile}{\mathfrak{a}}^{\aleph_\gamma}$ o $\underset{\smile}{\mathfrak{a}}^{\aleph_{\gamma+1}}$.

Tanto la operación $\mathbf{S}_{\beta}$, su operación doble $\mathbf{S}^*_{\beta}$ nos van a interesar aquí; en ocasiones resulta cómodo asignarle a esta operación un símbolo independiente, por ejemplo $\mathbf{F}_{\beta}$. Con ayuda de las definiciones 14, 15 y 20, se puede establecer el siguiente teorema que explica el sentido de la operación $\mathbf{S}^*_{\beta}$:

Teorema 53. $\mathbf{S}^*_{\beta}(\mathbf{K}) = \overline{\Pi}(\mathbf{U}_{\beta}(\mathbf{K}) - \{0\})$.

Como vemos, la operación de que se trata consiste en formar los conjuntos producto de menos de $\aleph_\beta$ conjuntos de la clase dada $\mathbf{K}$. Las clases de conjuntos cerradas respecto a la operación $\mathbf{S}^*_{\beta}$ puede llamarse *clases multiplicativas* al grado β.

Apoyándonos en el lema 19 pueden deducirse las propiedadesde la operación $\mathbf{S}_{\beta}$ que acabamos de establecer en los teoremas 50-52, las que les corresponden para la operación $\mathbf{S}^*_{\beta}$. Tan sólo las propiedades siguientes (que corresponden a los teoremas 50[d,e] y 51[c]) no se deducen automáticamente, sino que exigen una demostración especial:

Teorema 54. *a) $\mathbf{S}^*_{\beta}(\{A\}) = \{A\}$;*
b) $\mathbf{S}^*_{\beta}(\mathbf{K} + \{0\}) = \mathbf{S}^*_{\beta}(\mathbf{K}) + \{0\}$;
c) si $\overline{\overline{\mathbf{K}}} < \aleph_\beta$ o bien $\overline{\overline{\sum(\mathbf{K})}} < \aleph_\beta$, se tiene $\mathbf{S}^*_{\beta}(\mathbf{K}) = \mathbf{S}^*(\mathbf{K})$.

Demostración. La demostración de las fórmulas [a]) y [b]) es trivial. Para establecer la proposición [c]) resulta cómodo considerar la clase $\mathbf{K}^{\times} = E_{\sum(\mathbf{K})-X}[X \in \mathbf{K}]$. Evidentemente $\overline{\overline{\mathbf{K}^{\times}}} < \aleph_\beta$ o bien $\overline{\overline{\sum(\mathbf{K}^{\times})}} < \aleph_\beta$ (según la hipótesis admitida para la clase $\mathbf{K}$), de donde, por el teorema 51[c] $\mathbf{S}_{\beta}(\mathbf{K}^{\times}) = \mathbf{S}(\mathbf{K}^{\times})$; por otro lado al juntar las definiciones 20 y 18 con los teoremas 53 y 44, puede el lector convencerse de que[1] $\mathbf{S}^*_{\beta}(\mathbf{K}) = E_{\sum(\mathbf{K})-X}[X \in \mathbf{S}_{\beta}(\mathbf{K}^{\times})]$ y así mismo que $\mathbf{S}^*(\mathbf{K}) = E_{\sum(\mathbf{K})-X}[X \in \mathbf{S}(\mathbf{K}^{\times})]$. De inmediato tenemos la fórmula buscada $\mathbf{S}^*_{\beta}(\mathbf{K}) = \mathbf{S}^*(\mathbf{K})$.

[1] Véase las observaciones en la pág. 26 sobre la coincidencia de las operaciones $\mathbf{F}^*$ y $\mathbf{F}^{\times}$ para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}$, respectivamente $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{\beta}$.

Traduccion Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Además de las propiedades de $\mathbf{S}_\beta$ y $\mathbf{S}^*_\beta$ enunciadas en los últimos teoremas presentados al último hay que mencionar aquí las siguientes. Se tiene el teorema: *para que* $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}_\beta$ *y* $\mathbf{F}(0) = 0$*, es necesario y suficiente que* $\mathbf{F}\Sigma \overset{\circ}{=} \Sigma\overline{\mathbf{F}}\,\mathbf{S}_\beta$ *(es decir, que* $\mathbf{F}\Sigma(\mathcal{H}) = \sum_{X\in\mathbf{S}_\beta(\mathcal{H})} \mathbf{F}(X)$*, para toda familia de clases* $\mathcal{H}$*; véase el teorema análogo de la pág. 51); por tanto, en partícular:* $\mathbf{S}_\beta\Sigma \overset{\circ}{=} \Sigma\overline{\mathbf{S}}_\beta\,\mathbf{S}_\beta$*. A continuación se tienen las fórmulas* $\Sigma\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{=} \Sigma \overset{\circ}{=} \Sigma\mathbf{S}^*_\beta$ *y* $\Pi\,\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{=} \Pi \overset{\circ}{=} \Pi\,\mathbf{S}^*_\beta$*;* $\mathbf{M}\,\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{=} \mathbf{M} \overset{\circ}{=} \mathbf{M}\,\mathbf{S}^*_\beta$*;* $\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}+\mathbf{L}) \subset \mathbf{T}^*(\mathbf{K}) + \mathbf{S}_\beta(\mathbf{L})$ *y* $\mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{K}+\mathbf{L}) \subset \mathbf{T}(\mathbf{K}) + \mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{L})$ *para todo par de clases* $\mathbf{K}$ *y* $\mathbf{L}$ *(respectivamente* $\mathbf{S}_\beta[\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G}] \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*\,\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta\,\mathbf{G}$ *y* $\mathbf{S}^*_\beta[\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G}] \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}\,\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta\,\mathbf{G}$ *para cualesquier operaciones* $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$). Podemos establecer los recíprocos de los teoremas $52^{f,g}$: las fórmulas $\mathbf{S}^2_\beta \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta$ y $cf(\beta) = \beta$ son pues, equivalentes así como las fórmulas: $\mathbf{S}^2_\beta \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{\beta+1}$ y $cf(\beta) < \beta$. Finalmente existen ciertas relaciones menos simples entre las operaciones de la forma $\mathbf{S}_\beta\,\mathbf{S}^*_\gamma$, $\mathbf{S}_\beta\,\mathbf{S}^*_\gamma\,\mathbf{S}_\delta\ldots$ de un lado y, por otra parte [1]), las de la forma $\mathbf{S}^*_\beta\,\mathbf{S}_\gamma$ y $\mathbf{S}^*_\beta\,\mathbf{S}_\gamma\,\mathbf{S}^*_\delta\ldots$

Las operaciones $\mathbf{S}_\beta$ y $\mathbf{S}^*_\beta$ sólo fueron estudiadas hasta el presente en los casos[2] $\beta = 0$ y $\beta = 1$. El Sr. Hausdorff introdujo símbolos especiales para las operaciones $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}^*_1$, a saber σ y δ ($\mathbf{K}_\sigma = \mathbf{S}_1(\mathbf{K})$, $\mathbf{K}_\delta = \mathbf{S}^*_1(\mathbf{K})$, así como términos especiales para las clases de conjuntos pertenecientes respectivamente a las familias $cl(\mathbf{S}_0 \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_0)$, $cl(\mathbf{S}_1)$, $cl(\mathbf{S}^*_1)$ y $cl(\mathbf{S}_1 \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_1)$, a saber, *anillo, σ-sistema, δ-sistema y σδ-sistema.*[3]

Para las consideraciones que siguen, es cómodo introducir una operación auxiliar $\mathbf{R}_\beta$; esta operación estrechamente relacionada con $\mathbf{S}_\beta$ y $\mathbf{S}^*_\beta$, es de por sí interesante. Para efectuar la operación $\mathbf{R}_\beta$ sobre una clase de conjuntos $\mathbf{K}$, se consideran todas las subclases $\mathbf{X}$ de $\mathbf{K}$ que contiene menos de $\aleph_\beta$ conjuntos y se forman para todo $\mathbf{X}$ todas las sumas de productos (o bien, equivalentemente según el teorema 47, todos los productos de sumas) de conjuntos de $\mathbf{X}$; los conjuntos así formados constituyen la clase $\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K})$. Simbólicamente tenemos:

Definición 21. $\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K}) = \sum_{\mathbf{X}\in\mathbf{U}_\beta(\mathbf{K})} \mathbf{S}\mathbf{S}^*(\mathbf{X})$.

La definición que precede se puede poner de manera más concisa como: $\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K}) = \Sigma\overline{\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*}\,\mathbf{U}_\beta(\mathbf{K})$, respectivamente $\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{=} \Sigma\overline{\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*}\mathbf{U}_\beta$. Nótese que las operaciones $\mathbf{S}_\beta$ y $\mathbf{S}^*_\beta$ pueden expresarse análogamente: $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{=} \Sigma\overline{\mathbf{S}}\mathbf{U}_\beta$ y $\mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{=} \Sigma\overline{\mathbf{S}^*}\mathbf{U}_\beta$. Este procedimiento de formar las operaciones $\mathbf{S}_\beta$, $\mathbf{S}^*_\beta$ y $\mathbf{R}_\beta$ a partir de $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^*$ y $\mathbf{S}\mathbf{S}^*$ se presta a una generalización, que consiste en hacer corresponder a toda operación $\mathbf{F}$ y todo número ordinal β una operación $\mathbf{F}_\beta$ determinada por la fórmula $\mathbf{F}_\beta \overset{\circ}{=} \Sigma\overline{\mathbf{F}}\mathbf{U}_\beta$; también ligada con la operación más vasta $\mathbf{F}_\infty \overset{\circ}{=} \sum\overline{\mathbf{F}}\mathbf{U}$ (que tan sólo constituye un caso particular de $\mathbf{F}_\beta$). El estudio de estas operaciones inducídas en el algoritmo delineado en §2, no se desarrollará aquí.

Algunas operaciones elementales de la operación $\mathbf{R}_\beta$ serán dadas en los dos teoremas siguientes:

[1]Al respecto véase: W.Sierpiński y A. Tarski, *Sobre una propiedad característica de los números inaccesibles*, Fund. Math. XV, pág. 292; A. Koźniewski y A. Lindenbaum, *Sobre las operaciones de adición y multiplicación en las clases de conjuntos*, Fund. Math. XV pág. 342.

[2]Fué considerado por Sierpiński en su artículo: *Sobre los conjuntos hiperborelianos*, Sociedad de Ciencias de Varsovia, 1926, págs. 16-22.

[3]Véase F. Hausdorff, *Mengenlehre II*, 2ª edición, 1927, págs. 77-85; también W. Sierpiński, *Wstep do teorji mnogości i topologji* (*Introducción a la Teoría de Conjuntos y Topología*, en polaco), Lwów 1930, págs. 108-119.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

Teorema 55. $^{\mathrm{a}}$) *$\mathbf{R}_\beta \in \mathfrak{U}_\beta$, luego $\mathbf{R}_\beta \in \mathbf{M}$;*
$^{\mathrm{b}}$) *$\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta$;*
$^{\mathrm{c}}$) *si $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}_\beta$ y $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$, entonces $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta$;*
$^{\mathrm{d}}$) *$\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}^*\,\mathbf{S}_\beta$ y $\mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*_\beta$;*
$^{\mathrm{e}}$) *$\mathbf{R}^*_\beta = \mathbf{R}_\beta$ y $\mathbf{C}\,\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{=} \mathbf{R}_\beta\,\mathbf{C}$;*
$^{\mathrm{f}}$) *$\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K}+\mathbf{L}) \subset \mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}) + \mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{L})$ para cualesquier clases arbitrarias de conjuntos $\mathbf{K}$ y $\mathbf{L}$ (en otros términos, $\mathbf{R}_\beta[\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G}] \overset{\circ}{=} \mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*_\beta\,\mathbf{G}$ para dos operaciones cualesquiera $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$);*
$^{\mathrm{g}}$) *$\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K}) \leqslant (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}} \cdot 2^{2^{\overset{\aleph_\beta}{\smile}}}$.*

Demostración. Las fórmulas $^{\mathrm{a}}$) y $^{\mathrm{b}}$) se deducen fácilmente de la definición 21 y del teorema 42^{b} con ayuda de las definiciones y lemas de §2.

La demostración de $^{\mathrm{c}}$) es análoga a la del teorema 51^{e}.

Poniendo en $^{\mathrm{c}}$): $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta$, respectivamente $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}^*_\beta$, y teniendo en cuenta las fórmulas: $\mathbf{S}_\beta \in \mathfrak{U}_\beta$ y $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$, respectivamente $\mathbf{S}^*_\beta \in \mathfrak{U}_\beta$ y $\mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$ (que se obtienen sin dificultad de los teoremas 50^{a}, 51^{b} y $42^{\mathrm{a,b}}$ aplicando los lemas 17^{c} y $19^{\mathrm{c,j,i}}$), llega uno a las inclusiones: $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta$ y $\mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta$. Al aplicar los teoremas 47, 51^{c} y 54^{c}, se obtienen las siguientes transformaciones de la definición 21: $\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K}) = \sum_{\mathbf{X}\in\mathbf{U}_\beta(\mathbf{K})} \mathbf{S}^*\,\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \sum_{\mathbf{X}\in\mathbf{U}_\beta(\mathbf{K})} \mathbf{S}^*\,\mathbf{S}_\beta(\mathbf{X}) = \sum_{\mathbf{X}\in\mathbf{U}_\beta(\mathbf{K})} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{X})$; pero las operaciones $\mathbf{S}^*\,\mathbf{S}_\beta$ y $\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*_\beta$ son monótonas (por los teoremas 42^{a}, 50^{a} y los lemas 19^{g}, 16^{c}), por lo que se concluye con ayuda del lema 15^{a} que $\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K}) \subset \mathbf{S}^*\,\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K})$ y $\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K}) \subset \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{K})$ para toda clase $\mathbf{K}$, luego que $\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}^*\,\mathbf{S}_\beta$ y $\mathbf{R} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*_\beta$. Así se han establecido las fórmulas $^{\mathrm{d}}$).

Para demostrar las identidades $^{\mathrm{e}}$) observemos que en virtud de $^{\mathrm{a}}$) y del lema 19^{i} se tiene $\mathbf{R}^*_\beta \in \mathfrak{U}_\beta$; como por otro lado $\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$ (teorema 51^{b}, lema 19^{c}, teorema 42^{a}, definición 12^{a}), se deduce de $^{\mathrm{d}}$) con ayuda del lema $19^{\mathrm{b,c,e}}$: $\mathbf{R}^*_\beta \overset{\circ}{\subset} [\mathbf{S}^*\,\mathbf{S}_\beta]^* \overset{\circ}{=} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$. Al escribir en $^{\mathrm{c}}$): $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{R}_\beta$, concluímos $\mathbf{R}^*_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta$, de donde, por aplicación del lema $19^{\mathrm{b,c}}$: $\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{=} [\mathbf{R}^*_\beta]^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}^*_\beta$ y finalmente: $\mathbf{R}^*_\beta \overset{\circ}{=} \mathbf{R}_\beta$. Por el lema 19^{a} esta última fórmula dará además: $\mathbf{C}\,\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{=} \mathbf{R}_\beta\,\mathbf{C}$, l.q.q.d.

Para $^{\mathrm{f}}$), se procederá como sigue.

Consideremos una clase de conjuntos $\mathbf{X}$ tal que

$$\mathbf{X} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{K}+\mathbf{L}). \tag{1}$$

De conformidad con la definición 5^{b} se tiene pues $\mathbf{X} \subset \mathbf{K}+\mathbf{L}$ y $\overline{\overline{\mathbf{X}}} < \aleph_\beta$ de donde

$$\mathbf{X} = \mathbf{K}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{L}\cdot\mathbf{X}, \tag{2}$$

$$\overline{\overline{\mathbf{K}\cdot\mathbf{X}}} < \aleph_\beta \text{ y } \overline{\overline{\mathbf{L}\cdot\mathbf{X}}} < \aleph_\beta. \tag{3}$$

Aplicando el teorema 45^{c}, se obtiene de (2): $\mathbf{S}^*(\mathbf{X}) \subset \mathbf{T}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{X}) + \mathbf{S}^*(\mathbf{L}\cdot\mathbf{X})$; la operación $\mathbf{S}$ es monótona (teorema 42^{a}), y por tanto se sigue $\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*(\mathbf{X}) \subset \mathbf{S}(\mathbf{T}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{X}) + \mathbf{S}^*(\mathbf{L}\cdot\mathbf{X}))$. Por otra parte, el teorema 43^{c} para $\mathbf{K} = \mathbf{S}^*(\mathbf{L}\cdot\mathbf{X})$ y $\mathbf{L} = \mathbf{T}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{X})$ da: $\mathbf{S}(\mathbf{T}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{X})+\mathbf{S}^*(\mathbf{L}\cdot\mathbf{X})) \subset \mathbf{S}\,\mathbf{T}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{X})+\mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*(\mathbf{L}\cdot\mathbf{X})$. En consecuencia:

Traduccion Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

$$\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*(\mathrm{X}) \subset \mathbf{S}\,\mathbf{T}(\mathbf{K}\cdot\mathrm{X}) + \mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*(\mathbf{L}\cdot\mathrm{X}). \tag{4}$$

Según el teorema 43[b] se tiene: $\mathbf{S}\,\mathbf{T}(\mathbf{K}\cdot\mathrm{X}) = \mathbf{T}\,\mathbf{S}(\mathbf{K}\cdot\mathrm{X})$; usando (3) y el teorema 51[c] se puede decir que $\mathbf{S}\,\mathbf{T}(\mathbf{K}\cdot\mathrm{X}) = \mathbf{T}\,\mathbf{S}_{\beta}(\mathbf{K}\cdot\mathrm{X})$. Como $\mathbf{T}\,\mathbf{S}_{\beta} \in \mathbf{M}$ (a causa de los teoremas 36[a], 50[a] y el lema 16[c]), resulta finalmente que

$$\mathbf{S}\,\mathbf{T}(\mathbf{K}\cdot\mathrm{X}) \subset \mathbf{T}\,\mathbf{S}_{\beta}(\mathbf{K}). \tag{5}$$

Análogamente se obtiene:

$$\mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*(\mathbf{L}\cdot\mathrm{X}) \subset \mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*_{\beta}(\mathbf{L}), \tag{6}$$

y las inclusiones (4)-(6) traen consigo:

$$\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*(\mathrm{X}) \subset \mathbf{T}\,\mathbf{S}_{\beta}(\mathbf{K}) + \mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*_{\beta}(\mathbf{L}). \tag{7}$$

Así se demuestra que toda clase X que satisface la fórmula (1) también verifica la inclusión (7). En consecuencia se tiene: $\sum_{\mathrm{X}\in\mathbf{U}_{\beta}(\mathbf{K}+\mathbf{L})} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*(\mathrm{X}) \subset \mathbf{T}\,\mathbf{S}_{\beta}(\mathbf{K}) + \mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*_{\beta}(\mathbf{L})$, de donde por la definición 21: $\mathbf{R}_{\beta}(\mathbf{K}+\mathbf{L}) \subset \mathbf{T}\,\mathbf{S}_{\beta}(\mathbf{K}) + \mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*_{\beta}(\mathbf{L})$ *otro enunciado para clases* $\mathbf{K}$ *y* $\mathbf{L}$ *cualesquiera*.

Con ayuda de las definiciones 8[b] y 9[a] se deducen con facilidad: $\mathbf{R}_{\beta}[\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{G}] \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}\,\mathbf{S}_{\beta}\,\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*_{\beta}\,\mathbf{G}$ *para cualesquier dos operaciones* $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$, lo cual termina la demostración de [f]).

Pasemos a [g]). De la definición 21 se sigue que

$$\overline{\overline{\mathbf{R}_{\beta}(\mathbf{K})}} \leqslant \sum_{\mathrm{X}\in\mathbf{U}_{\beta}(\mathbf{K})} \overline{\overline{\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*(\mathrm{X})}}. \tag{8}$$

Por el teorema 42[g] y el lema 19[i] se tiene: $\overline{\overline{\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*(\mathrm{X})}} \leqslant 2^{\overline{\overline{\mathbf{S}^*(\mathrm{X})}}} \leqslant 2^{2^{\overline{\overline{\mathrm{X}}}}}$ para toda clase de conjuntos X; así se tiene, si $\mathrm{X} \in \mathbf{U}_{\beta}(\mathbf{K})$, por tanto $\overline{\overline{\mathrm{X}}} < \aleph_{\beta}$, se obtiene, con la definición 4: $\overline{\overline{\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*(\mathrm{X})}} \leqslant 2^{2^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta}}}}$.

Como además, por el lema 10[c], $\overline{\overline{\mathbf{U}_{\beta}(\mathbf{K})}} \leqslant (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta}}}$, se concluye que

$$\sum_{\mathrm{X}\in\mathbf{U}_{\beta}(\mathbf{K})} \overline{\overline{\mathbf{S}\,\mathbf{S}^*(\mathrm{X})}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{K}}}^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta}}} \cdot 2^{2^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta}}}}. \tag{9}$$

Las fórmulas (8) y (9) implican de inmediato la desigualdad buscada:

$$\overline{\overline{\mathbf{R}_{\beta}(\mathbf{K})}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{K}}}^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta}}} \cdot 2^{2^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta}}}}.$$

Queda por tanto el teorema en cuestión completamente demostrado.

Teorema 56. [a]) *Si* $A \neq 0$ *y* $\beta = sup(\overline{\varphi}(A))$, *se tiene* $\mathbf{R}_{\beta} \overset{\circ}{=} \overset{\circ}{\sum}_{x\in A} \mathbf{R}_{\varphi(x)}$;
[b]) *si* $\beta \leqslant \gamma$, *se cumple* $\mathbf{R}_{\beta} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_{\gamma}$;
[c]) *si* $\gamma < \beta$, *ocurre* $\mathbf{R}_{\beta}\,\mathbf{R}_{\gamma} \overset{\circ}{=} \mathbf{R}_{\beta}$;
[d]) *si* $\beta \leqslant cf(\gamma)$, *entonces* $\mathbf{R}_{\beta}\,\mathbf{R}_{\gamma} \overset{\circ}{=} \mathbf{R}_{\gamma}$;

Traduccion Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

^{e}) *si* $cf(\beta) = \beta$, *se cumple* $\mathbf{R}_\beta^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{R}_\beta$;

^{f}) *si* $cf(\beta) = \beta$, *se tiene* $[\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]]^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]$.

Demostración. La prueba de las proposiciones ^{a})-^{e}) es completamente análoga a la de las partes correspondientes (^{a})-^{d}) y ^{f})) del teorema 52.

En lo referente a la fórmula ^{f}), se razona como sigue. Aplicando el lema 14^{c} y tomando en cuenta el lema 17^{b} y del teorema 55^{c} se obtiene: $[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{=} \mathbf{I}\,\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{C}\,\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{=} \mathbf{R}_\beta\,\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta\,\mathbf{C}$;

la operación $\mathbf{R}_\beta$ es monótona (teorema 55^{a}), y por lo tanto la definición 12 da aún más:

$\mathbf{R}_\beta\,\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]$ y $\mathbf{R}_\beta\,\mathbf{C} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]$, de donde $\mathbf{R}_\beta\,\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta\,\mathbf{C} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]$. Por consiguiente,

$$[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]. \tag{1}$$

Aplicando nuevamente la definición 12^{a} se deduce de (1): $\mathbf{R}_\beta[[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]\mathbf{R}_\beta] \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta[\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]]$; con ayuda del lema $14^{a,b}$ se concluye que

$$[\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]][\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]] \overset{\circ}{\subset} [\mathbf{R}_\beta\mathbf{R}_\beta][[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}][\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]]. \tag{2}$$

Pero la definición 10 permite escribir la inclusión (2) en la forma más simple: $[\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]]^2 \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta^2[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]^2$; como $\mathbf{R}_\beta^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{R}_\beta$ (por la fórmula ^{e}) del teorema en cuestión) y también $[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}$ (lema 18^{c}), se sigue que

$$[\mathbf{R}[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]]^2 \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]. \tag{3}$$

Por otra parte se tiene $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]$ (teorema 55^{b}, lema 17^{c}), de donde según el lema 17^{c}:

$$\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}] \overset{\circ}{\subset} [\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]][\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]] \overset{\circ}{=} [\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]]^2. \tag{4}$$

Las fórmulas (3) y (4) implican:

$$[\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]]^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}], \text{ l.q.q.d.}$$

Los teoremas $55^{a\text{-}c}$ y $56^{a\text{-}e}$ nos informan de varias propiedades de la operación $\mathbf{R}_\beta$, análogas a las de $\mathbf{S}_\beta$ y $\mathbf{S}_\beta^*$. Observemos todavía algunas propiedades de esta especie. Se tiene las fórmulas: $\mathbf{R}_\beta(0) = 0$, $\mathbf{R}_\beta(\{A\}) = \{A\}$; $\Sigma\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{=} \Sigma$ y $\Pi\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{=} \Pi$: $\mathbf{M}\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{=} \mathbf{M}$. Por analogía con el teorema $51^{d,e}$ se pueden demostrar los teoremas: si $\overline{\overline{\mathbf{K}}} < \aleph_\beta$ o $\overline{\overline{\Sigma(\mathbf{K})}} < \aleph_\beta$, *se tiene* $\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K}) = \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*(\mathbf{K})$; si $\overline{\overline{1}} < \aleph_\beta$, *se tiene* $\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{=} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$. Sin embargo, no sabemos si el teorema $52^{e,g}$ puede exterderse también sobre la operación $\mathbf{R}_\beta$.

Paso ahora al estudio de las clases cerradas respecto a las operaciones $\mathbf{S}_\beta$ y $\mathbf{S}_\beta^*$. Se debe observar ante todo que este estudio puede limitarse a los números β que son índices de los números iniciales regulares (que por tanto verifican la fórmula: $cf(\beta) = \beta$). Esto, en efecto, resulta del teorema siguiente:

Teoremas 57. *Si* $cf(\beta) < \beta$, *se tiene* $cl(\mathbf{S}_\beta) = cl(\mathbf{S}_{\beta+1})$ *y* $cl(\mathbf{S}_\beta^*) = cl(\mathbf{S}_{\beta+1}^*)$.

Demostración. Poniendo en el teorema 25: $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta$ y $\nu = 2$ y tomando en cuenta el teorema 50^{b}, se obtiene: $cl(\mathbf{S}_\beta) = cl(\mathbf{S}_\beta^2)$, de donde, según el teorema 52^{g}: $cl(\mathbf{S}_\beta) = cl(\mathbf{S}_{\beta+1})$; por el corolario 27 se concluye que $cl(\mathbf{S}_\beta^*) = cl(\mathbf{S}_{\beta+1}^*)$, l.q.q.d.

Traduccion. Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Con ayuda del corolario 22 y el teorema 24[d] se pueden obtener del teorema precedente algunos corolarios respecto de las operaciones de la forma $\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta$ y $\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta$ ($\mathbf{F}$ operación arbitraria), $\mathbf{FS}_\beta$ y $\mathbf{FS}^*_\beta$ (donde $\mathbf{F}$ es una operación monótona y adjuntiva) etc. No insisto en estos aspectos porque no intervendrán en lo sucesivo.

La evaluación de la potencia de una familia cualquiera de tipo $cl(\mathbf{S}_\beta)$ o $cl(\mathbf{S}^*_\beta)$ no presenta dificultades:

Teorema Fundamental VIII. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, *se tiene* $\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^*_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Demostración. Basada en el teorema 51[b], es enteramente análoga a la del teorema fundamental IV. Es más difícil estudiar familias como $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)$, $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)$, $cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma)$, etc. Voy a comenzar por los lemas siguientes:

Lema 58. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, *existe una clase de conjuntos* $\mathbf{K}$ *que verifica las fórmulas* $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{E}_{\mathbf{X}}[\mathbf{K} \cdot \mathbf{TS}_{p(\alpha)}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}]$ *y* $\overline{\overline{\mathbf{K}}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Demostración. Por el lema 40 existe una clase de conjuntos $\mathbf{L}$ tal que

$$\mathbf{U}(\mathbf{L}) \subset \mathbf{E}_{\mathbf{X}}[\mathbf{L} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}] \quad \text{y} \quad \overline{\overline{\mathbf{L}}} = 2^{\aleph_\alpha}. \tag{1}$$

Aquí examinaremos la familia $\overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L})$. Observemos en primer lugar que la definición 5[b] implica la fórmula: $\mathbf{\Sigma U}_\beta(\mathbf{X}) = X$ para todo conjunto X y todo número β. Por consiguiente, para cualesquier X y Y, si $\mathbf{U}_\beta(X) = \mathbf{U}_\beta(Y)$, se tiene $\mathbf{\Sigma U}_\beta(X) = \mathbf{\Sigma U}_\beta(Y)$, de donde $X = Y$; por tanto, la función $\mathbf{U}_\beta$ es biunívoca. Por ello resulta en particular (para $\beta = p(\alpha)$) que toda clase de conjuntos $\mathbf{X}$ es de potencia igual a la de su imagen $\overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{X})$:

$$\overline{\overline{\mathbf{X}}} = \overline{\overline{\overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{X})}} \text{ para toda clase } \mathbf{X}, \tag{2}$$

de donde según (1)

$$\overline{\overline{\overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L})}} = 2^{\aleph_\alpha}. \tag{3}$$

Vamos a demostrar que la familia $\overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L})$ verifica la fórmula

$$\mathbf{U}\overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L}) \subset E_{\mathcal{X}}[\overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{T}\,\mathbf{S}_{p(\alpha)}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}]. \tag{4}$$

Supongamos, al contrario de (4) que existe una familia de clases $\mathcal{X}$ tal que

$$\mathcal{X} \subset \overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L}) \text{ y } \overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{TS}_{p(\alpha)}(\mathcal{X}) - \mathcal{X} \neq 0. \tag{5}$$

(5) implica la existencia de una clase $\mathbf{M}$ que satisface las condiciones:

$$\mathbf{M} \in \overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L}) - \mathcal{X} \tag{6}$$

y

$$\mathbf{M} \in \mathbf{T}\,\mathbf{S}_{p(\alpha)}(\mathcal{X}). \tag{7}$$

Según la definición 17 (para $\mathbf{K} = \mathbf{S}_{p(\alpha)}(\mathcal{X})$), se concluye de (7) que existe una clase $\mathbf{M}_1$, tal que $\mathbf{M} \subset \mathbf{M}_1 \in \mathbf{S}_{p(\alpha)}(\mathcal{X})$. Al remplazar en la definición 20 $\mathbf{K}$ por $\mathcal{X}$ y β por $p(\alpha)$ se deduce la existencia de

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

una familia $\mathcal{X}_1$, que verifica las fórmulas: $\mathbf{M}_1 = \mathbf{\Sigma}(\mathcal{X}_1)$ y $\mathcal{X}_1 \in \mathbf{U}_{p(\alpha)}(\mathcal{X})$. Se tiene entonces; por la definición 5^{b},

$$\mathbf{M} \subset \mathbf{\Sigma}(\mathcal{X}_1), \tag{8}$$

$$\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X} \quad \text{y} \quad \overline{\overline{\mathcal{X}_1}} < \aleph_{p(\alpha)}. \tag{9}$$

Las fórmulas (5) y (9) proporcionan: $\mathcal{X}_1 \subset \overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L})$. Con ayuda del teorema conocido sobre imágenes de conjuntos (si $A \subset \overline{f}(B)$, existe un conjunto B_1, tal que $A = \overline{f}(B_1)$ y $B_1 \subset B$), se concluye que existe una clase $\mathbf{L}_1$ que cumple las condiciones

$$\mathcal{X}_1 = \overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L}_1) \text{ y } \mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}. \tag{10}$$

Se sigue de (2) y (10) que $\overline{\overline{\mathcal{X}_1}} = \overline{\overline{\mathbf{L}_1}}$, de donde según (9)

$$\overline{\overline{\mathbf{L}_1}} < \aleph_{p(\alpha)}. \tag{11}$$

En virtud de (6) y (9), $\mathbf{M} \in \overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L}_1) - \mathcal{X}_1$, luego entonces, por (10), $\mathbf{M} \in \overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L}) - \overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L}_1)$. Al aplicar la fórmula conocida respecto a la diferencia de imágenes ($\overline{f}(A) - \overline{f}(B) \subset \overline{f}(A-B)$), se obtiene seguidamente: $\mathbf{M} \in \overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L} - \mathbf{L}_1)$; por consiguiente según la definición 6, existe un conjunto A tal que

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}_{p(\alpha)}(A) \tag{12}$$

y

$$A \in \mathbf{L} - \mathbf{L}_1. \tag{13}$$

Según (1) y (10) $\mathbf{L} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{L}_1) \subset \mathbf{L}_1$; se obtiene en virtud de (13): $\{A\} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{L}_1) \subset \mathbf{L}_1(\mathbf{L} - \mathbf{L}_1) = 0$, de donde $A \notin \mathbf{T}(\mathbf{L}_1)$. Con ayuda de la definición 17 se concluye que $A \notin \mathbf{U}(\mathbf{Z})$, luego, que $A - Z \neq 0$ para todo conjunto $\mathbf{Z}$ de la clase $\mathbf{L}_1$. Aplicando el axioma de elección se puede poner en correspondencia los conjuntos $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{L}_1$ con elementos $f(\mathbf{Z})$ de modo que se tenga

$$f(\mathbf{Z}) \in A - \mathbf{Z} \text{ para } \mathbf{Z} \in \mathbf{L}_1. \tag{14}$$

De (14) resulta que $\overline{f}(L_1) \subset A$; además, por el lema 11^{a}, se tiene $\overline{\overline{\overline{f}(\mathbf{L}_1)}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{L}_1}}$, de donde, en razón de (11), $\overline{\overline{\overline{f}(\mathbf{L}_1)}} < \aleph_{p(\alpha)}$. Se obtiene así: $\overline{f}(\mathbf{L}_1) \in \mathbf{U}_{p(\alpha)}(A)$, lo cual junto con (12), dará:

$$\overline{f}(\mathbf{L}_1) \in \mathbf{M}. \tag{15}$$

De (14) se concluye a continuación que $\overline{f}(\mathbf{L}_1) - \mathbf{Z} \neq 0$ para todo conjunto $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{L}_1$, por tanto que $\overline{f}(\mathbf{L}_1) \mathrel{\overline{\in}} \mathbf{U}_{p(\alpha)}(\mathbf{Z})$. En consecuencia, el conjunto $\overline{f}(\mathbf{L}_1)$ no pertenece a ninguna de las clases que forman la familia $\overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L}_1)$ de donde en virtud de (10)

$$\overline{f}(\mathbf{L}_1) \mathrel{\overline{\in}} \mathbf{\Sigma}(\mathcal{X}_1). \tag{16}$$

(8) y (16) darán inmediatamente:

$$\overline{f}(\mathbf{L}_1) \notin \mathbf{M}. \tag{17}$$

Traduccion Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

Traduccion Andres Sestier Bouclier

Pero las fórmulas (15) y (17) son contradictorias, luego la suposición (5) es falsa, y la familia $\overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L})$ verificará la fórmula (4).

Observemos aún, que para $X \in \mathbf{L}$ evidentemente se tiene $X \subset 1$, de donde $\mathbf{U}_{p(\alpha)}(X) \subset \mathbf{U}_{p(\alpha)}(1)$ y $\mathbf{U}_{p(\alpha)}(X) \in \mathbf{U}\,\mathbf{U}_{p(\alpha)}(1)$; de esto resulta

$$\overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L}) \subset \mathbf{U}\,\mathbf{U}_{p(\alpha)}(1). \tag{18}$$

Finalmente si en el lema 10[d] se pone 1 y β por $p(\alpha)$, se obtiene por hipótesis:

$$\overline{\overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}(1)}} = \aleph_\alpha = 1. \tag{19}$$

Escribamos momentáneamente: $1^* = \mathbf{U}_{p(\alpha)}(1)$ y $\mathbf{K}^* = \overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L})$. Las fórmulas (3), (4) y (18) muestran que para el conjunto 1^* se puede construir una clase de sus subconjuntos $\mathbf{K}^*$ que verifica la tesis del lema aludido. Evidentemente, la existencia de una clase semejante de subconjuntos constituye una propiedad del conjunto, invariante respecto de todas las transformaciones biunívocas; en consecuencia, cuando esta propiedad se presenta para un conjunto, se presentará necesariamente para todo conjunto de misma potencia. Pero, en virtud de (19), los conjuntos 1 y 1^* tienen potencias iguales; asi que se puede construir en el conjunto 1 una clase de conjuntos $\mathbf{K}$ que cumple las dos condiciones de la tesis, l.q.q.d.

En esta demostración nos vimos obligados a extender el dominio primitivo de las operaciones $\mathbf{T}$ y $\mathbf{S}_\beta$ y aplicarlas no a las clases de conjuntos, si no a las familias de tales clases; así establecimos una propiedad de los conjuntos de rango inferior a través de los conjuntos de rango superior. Suele aplicarse tal método de razonamiento en las diversas demostraciones del dominio de la teoría general de conjuntos; sin embargo, tanto en nuestro caso como en otros casos, la cuestión de saber *si el paso por los conjuntos de rango superior* es inevitable, es un problema aun abierto.

Lema 59. *Si la clase de conjuntos* $\mathbf{K}$ *verifica las fórmulas* $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset E_X[\mathbf{K} \cdot \mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(X) \subset X]$ *y* $\overline{\overline{\mathbf{K}}} \geqslant \aleph_\beta$*, se cumple también:*

[a]*)* $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset E_X[\mathbf{K} \cdot \mathbf{C}\,\mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(X) \subset X]$*;*

[b]*)* $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset E_X[\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}](X) \subset X]$*.*

Demostración. [a]) Supongamos, contradiciendo la tesis del lema, que

$$\mathbf{U}(\mathbf{K}) - E_X[\mathbf{K} \cdot \mathbf{C}\,\mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(X) \subset X] \neq 0; \tag{1}$$

existen pues una clase $\mathbf{L}$ de conjuntos, y un conjunto A que satisfacen:

$$\mathbf{L} \subset \mathbf{K}, \qquad A \in \mathbf{K} \tag{2}$$

y

$$A \in \mathbf{C}\,\mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathbf{L}). \tag{3}$$

Al aplicar sucesivamente la definición 14 a la clase $\mathbf{K} = \mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathbf{L})$, la definición 17 a $\mathbf{K} = \mathbf{S}_\beta(\mathbf{L})$ y la definición 20 a $\mathbf{K} = \mathbf{L}$, se deduce de (3) la existencia de una clase $\mathbf{M}$ que verifica las fórmulas:

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

MEXICO

$$\overline{\overline{\mathbf{M}}} < \aleph_\beta, \tag{4}$$

$$\mathbf{M} \subset \mathbf{L} \tag{5}$$

y

$$1 - A \subset \Sigma(\mathbf{M}). \tag{6}$$

La fórmula (4) implica:

$$\overline{\overline{\mathbf{M} + \{A\}}} < \aleph_\beta; \tag{7}$$

pero, $\mathbf{K}$ es por hipótesis de potencia $\geqslant \aleph_\beta$, y por tanto

$$\mathbf{K} - (\mathbf{M} + \{A\}) \neq 0. \tag{8}$$

Al relacionar (2) y (6), se obtiene $\mathbf{M} + \{A\} \subset \mathbf{K}$; por la hipótesis del lema resulta de ello que

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathbf{M} + \{A\}) \subset \mathbf{M} + \{A\}. \tag{9}$$

La inclusión (6) implica: $\Sigma(\mathbf{M} + \{A\}) = \Sigma(\mathbf{M}) + A = 1$. Por el teorema 43[a] se sigue que $\mathbf{T}\,\mathbf{S}(\mathbf{M} + \{A\}) = \mathbf{U}(1)$; como además $\mathbf{S}_\beta(\mathbf{M} + \{A\}) = \mathbf{S}(\mathbf{M} + \{A\})$ (según el teorema 51[c] y la fórmula (7)), se tiene finalmente:

$$\mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathbf{M} + \{A\}) = \mathbf{U}(1). \tag{10}$$

Pero la fórmula (10) quiere decir que la clase $\mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathbf{M} + \{A\})$ se compone de todos los conjuntos posibles (contenidos en 1). En consecuencia, se cumple $\mathbf{K} \subset \mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathbf{M} + \{A\})$, de donde, según (9):

$$\mathbf{K} \subset \mathbf{M} + \{A\}. \tag{11}$$

La evidente contradicción entre las fórmulas (8) y (10) rechaza la suposición (1); tenemos pues que admitir que

$$\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset E_{\mathrm{X}}[\mathbf{K} \cdot \mathbf{C}\,\mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}], \text{ l.q.q.d.}$$

[b]) De conformidad con las definiciones 9[a] y 13 y en virtud del teorema 55[f], se tiene para toda clase de conjuntos $\mathrm{X} : \mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}](\mathrm{X}) = \mathbf{R}_\beta(\mathrm{X} + \mathbf{C}(\mathrm{X})) \subset \mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathrm{X}) + \mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*_\beta\,\mathbf{C}(\mathrm{X})$, de donde, por el lema 19[a], $\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}](\mathrm{X}) \subset \mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathrm{X}) + \mathbf{C}\,\mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathrm{X})$. Se sigue inmediatamente que

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} + \mathbf{C}](\mathrm{X}) \subset \mathbf{K} \cdot \mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathrm{X}) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{C}\,\mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathrm{X}) \text{ para todo } \mathrm{X} \tag{12}$$

Sea $\mathrm{X} \subset \mathbf{K}$; la hipótesis del lema y la fórmula [a]) que acabamos de establecer implican entonces: $\mathbf{K} \cdot \mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}$ y $\mathbf{K} \cdot \mathbf{C}\,\mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}$; tomando esto en conjunción con (12), concluímos que $\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}](\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}$.

Por consiguiente

Traduccion. Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

$$\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset E_{\mathrm{X}}[\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}_\beta[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}](\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}], \text{ l. q. q. d.}$$

Sin cambiar la demostración precedente, se puede remplazar en el lema 59 la fórmula [a]) por la fórmula más fuerte siguiente: $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset E_{\mathrm{X}}[\mathbf{K} \cdot \mathbf{C}\,\mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathrm{X}) = 0]$. Una observación análoga se aplica al lema 35 de §3.

Corolario 60. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, *existe una clase de conjuntos* $\mathbf{K}$ *que verifica las fórmulas:* $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset E_{\mathrm{X}}[\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}_{p(\alpha)}[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}](\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}]$ *y* $\mathbf{K} = 2^{\aleph_\alpha}$

Demostración. De conformidad con el lema 58, existe una clase $\mathbf{K}$ tal que $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset E_{\mathrm{X}}[\mathbf{K} \cdot \mathbf{T}\,\mathbf{S}_{p(\alpha)}(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}]$ y $\overline{\overline{\mathbf{K}}} = 2^{\aleph_\alpha}$; según los lemas 4[a] y 1[a] se tiene evidentemente $\overline{\overline{\mathbf{K}}} > \aleph_\alpha \geqslant \aleph_{p(\alpha)}$. Al poner en el lema 59[b]: $\beta = p(\alpha)$, uno se convence inmediatamente que $\mathbf{K}$ es la clase que se busca.

Teorema 61. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *y* $\beta \leqslant p(\alpha)$, *se tiene* $\overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Demostración. Teniendo en cuenta que $cf(p(\alpha)) = p(\alpha)$ según el lema 4[b], se concluye del teorema 56[f] (para $\beta = p(\alpha)$) que la operación $\mathbf{R}_{p(\alpha)}[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]$ es iterable: $[\mathbf{R}_{p(\alpha)}[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]]^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{R}_{p(\alpha)}[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]$; en virtud del teorema 55[b], resulta del lema 17[e] que esta operación es además adjuntiva: $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_{p(\alpha)}[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]$. En consecuencia, podemos aplicar el lema 34[b] poniendo $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{R}_{p(\alpha)}[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]$; de este lema y el corolario 60, obtenemos:

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{R}_{p(\alpha)}[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}])}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}. \tag{1}$$

Como $\mathbf{R}_{p(\alpha)} \in \mathbf{M}$, $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_{p(\alpha)}$ (teorema 55[a,b]) y también $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}$, el teorema 24[d] para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{R}_{p(\alpha)}$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}$, dará: $cl(\mathbf{R}_{p(\alpha)}[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]) = cl(\mathbf{R}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C})$, de donde, por (1):

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{R}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}. \tag{2}$$

En razón del teorema 56[b], la desigualdad: $\beta \leqslant p(\alpha)$, dada por la hipótesis, trae consigo: $\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_{p(\alpha)}$, luego $\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta \subset \mathbf{R}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}$. Con ayuda del teorema 21[a] se concluye que

$$cl(\mathbf{R}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}) \subset cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta). \tag{3}$$

Las fórmulas (2) y (3) implican de inmediato que $\overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} \geqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$; la desigualdad inversa también se cumple segun el teorema 32, y se obtiene finalmente:

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}, \text{ l. q. q. d.}$$

Corolario 62. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, $\beta \leqslant p(\alpha)$, $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}_\beta$ *y si además* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*$ *o bien* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$, *se tiene* $\overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Traducción: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

Demostración. Con ayuda de los lemas 17[c] y 19[j] se deduce fácilmente del teorema 42[a,b] las inclusiones: $\mathbf{S} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$ y $\mathbf{S}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$ luego, igualmente $\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$. En consecuencia, la fórmula $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*$ implica: $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$, de modo que no es necesario examinar la primera de estas inclusiones por separado.

Pero, de acuerdo con el teorema 55[c], las fórmulas: $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}_\beta$ y $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}\,\mathbf{S}^*$ proporcionan: $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta$, luego también $\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta$, de donde en virtud del teorema 21 [a] $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta) \subset cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F})$; como según el teorema 61 $\overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ y en razón del teorema 32 $\overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F})}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$, se obtiene inmediatamente:

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{F})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}, \text{ l. q. q. d.}$$

Teorema Fundamental IX. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *y* $\beta \leqslant p(\alpha)$, *se tiene* $\overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Demostración. En virtud de los teoremas 50 [a] y 51 [b], este teorema es tan sólo un caso particular del corolario precedente.

Teorema Fundamental X. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *y* $\beta \leqslant p(\alpha)$, *se tiene* $\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Demostración. Por el teorem 36 [b] la operación $\mathbf{T}$ es iterable ($\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}$); por el lema 4 [b], el teorema 52[f] (para $\beta = p(\alpha)$) demuestra que la operación $\mathbf{S}_{p(\alpha)}$ también lo es. Como además $\mathbf{T}\,\mathbf{S}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{p(\alpha)}\,\mathbf{T}$ (teorema 51[a]), se concluye con ayuda del lema 14[e] que la operación $\mathbf{T}\,\mathbf{S}_{p(\alpha)}$ es igualmente iterable. Por el lema 17[c] y los teorema 36[b] y 50 [b] la operación $\mathbf{T}\,\mathbf{S}_{p(\alpha)}$ es además adjuntiva.

Establecido lo anterior se razonará como en la demostración del teorema 61, pero utilizando el lema 58 en vez del corolario 60. Se llega así a la igualdad: $\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$. Pero resulta del teorema 33 y del lema 19 [d] que $\overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} = \overline{\overline{cl([\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta]^*)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)}}$. Conjuntando las dos fórmulas obtenidas, se ve pues que:

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}, \text{ l. q. q. d.}$$

Corolario 63. [a]*) Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *y* $\beta \leqslant p(\alpha)$, *cada una de las fórmulas:* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta$, $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta$, $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta$ *y* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*_\beta$ *implica que* $\overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

[b]*) si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, $\beta \leqslant p(\alpha)$ *y* $\mathbf{F} \in \mathfrak{U}_\beta$, *cada una de las fórmulas* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}$, $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}\,\mathbf{S}$, $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*$ *y* $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*$ *implica que* $\overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Demostración. Es análoga a la del teorema 49 y del corolario 62; para deducir [b]) de [a]) se usa el teorema 51[e].

Traducción: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

En el corolario 63^{b} hemos logrado evaluar la potencia de las familias $cl(\mathbf{F})$ para una clase bastante extensa de operaciones $\mathbf{F}$, a saber para todas las operaciones que sean a la vez semiaditivas en grado $\beta \leqslant p(\alpha)$ (donde $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$) e intrínsecas.

Teorema Fundamental XI. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *y* $\beta \leqslant p(\alpha)$ *se tiene*

$^{a})$ $\overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$,

$^{b})$ $\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Demostración. En virtud del teorema 51^{b} (para $\beta = \gamma$) y de la fórmula: $\mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}$, que resulta según el lema $19^{b,c}$, se tienen las inclusiones siguientes: $\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta$, $\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta$, $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta$ y $\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta$. Aplicando entonces el corolario 59^{a} (para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta$, $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta$, etc.) se llega a las fórmulas deseadas.

Como otra consecuencia del corolario 63^{a} citemos el siguiente.

Teorema 64. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *y* $\beta \leqslant p(\alpha)$, *se tiene* $\overline{\overline{cl(\mathbf{R}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Demostración. Con ayuda de los teoremas 36^{a}, 50^{a}, 51^{b}, 55^{d} y los lemas 17^{c}, $19^{b,c,g,j}$ se establecen fácilmente las inclusiones $\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta$ y $\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*_\beta$, $\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta$, $\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*_\beta$, $\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*\,\mathbf{S}^*_\beta$ y $\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta$. Por el corolario 63^{a} estas inclusiones implican las fórmulas deseadas.

Ahora voy a demostrar dos lemas que permitirán reforzar el resultado del teorema fundamental XI^{b} en el caso donde aparte del número β, el número γ verifica también $\gamma \leqslant p(\alpha)$.

Lema 65. *Si* $\overline{\overline{\mathbf{K}}} = \aleph_\alpha$, *existe una clase* $\mathbf{L}$ *tal que* $\mathbf{L} \in V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_{p(\alpha)})$ *y* $\overline{\overline{\mathbf{L}}} = \aleph_\alpha$.

Demostración. En virtud del teorema 50^{a} y el lema 19^{l}, tenemos $\mathbf{S}_{p(\alpha)} \in \mathfrak{U}_{p(\alpha)}$ y $\mathbf{S}^*_{p(\alpha)} \in \mathfrak{U}_{p(\alpha)}$, de donde, por el lema 16^{e}

$$\mathbf{S}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_{p(\alpha)} \in \mathfrak{U}_{p(\alpha)}. \tag{1}$$

De acuerdo con el teorema 50^{f} y el lema 19^{l} (para $f(\overline{\overline{\mathrm{X}}}) = (\overline{\overline{\mathrm{X}}})^{\aleph_\beta}_{\smile}$) se tiene entonces: $\overline{\overline{\mathbf{S}_{p(\alpha)}(\mathrm{X})}} \leqslant (\overline{\overline{\mathrm{X}}})^{\aleph_{p(\alpha)}}_{\smile}$ y $\overline{\overline{\mathbf{S}^*_{p(\alpha)}(\mathrm{X})}} \leqslant (\overline{\overline{\mathrm{X}}})^{\aleph_{p(\alpha)}}_{\smile}$, de donde, conforme a la definición 9^{b} $\overline{\overline{[\mathbf{S}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_{p(\alpha)}](\mathrm{X})}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{S}_{p(\alpha)}(\mathrm{X})}} + \overline{\overline{\mathbf{S}^*_{p(\alpha)}(\mathrm{X})}} \leqslant (\overline{\overline{\mathrm{X}}})^{\aleph_{p(\alpha)}}_{\smile} \cdot 2$ para toda clase X. Si, además, $\overline{\overline{\mathrm{X}}} \geqslant 2$, resulta del lema 5^{d} que el número $(\overline{\overline{\mathrm{X}}})^{\aleph_{p(\alpha)}}_{\smile}$, es transfinito ($\geqslant \aleph_{p(\alpha)}$), luego que $(\overline{\overline{\mathrm{X}}})^{\aleph_{p(\alpha)}}_{\smile} \cdot 2 = (\overline{\overline{\mathrm{X}}})^{\aleph_{p(\alpha)}}_{\smile}$; en consecuencia, se tiene en este caso

$$\overline{\overline{[\mathbf{S}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_{p(\alpha)}](\mathrm{X})}} \leqslant (\overline{\overline{\mathrm{X}}})^{\aleph_{p(\alpha)}}_{\smile} \textit{ para toda clase } \mathrm{X}. \tag{2}$$

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

Pero si $\overline{\overline{\mathbf{X}}} < 2$, los teoremas 50[c,d], 54[a] y el lema 19[k] implican que $\mathbf{S}_{p(\alpha)}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} = \mathbf{S}^*_{p(\alpha)}(\mathbf{X})$, de donde $[\mathbf{S}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_{p(\alpha)}](\mathbf{X}) = \mathbf{X}$; se conluye fácilmente (con ayuda del lema 5[c]) que la fórmula (2) también se satisface.

Teniendo (1), (2) y el lema 4[b], las hipótesis del teorema 31, al escribir $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_{p(\alpha)}$ y $\beta = p(\alpha)$, se verán satisfechas; de ello resulta la existencia de una clase $\mathbf{L}$ que verifica las fórmulas:

$$\mathbf{L} \in V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_{p(\alpha)}) \tag{3}$$

y

$$\overline{\overline{\mathbf{L}}} \leqslant (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\aleph_{p(\alpha)}}_{\smile}. \tag{4}$$

En virtud de la definición 5[c] la fórmula (3) dará: $\mathbf{K} \subset \mathbf{L}$; como por hipótesis $\overline{\overline{\mathbf{K}}} = \aleph_\alpha$, se obtiene: $\aleph_\alpha \leqslant \overline{\overline{\mathbf{L}}}$. Por otra parte del lema 6[a] resulta que $(\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\aleph_{p(\alpha)}}_{\smile} = \aleph_\alpha{}^{\aleph_{p(\alpha)}}_{\smile} = \aleph_\alpha$, de donde según (4) $\overline{\overline{\mathbf{L}}} \leqslant \aleph_\alpha$. Combinando ambas desigualdades, se llega a la fórmula

$$\overline{\overline{\mathbf{L}}} = \aleph_\alpha. \tag{5}$$

Las fórmulas (3) y (5) prueban que $\mathbf{L}$ es la clase deseada.

Es posible generalizar y completar el lema precedente de la manera siguiente:

A. *Si* $\overline{\overline{\mathbf{K}}} = \aleph_\alpha$, $\beta \leqslant p(\alpha)$ *y* $\gamma \leqslant p(\alpha)$ *existe una clase* $\mathbf{L}$ *tal que* $\mathbf{L} \in V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma)$, $V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) \subset V(\mathbf{L})$ *y* $\overline{\overline{\mathbf{L}}} = \aleph_\alpha$.

Está última proposición contiene, como caso particular, el teorema conocido según el cual la clase de todos los conjuntos borelianos de números reales (o bien, puntos de un espacio euclideano) tienen potencia $2^{\aleph_0}$. En efecto, sea $\mathbf{K}$ la clase de todos los intervalos, $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$ y $\beta = \gamma = 1$; las hipótesis del teorema **A** se cumplen entonces (en partícular las desigualdades $\beta \leqslant p(\alpha)$ y $\gamma \leqslant p(\alpha)$ por el lema 4[c]), y se ve fácilmente que la clase $\mathbf{L}$ coincide con la de conjuntos borelianos.

El teorema **A** se puede generalizar a su vez de la siguiente manera:

B. *Si* $cf(max(\beta, \gamma)) = max(\beta, \gamma)$, *entonces para toda clase de conjuntos* $\mathbf{K}$ *le corresponde una clase* $\mathbf{L}$ *que verifica las fórmulas:* $\mathbf{L} \in V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma)$, $V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) \subset V(\mathbf{L})$ *y* $\overline{\overline{\mathbf{L}}} \leqslant (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\aleph_{max(\beta,\gamma)}}_{\smile}$.

Tal como el lema 65, este teorema **B** se sigue del teorema 31. En cuanto al caso donde $cf(max(\beta, \gamma)) < max(\beta, \gamma)$, véase la observación de la pág. 36.

Lema 66. *Si* $\mathbf{K} \in cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)$, $\mathbf{L} \in cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)$ *y* $\mathbf{M} = \mathbf{K} + \mathbf{L} + E_{X+Y}[X \in \mathbf{K}$ y $Y \in \mathbf{L}]$, *se tiene* $\mathbf{M} \in cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)$.

Demostración. De acuerdo con el teorema 21[b] y la definición 16, las hipótesis del lema implican que

$$\mathbf{T}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{K} \quad \text{y} \quad \mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}) \subset \mathbf{K}, \tag{1}$$

MEXICO
Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

$$\mathbf{S}_\beta(\mathbf{L}) \subset \mathbf{L} \quad \text{y} \quad \mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{L}) \subset \mathbf{L}. \tag{2}$$

Con ayuda del axioma de elección se puede hacer corresponder a todo conjunto Z de la clase $\mathbf{M}$, conjuntos $F(Z)$ y $G(Z)$ tales que sea verdad

$$Z = F(Z) + G(Z), F(Z) \in \mathbf{K} + \{0\} \text{ y } G(Z) \in \mathbf{L} + \{0\} \text{ para toda } Z \in \mathbf{M} \tag{3}$$

(si, en efecto $Z \in \mathbf{K}$, se escribe: $F(Z) = Z$ y $G(Z) = 0$; si $Z \in \mathbf{L}$, se pone: $F(Z) = 0$ y $G(Z) = Z$; finalmente, en el caso restante: $Z \in E_{X+Y}[X \in \mathbf{K} \text{ y } Y \in \mathbf{L}]$, se aplica el axioma de elección).

Consideremos una clase arbitraria $\mathbf{N}$ que verifique:

$$\mathbf{N} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{M}) - \{0\}, \tag{4}$$

de donde, por la definición 5[b],

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{M}, \ \overline{\overline{\mathbf{N}}} < \aleph_\beta \ \text{ y } \mathbf{N} \neq 0. \tag{5}$$

De (3) y (5) se sigue que $\overline{F}(\mathbf{N}) \subset \mathbf{K} + \{0\}$, $\overline{F}(\mathbf{N}) \neq 0$, $\overline{G}(\mathbf{N}) \subset \mathbf{L} + \{0\}$ y $\overline{G}(\mathbf{N}) \neq 0$; además, en virtud del lema 11[a], $\overline{\overline{\overline{F}(N)}} \leqslant \overline{\overline{N}}$ y $\overline{\overline{\overline{G}(N)}} \leqslant \overline{\overline{N}}$, de donde, según (5) $\overline{\overline{\overline{F}(\mathbf{N})}} < \aleph_\beta$ y $\overline{\overline{\overline{G}(\mathbf{N})}} < \aleph_\beta$. En consecuencia

$$\overline{F}(\mathbf{N}) \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{K} + \{0\}) - \{0\} \qquad \text{y} \qquad \overline{G}(\mathbf{N}) \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{L} + \{0\}) - \{0\}. \tag{6}$$

Por (6) $\sum_{Z\in\mathbf{N}} F(Z) = \Sigma\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{N}) \in \overline{\Sigma}(\mathbf{U}_\beta(\mathbf{K} + \{0\}) - \{0\})$, por tanto de acuerdo con la definición 20 y el teorema 50[e] $\sum_{Z\in\mathbf{N}} F(Z) \in \mathbf{S}_\beta(\mathbf{K} + \{0\}) = \mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}) + \{0\}$; teniendo en cuenta (1), se obtiene:

$$\sum_{Z\in\mathbf{N}} F(Z) \in \mathbf{K} + \{0\}. \tag{7}$$

Análogamente se deduce de (6) y (2):

$$\sum_{Z\in\mathbf{N}} G(Z) \in \mathbf{L} + \{0\}. \tag{8}$$

Notemos aún la consecuencia siguiente de (3) y (5):

$$\Sigma(\mathbf{N}) = \sum_{Z\in\mathbf{N}} Z = \sum_{Z\in\mathbf{N}} (F(Z) + G(Z)) = \sum_{Z\in\mathbf{N}} F(Z) + \sum_{Z\in\mathbf{N}} G(Z). \tag{9}$$

Las fórmulas (7)-(9) muestran que el conjunto $\Sigma(\mathbf{N})$ puede presentarse en la forma: $\Sigma(\mathbf{N}) = X + Y$, donde $X \in \mathbf{K} + \{0\}$ y $Y \in \mathbf{L} + \{0\}$. Se tiene entonces: $\Sigma(\mathbf{N}) \in E_{X+Y}[X \in \mathbf{K} + \{0\} \text{ y } Y \in \mathbf{L} + \{0\}] = E_{X+Y}[X \in \mathbf{K} \text{ y } Y \in \mathbf{L}] + \mathbf{K} + \mathbf{L} + \{0\}$, de donde en virtud de la hipótesis $\Sigma(\mathbf{N}) \in \mathbf{M} + \{0\}$, ya sea $\Sigma(\mathbf{N}) \in \mathbf{M}$, o $\Sigma(\mathbf{N}) \in \{0\}$. Pero debe observarse que fórmula: $\Sigma(\mathbf{N}) \in \{0\}$ implica por (5): $\mathbf{N} = \{0\}$, $\{0\} \subset \mathbf{M}$, luego entonces también $\Sigma(\mathbf{N}) \in \mathbf{M}$. Por consiguiente, en cualquier caso, se cumple

$$\Sigma(\mathbf{N}) \in \mathbf{M}. \tag{10}$$

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Ahora pasemos al conjunto $\Pi(\mathbf{N})$. La fórmula fácil del álgebra de la lógica: $\prod_{x\in A}(F(x)+G(x)) - \prod_{x\in A} G(x) \subset \sum_{x\in A} F(x)$ permite deducir de (3) y (5) que

$$\Pi(N) - \prod_{Z\in\mathbf{N}} G(Z) = \prod_{Z\in\mathbf{N}}(F(Z)+G(Z)) - \prod_{Z\in\mathbf{N}} G(Z) \subset \sum_{Z\in\mathbf{N}} F(Z). \tag{11}$$

Resulta de (7) y (11) que $\Pi(\mathbf{N}) - \prod_{Z\in\mathbf{N}} G(Z) \in \sum_{X\in\mathbf{K}+\{0\}} \mathbf{U}(X)$, de donde según la definición 17, $\Pi(N) - \prod_{Z\in\mathbf{N}} G(Z) \in \mathbf{T}((\mathbf{K})+\{0\})$. Pero el lema 15[b] y el teorema 36[a,d] implican la identidad $\mathbf{T}(\mathbf{K}+\{0\}) = \mathbf{T}(\mathbf{K}) + \mathbf{T}(\{0\}) = \mathbf{T}(\mathbf{K}) + \{0\}$. Se sigue que $\Pi(\mathbf{N}) - \prod_{Z\in\mathbf{N}} G(Z) \in \mathbf{T}(\mathbf{K}) + \{0\}$, de donde y de acuerdo con (1)

$$\Pi(\mathbf{N}) - \prod_{Z\in\mathbf{N}} G(Z) \in \mathbf{K} + \{0\}. \tag{12}$$

Por otra parte, en virtud de (6): $\overline{\Pi} G(\mathbf{N}) \in \overline{\Pi}(\mathbf{U}_\beta(\mathbf{L}+\{0\}) - \{0\})$, luego, según los teoremas 53 y 54[b] $\prod_{Z\in\mathbf{N}} G(Z) = \Pi\overline{G}(\mathbf{N}) \in \mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{L}+\{0\}) = \mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{L}) + \{0\}$. Se obtiene según (2):

$$\prod_{Z\in\mathbf{N}} G(Z) \in \mathbf{L} + \{0\}. \tag{13}$$

Observemos finalmente que las fórmulas (3) y (5) implican la inclusión: $\prod_{Z\in\mathbf{N}} G(Z) \subset \Pi(\mathbf{N})$, que a su vez trae consigo la igualdad:

$$\Pi(\mathbf{N}) = \left(\Pi(\mathbf{N}) - \prod_{Z\in\mathbf{N}} G(Z)\right) + \prod_{Z\in\mathbf{N}} G(Z). \tag{14}$$

Así en las fórmulas (12)-(14) adquirimos una representación del conjunto $\Pi(\mathbf{N})$ en la forma: $\Pi(\mathbf{N}) = X+Y$, donde $X \in \mathbf{K}+\{0\}$ y $Y \in \mathbf{L}+\{0\}$; tal como anteriormente (para el conjunto $\Sigma(\mathbf{N})$) concluímos $\Pi(\mathbf{N}) \in \mathbf{M}+\{0\}$, por tanto $\Pi(\mathbf{N}) \in \mathbf{M}$ o bien $\Pi(\mathbf{N}) \in \{0\}$. Pero el caso de $\prod(\mathbf{N}) \in \{0\}$ puede eliminarse como sigue: si $\mathbf{K} \neq 0$ se tiene como consecuencia del teorema 36[e] $0 \in \mathbf{T}(\mathbf{K})$, luego, según (1) $0 \in K$, $\prod(\mathbf{N}) \in \{0\} \subset \mathbf{K}$, de donde a fortiori $\prod(\mathbf{N}) \in \mathbf{M}$ (siendo $\mathbf{K}$ por hipótesis subclase de $\mathbf{M}$); si por el contrario $\mathbf{K} = 0$, la clase $\mathbf{M}$ coincide con $\mathbf{L}$, luego en virtud de (4) $\mathbf{N} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{L}) - \{0\}$ y, en razón del teorema 53, $\prod(\mathbf{N}) \in \mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{L})$, de donde, finalmente, según (2) $\prod(\mathbf{N}) \in \mathbf{L} = \mathbf{M}$. Así, la fórmula: $\prod(\mathbf{N}) \in \{0\}$ siempre trae consigo: $\prod(\mathbf{N}) \in \mathbf{M}$; en consecuencia,

$$\prod(\mathbf{N}) \in \mathbf{M}. \tag{15}$$

Se ha probado, pues, que la fórmula (4) siempre implica (10) y (15). Se obtienen así las inclusiones: $\overline{\sum}(\mathbf{U}_\beta(\mathbf{M}) - \{0\}) \subset \mathbf{M}$ y $\overline{\prod}(\mathbf{U}_\beta(\mathbf{M}) - \{0\}) \subset \mathbf{M}$, las cuales según la definición 20 y el teorema 53, pueden expresarse mas brevemente:

$$\mathbf{S}_\beta(\mathbf{M}) \subset \mathbf{M} \;\; y \;\; \mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{M}) \subset \mathbf{M}. \tag{16}$$

De acuerdo con la definición 16, las fórmulas (16) dan: $\mathbf{M} \in cl(\mathbf{S}) \cdot cl(\mathbf{S}^*_\beta)$; con ayuda del teorema 21^b se concluye de inmediato que

$$\mathbf{M} \in cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta); \qquad \textit{l.q.q.d.}$$

Traducción: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

El análisis de esta demostración nos conduce a enunciar el teorema siguiente: *Sea* $\mathbf{K} \overset{\star}{+} \mathbf{L} = \mathbf{K} + \mathbf{L} + \underset{X+Y}{\mathrm{E}}[X \in \mathbf{K}\ \ y\ \ Y \in \mathbf{L}]$ *para cualesquier dos clases* $\mathbf{K}$ y $\mathbf{L}$; *se tiene entonces* $\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K} \overset{\star}{+} \mathbf{L}) = \mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}) \overset{\star}{+} \mathbf{S}_\beta(\mathbf{L})$ y $\mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{K} \overset{\star}{+} \mathbf{L}) \subset \mathbf{T}\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}) \overset{\star}{+} \mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{L})$.

Podemos demostrar que la clase $\mathbf{M}$ examinada en el lema 66 es la más pequeña que contiene las clases dadas $\mathbf{K}$ y $\mathbf{L}$, y es cerrada respecto a la operación $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta$ (o en forma equivalente, cerrada para las dos operaciones $\mathbf{S}_\beta$ y $\mathbf{S}^*_\beta$); permite por tanto definirse mediante: $\mathbf{M} = \prod(\boldsymbol{V}(\mathbf{K} + \mathbf{L}) \cdot cl(\mathbf{S}_\beta + \mathbf{S}^*_\beta))$. La existencia de una clase $\mathbf{M}$ que tiene tales propiedades se deduce en el caso general del corolario 30 o bien del teorema 31; sin embargo, en el caso aquíconsiderado a causa de las fuertes hipótesis hechas sobre las clases $\mathbf{K}$ y $\mathbf{L}$, la estructura de la clase $\mathbf{M}$ es particularmente simple.

Teorema 67. *Si* $\bar{\bar{1}} = \aleph_\alpha = \overline{\overline{\mathbf{K}}}$ *(donde* $\mathbf{K} \subset \mathbf{U}(1)$*),* $\beta \leq p(\alpha)$ *y* $\gamma \leq p(\alpha)$*, se tiene*

$$\overline{\overline{\boldsymbol{V}(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_\beta + \mathbf{S}^*_\gamma)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

Demostración. Se sigue del lema 65 que existe una clase $\mathbf{L}$ que verifica las fórmulas:

$$\mathbf{L} \in \boldsymbol{V}(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_{p(\alpha)}) \tag{1}$$

y

$$\overline{\overline{\mathbf{L}}} = \aleph_\alpha. \tag{2}$$

Escribimos para toda clase de conjuntos $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}) = \mathbf{L} + \mathbf{M} + \underset{X+Y}{\mathrm{E}}[X \in \mathbf{L}\ \ y\ \ Y \in \mathbf{M}], \tag{3}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{M}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}. \tag{4}$$

Consideremos dos clases arbitrarias $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ tales que

$$\mathbf{M} \in cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)}) \quad \text{y} \quad \mathbf{N} \in cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)}), \tag{5}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}) = \mathbf{F}(\mathbf{N})\ \ y\ \ \mathbf{G}(\mathbf{M}) = \mathbf{G}(\mathbf{N}). \tag{6}$$

Mostraremos que

$$\mathbf{M} \cdot \underset{X+Y}{\mathrm{E}}[X \in \mathbf{L} \quad \text{y} \quad Y \in \mathbf{N}] \subset \mathbf{N}, \tag{7}$$

En efecto, sea

$$Z \in \mathbf{M} \tag{8}$$

y

$$Z = X + Y, \; donde \; X \in \mathbf{L} \quad \text{y} \quad Y \in \mathbf{N}. \tag{9}$$

En virtud de (9) $X \subset Z$, de donde según (8) y por la definición 17 $X \in \mathbf{T}(\mathbf{M})$. Como en virtud del teorema 21^b y de la definición 16, (5) dará $\mathbf{T}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{M}$, se tendrá $X \in \mathbf{M}$, de donde por (9) $X \in \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}$; teniendo en cuenta (4), (6), se obtiene de ahí $X \in \mathbf{L} \cdot \mathbf{N}$. Como Y pertenece a $\mathbf{N}$ por causa de (9), ocurre $\{X, Y\} \subset \mathbf{N}$; como además $\overline{\overline{\{X, Y\}}} < \aleph_{p(\alpha)}$ y $\{X, Y\} \neq 0$, concluimos que $\{X, Y\} \in \mathbf{U}_{p(\alpha)}(N) - \{0\}$, de donde conforme a la definición 20 (para $\mathbf{K} = \mathbf{N}$), $Z = \sum(\{X; Y\}) \in \overline{\sum}(\mathbf{U}_{p(\alpha)}(\mathbf{N}) - \{0\}) = \mathbf{S}_{p(\alpha)}(\mathbf{N})$. Observemos además que $\mathbf{S}_{p(\alpha)}(\mathbf{N}) \subset \mathbf{N}$ (en consecuencia de (6), del teorema 21^b y de la definición 16). Se llega así a la fórmula:

$$Z \in \mathbf{N}. \tag{10}$$

Se ha probado que las condiciones (8) y (9) implican siempre (10); por consiguiente la inclusión de (7) queda establecida. Observemos sin embargo que en virtud de (6) y (4) la inclusión siguiente se verifica también:

$$\mathbf{M} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{N}) \subset \mathbf{N}. \tag{11}$$

Las fórmulas (7) y (11) dan: $\mathbf{M} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{N} + \underset{X+Y}{E}[X \in \mathbf{L} \quad \text{y} \quad Y \in \mathbf{N}]) \subset \mathbf{N}$; sustituyendo en (3) $\mathbf{M}$ por $\mathbf{N}$, se concluye que $\mathbf{M} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{N}) \subset \mathbf{N}$, de donde según (6) $\mathbf{M} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{N}$. Como además en virtud de (3), $\mathbf{M} \subset \mathbf{F}(\mathbf{M})$, se obtiene finalmente

$$\mathbf{M} \subset \mathbf{N}. \tag{12}$$

La inclusión inversa: $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}$ se deduce de manera completamente análoga; junto con (12), se obtiene pues la igualdad:

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}. \tag{13}$$

Se ha mostrado asíque las fórmulas (5) y (6) implican (13). Este resultado puede evidentemente formularse como sigue: *sea* Y *cualquier clase, si* $\mathbf{M} \in cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)}) \cdot \underset{X}{E}[\mathbf{F}(X) = Y]$, $\mathbf{N} \in cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)}) \cdot \underset{X}{E}[\mathbf{F}(X) = Y]$ y $\mathbf{G}(\mathbf{M}) = \mathbf{G}(\mathbf{N})$, *se tiene* $\mathbf{M} = \mathbf{N}$; en otras palabras, la función $\mathbf{G}$ transforma biunivocamente la familia $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)}) \cdot \underset{X}{E}[\mathbf{F}(X) = Y]$ en su imagen según $\mathbf{G}$, es decir, en la familia $\overline{\mathbf{G}}(cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)}) \cdot \underset{X}{E}[\mathbf{F}(X) = Y])$. Por consiguiente, ambas familias son de la misma potencia:

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)}) \cdot \underset{X}{E}[\mathbf{F}(X) = Y]}} = \overline{\overline{\overline{\mathbf{G}}(cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)}) \cdot \underset{X}{E}[\mathbf{F}(X) = Y])}}. \tag{14}$$

Observemos que en virtud de (4) $\overline{\mathbf{G}}(\mathcal{H}) \subset \mathbf{U}(\mathbf{L})$ para toda familia $\mathcal{H}$ de clases, de donde según (2) y el lema 10^a $\overline{\overline{\overline{\mathbf{G}}(\mathcal{H})}} \leq 2^{\aleph_\alpha}$. Ésta desigualdad se verifica en particular para $\mathcal{H} = cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)}) \cdot \underset{X}{E}[\mathbf{F}(X) = Y]$, lo cual junto con (14), dará:

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)}) \cdot \underset{X}{E}[\mathbf{F}(X) = Y]}} \leq 2^{\aleph_\alpha} \quad para\ toda\ clase\ Y. \tag{15}$$

De conformidad al teorema fundamental. X (para $\beta = p(\alpha)$), se tiene

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}, \tag{16}$$

de donde $2^{\aleph_\alpha} < \overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)})}}$. Poniendo en el lema 11[a]: $f \doteq \mathbf{F}$, $A = cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)})$ y $\mathfrak{b} = 2^{\aleph_\alpha}$ y tomando en cuenta (15), se ve que las hipótesis de este lema se satisfacen.

Por consiguiente, $\overline{\overline{\overline{\mathbf{F}}(cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)}))}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)})}}$, de donde, tomando (16)

$$\overline{\overline{\overline{\mathbf{F}}(cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)}))}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}. \tag{17}$$

Consideremos cualquier clase $\mathbf{M}$ de $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)})$. Por (1) y (3), el lema 66, reemplazando $\mathbf{K}$ por $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}$ por $\mathbf{F}(\mathbf{M})$ y β por $p(\alpha)$, nos dará: $\mathbf{F}(\mathbf{M}) \in cl(\mathbf{S}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_{p(\alpha)})$; resulta además de (1) y (3) y de la definición 5[a] que $\mathbf{K} \subset \mathbf{L} \subset \mathbf{F}(\mathbf{M})$, luego que $\mathbf{F}(\mathbf{M}) \in V(\mathbf{K})$. Pero este razonamiento se aplica a toda clase $\mathbf{M}$ de $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)})$, y entonces se concluye que

$$\overline{\mathbf{F}}(cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)})) \subset V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_{p(\alpha)}). \tag{18}$$

De acuerdo con el teorema 52[b], las desigualdades $\beta \leq p(\alpha)$ y $\gamma \leq p(\alpha)$, dadas por la hipótesis, implican que $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_{p(\alpha)}$ y $\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_{p(\alpha)}$, de donde $\mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}^*_{p(\alpha)}$ (lema 19[c]) y después $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_{p(\alpha)}$ (lema 13). Con ayuda del teorema 21[a] (para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_{p(\alpha)}$) se obtiene de ello: $cl(\mathbf{S}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_{p(\alpha)}) \subset cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma)$, de donde según (18)

$$\overline{\mathbf{F}}(cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{p(\alpha)}) \subset V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma)). \tag{19}$$

Pero las formulas (17) y (19) implican de inmediato

$$\overline{\overline{V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma)}} \geq 2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

Como la desigualdad inversa: $\overline{\overline{V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma)}} \leq 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ resulta de inmediato del teorema fundamental XI[b] (o bien del teorema 32), se tiene finalmente:

$$\overline{\overline{V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}, \qquad \text{l.q.q.d}$$

Se puede mostrar, mediante a un ejemplo bien escogido, que las dos desigualdades $\beta \leq p(\alpha)$ y $\gamma \leq p(\alpha)$, que figuran en la hipótesis del teorema precedente son esenciales; con más razón podemos afirmar que la operación $\mathbf{S}^*_\gamma$ no se deja reemplazar por $\mathbf{S}^*$ ni por $\mathbf{T}$. Pero parece probable aunque no lo he podido demostrar, que es posible reemplazar la operación $\mathbf{S}^*_\gamma$ en el teorema 67 por C logrando así reforzar el teorema fundamental IX.

Traduccion, Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

En cuanto a la operación $\mathbf{R}_\beta$, un resultado análogo puede formularse establecido para esta operación sólo bajo restricciones adicionales, especialmente en la forma del teorema:

A. Si $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha = \overline{\overline{\mathbf{K}}}$ *(donde* $\mathbf{K} \subset \mathbf{U}(1)$*),* $\beta \leq p(\alpha)$ *y* $2^{2^{\aleph_\beta}} \leq \aleph_\alpha$*, se tiene* $\overline{\overline{V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{R}_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

La demostración se apoya sobre el teorema 55^g y dos lemas siguientes, que se prueban como los lemas 65 y 66:

B. *Si* $\overline{\overline{\mathbf{K}}} = \aleph_\alpha$*,* $\beta \leq p(\alpha)$ *y* $2^{2^{\aleph_\beta}} \leq \aleph_\alpha$*, existe una clase* $\mathbf{L}$ *tal que* $\mathbf{L} \in V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{R}_\beta)$ *y* $\overline{\overline{\mathbf{L}}} = \aleph_\alpha$*.*

C. *Si* $\mathbf{K} \in cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)$*,* $\mathbf{L} \in cl(\mathbf{R}_\beta)$ *y* $\mathbf{M} = \mathbf{K} + \mathbf{L} + \underset{X+Y}{E}[X \in \mathbf{K}$ *y* $Y \in \mathbf{L}]$*, se tiene* $\mathbf{M} \in cl(\mathbf{R}_\beta)$*.*

Observemos que la fórmula $\beta \leq p(\alpha)$, respectivamente $\gamma \leq p(\alpha)$, se satisface en todo caso para $\beta = 0$ respectivamente $\gamma = 0$; esta observación permite deducir algunos corolarios del teorema fundamental X y el teorema 67 que no formularé explicitamente aquí. El caso más interesante es aquel en que β respectivamente $\max(\beta, \gamma)$ es un número de primera especie y $\aleph = \mathfrak{a}^{\aleph_{\beta-1}}$, respectivamente $= \mathfrak{a}^{\aleph_{\max(\beta,\gamma)-1}}$; a causa del lema 4^e, las desigualdades aludidas son verdaderas también en este caso. En particular por este camino se obtiene el siguiente:

Corolario 68.

^{a}) *Si* 1 *es el conjunto de todos los números reales (o más generalmente un conjunto de potencia* $2^{\aleph_0}$*), se tiene* $\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_1)}} = 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$*;*

^{b}) *Si además,* $\mathbf{K}$ *es la clase de todos los intervalos de números reales (o más generalmente una clase cualquiera de la potencia* $2^{\aleph_0}$ *de subconjuntos de* 1*) ocurre* $\overline{\overline{V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1^*)}} = 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$*.*

Demostración. Cuando $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$, el lema 4^c señala: $0 < p(\alpha)$ de donde $1 \leq p(\alpha)$. Si se escribe por consiguiente, en los teoremas X y 67: $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$ y $\beta = 1$, respectivamente $\beta = \gamma = 1$, las hipótesis de estos teoremas se cumplen y se obtienen las fórmulas buscadas.

Este corolario presenta la solución de los problemas que me plantearon los Srs. Poprougénko y Sierpiński.[1]) Como es fácil ver, la familia $V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_1 \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_1^*)$, que se consideró en el corolario 68^b, coincide con la de todas las *clases de conjuntos inductivos* en el sentido de Lusin;[2] la clase más pequeña $\mathbf{L}$ de ésta familia, $\mathbf{L} = \overset{\circ}{\prod}(V(\mathbf{K})) \cdot cl(\mathbf{S}_1 \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_1^*)$, es notoriamente la de todos conjuntos borelianos [2]).

Se debe notar, respecto de lo dicho sobre el teorema 67, que aún en el caso particular de este teorema, en el corolario 68^b, la operación $\mathbf{S}_1^*$ no se puede reemplazar por $\mathbf{S}^*$, ni por $\mathbf{T}$, ni por $\mathbf{R}_1$ (pues la familia $V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_1 \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*) = V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_1 \overset{\circ}{+} \mathbf{T}) = V(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{R}_1)$, donde $\mathbf{K}$ es la clase de todos los intervalos, sólo contiene un elemento, a saber, la clase de todos los conjuntos de números reales). Pero ignoramos si no se puede reemplazar $\mathbf{S}_1^*$ por C, esto es, *si las clases de conjuntos de números reales, conteniendo todos los intervalos todas las sumas de las infinidades numerables y todos los complementos de sus elementos, forman una familia de potencia* $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$.

[1]Veáse W. Sierpiński, *Sobre las familias inductivas y projectivas de conjuntos*, Fund. Math. XIII, pág. 228.
[2]Veáse pág. 73.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Ahora bien podemos reforzar el corolario 68^b reemplazando ahí las operaciones $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_1^*$ por operaciones cualesquiera de una extensa clase que el Sr. Hausdorff denominara $\delta_s - funciones$ (respectivamente $\sigma d - funciones$), así por ejemplo la operación A del Sr. Souslin y su operación doble[3] A^* . Mediante una extensión adecuada de este concepto de Hausdorff se alcanza hasta una generalización del teorema 67.[4]

Los resultados hasta aquí obtenidos no nos proporcionan medio alguno de evaluar la potencia de las familias $cl(C \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)$, $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)$, $cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma^*)$ etc., en el caso en que el número β (respectivamente los dos números β y γ) es $> p(\alpha)$ el símbolo $\aleph_\alpha$ designa la potencia del conjunto universal 1. Este caso ofrece dificultades absolutamente esenciales. A decir verdad, aquíno podríamos llegar a conclusiones definitivas mas que en el caso donde los números considerados β y γ sobrepasan no solo $p(\alpha)$, sino también α; en efecto, por el teorema 52^d, las familias aludidas coinciden entonces con las examinadas en los teoremas fundamentales V - VII del sección anterior, de manera que cada una de estas familias es de la potencia $2^{\aleph_\alpha}$. En lo que sigue mostraremos que el mismo resultado se deja demostrar también bajo hipótesis más generales $\beta > p(\alpha)$, respectivamente $\gamma > p(\alpha)$, bajo la condición de que se admita como base de los razonamientos la hipótesis H, es decir, el teorema de Cantor sobre los alephs, que se vio en la sección 1 (pag. 11). Para ello determinamos primero ciertas cotas para las potencias de las familias examinadas sin utilizar por el momento la hipótesis H.

Teorema 69. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, $\beta > cf(\alpha)$ *y* $\gamma > cf(\alpha)$, *se tiene*

$$2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma^*)}} \leq 2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

Demostración. En virtud del teorema 51^b y del lema $19^{b,c}$ se tiene: $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}$ y $\mathbf{S}_\gamma^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}$, de donde $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}$; aplicando el teorema 49 (para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma^*$) se obtiene de ello:

$$2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma^*)}}. \tag{1}$$

El lema 2^b (para $A = 1$) implica la existencia de una sucesión de conjuntos A_ξ del tipo $\omega_{cf(\alpha)}$ que verifican las fórmulas:

$$1 = \sum_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} A_\xi, \tag{2}$$

$$A_\xi \subset A_\eta \ \ cuando \ \ \xi \leq \eta < \omega_{cf(\alpha)}, \tag{3}$$

$$\overline{\overline{A_\xi}} < \aleph_\alpha \ \ para \ \ \xi < \omega_{cf(\alpha)}. \tag{4}$$

Si $\mathbf{M}$ es una clase de conjuntos escribimos:

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}) = \underset{A_\xi \cdot X}{\mathrm{E}}[\xi < \omega_{cf(\alpha)} \ \ y \ \ X \in \mathbf{M}]. \tag{5}$$

[3]F. Hausdorff, Mengenlehre, ll Aufl., Berlín y Leipzig 1927, págs. 89-93.

[4]La extensión de los resultados obtenidos en este trabajo a las operaciones de Hausdorff será objeto de una nota especial (que saldrá en esta revista).

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

$$\mathbf{G}(\mathbf{M}) = \mathbf{M} \cdot \sum_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} \mathbf{U}(A_\xi). \tag{6}$$

Sean $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ dos clases sujetas a las condiciones:

$$\mathbf{M} \in cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) \ \ y \ \ \mathbf{N} \in cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma), \tag{7}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}) = \mathbf{F}(\mathbf{N}) \ \ y \ \ \mathbf{G}(\mathbf{M}) = \mathbf{G}(\mathbf{N}); \tag{8}$$

mostraremos que estas clases coinciden.
Para ello consideremos un conjunto arbitrario X tal que

$$X \in \mathbf{M}. \tag{9}$$

Se concluye fácilmente de (6), (8) y (9) que
la fórmula:

$$X \in \sum_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} \mathbf{U}(A_\xi) \ \ implica: \ \ X \in \mathbf{N}. \tag{10}$$

Ahora bien, admitiremos en los sucesivo que

$$X \in \sum_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} \mathbf{U}(A_\xi). \tag{11}$$

Evidentemente se tiene, por (2):

$$X = \sum_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} A_\xi \cdot X. \tag{12}$$

Sea ξ un número ordinal que verifica:

$$\xi < \omega_{cf(\alpha)}. \tag{13}$$

Existe sin duda un número ξ_1 tal que

$$\xi \leq \xi_1 < \omega_{cf(\alpha)} \ \ \text{y} \ \ A_{\xi_1} \cdot X - \sum_{\eta < \xi_1} A_\eta \cdot X \neq 0, \tag{14}$$

puesto que de lo contrario las fórmulas (3), (12) y (13) darían:
$X = A_\xi \cdot X \in \sum_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} \mathbf{U}(A_\xi)$, contradiciendo (11).

En virtud de (5), (9) y (13) se tiene $A_{\xi_1} \cdot X \in \mathbf{F}(\mathbf{M})$, de donde de acuerdo con (8) $A_{\xi_1} \cdot X \in \mathbf{F}(\mathbf{N})$. Aplicando otra vez la fórmula (5) (para $\mathbf{M} = \mathbf{N}$), se concluye que existe un número ξ_2 y un conjunto Y que satisface las condiciones:

$$\xi_2 < \omega_{cf(\alpha)} \ \ y \ \ A_{\xi_1} \cdot X = A_{\xi_2} \cdot Y, \tag{15}$$

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

$$Y \in \mathbf{N}. \tag{16}$$

Resulta inmediatemente a partir de (15) que

$$A_{\xi_1} \cdot X = A_{\xi_1} \cdot A_{\xi_2} \cdot X = A_{\xi_1} \cdot A_{\xi_2} \cdot Y. \tag{17}$$

Si se tuvieran $\xi_2 < \xi_1 < \omega_{cf(\alpha)}$, se obtendría de (3): $A_{\xi_2} \subset A_{\xi_1}$, de donde en virtud de (17), $A_{\xi_1} \cdot X = A_{\xi_2} \cdot X$, $A_{\xi_1} \cdot X - A_{\xi_2} \cdot X = 0$, lo que evidentemente contradice (14). Por consiguiente, tenemos en razón de (14) y (15), $\xi_1 \leq \xi_2 < \omega_{cf(\alpha)}$, de donde según (3) $A_{\xi_1} \subset A_{\xi_2}$; ésta inclusión junto con (17) proporciona: $A_{\xi_1} \cdot X = A_{\xi_1} \cdot Y$. Se obtiene segundamente $A_{\xi} \cdot A_{\xi_1} \cdot X = A_{\xi} \cdot A_{\xi_1} \cdot Y$; como además según (3) y (14), $A_{\xi} \subset A_{\xi_1}$, se tiene por fin

$$A_{\xi} \cdot X = A_{\xi} \cdot Y. \tag{18}$$

Así queda demostrado que para todo número ξ que verifica la desigualdad (13) existe un conjunto Y que cumple con las condiciones de las fórmulas (16) y (18). Con ayuda del axioma de elección se puede por lo tanto hacer corresponder univocamente a todo $\xi < \omega_{cf(\alpha)}$ un conjunto $\mathbf{Y}$ sujeto a dichas condiciones; en otras palabras, existe una sucesión de conjuntos, B_{ξ} (de tipo $\omega_{cf(\alpha)}$) verificando las fórmulas:

$$A_{\xi} \cdot X = A \cdot B_{\xi} \;\; para \;\; \xi < \omega_{cf(\alpha)} \tag{19}$$

y

$$B_{\xi} \in \mathbf{N}, \;\; cuando \;\; \xi < \omega_{cf(\alpha)} \tag{20}$$

Toda suscesión de conjuntos crecientes es, como se sabe, una sucesión convergente en el sentido de la definición 7^c, y su límite es igual al conjunto-suma de todos sus términos. Esto atañe en partícular, a las sucesiones A_{ξ} y $A_{\xi} \cdot B_{\xi}$ del tipo $\omega_{cf(\alpha)}$, que en virtud de (3) y (19) son sucesiones de conjuntos crecientes. Según (1), (12) y (19) se tiene pues

$$\lim_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} A_{\xi} = 1, \qquad \lim(A_{\xi} \cdot B_{\xi}) = X. \tag{21}$$

Poniendo en el lema 12^b $F_{\xi} = B_{\xi}$ y $G_{\xi} = A_{\xi}$ (y reemplazando α por $\omega_{cf(\alpha)}$), se concluye de (21) que la sucesión de conjuntos $B_{\xi} \cdot \lim\limits_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} A_{\xi}$ es también convergente y que se tiene $\lim\limits_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} (B_{\xi} \cdot \lim\limits_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} A_{\xi}) = \lim\limits_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} (A \cdot B_{\xi})$, de donde $\lim\limits_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} B_{\xi} = X$. De conformidad con la definición $17^{b,c}$, se sigue en particular que

$$X = \overline{\lim}_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} B_{\xi},$$

luego que

$$X = \prod_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} \sum_{\xi \leq \eta < \omega_{cf(\alpha)}} B_{\eta}. \tag{22}$$

Traduccion Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

En virtud de (20) se tiene $\underset{B_\eta}{\mathrm{E}}[\xi \le \eta < \omega_{cf(\alpha)}] \subset \mathbf{N}$; a causa de la desigualdad: $\beta > cf(\alpha)$, dada por hipótesis, se obtiene además sin dificultad: $\overline{\overline{\mathrm{E}_{B_\eta}[\xi \le \eta < \omega_{cf(\alpha)}]}} \le \aleph_{cf(\alpha)} < \aleph_\beta$. Con ayuda de la definición 2^b se concluye que la clase $\underset{B_\eta}{\mathrm{E}}[\xi \le \eta < \omega_{cf(\alpha)}]$ pertenece a la familia $\mathbf{U}_\beta(\mathbf{N})$ y además a la familia $\mathbf{U}_\beta(\mathbf{N}) - \{0\}$ en el caso donde $\xi < \omega_{cf(\alpha)}$. Por consiguiente, $\sum_{\xi \le \eta < \omega_{cf(\alpha)}} B_\eta = \sum(\underset{B_\eta}{\mathrm{E}}[\xi \le \eta < \omega_{cf(\alpha)}]) \in \overline{\sum}(\mathbf{U}_\beta(\mathbf{N}) - \{0\})$, y en razón de la definición 20:

$$\sum_{\xi \le \eta < \omega_{cf(\alpha)}} B_\eta \in \mathbf{S}_\beta(\mathbf{N}) \ \ para \ \ \xi < \omega_{cf(\alpha)}. \tag{23}$$

Pero, en virtud de (7) y del teorema 21^b se tiene $\mathbf{N} \in cl(\mathbf{S}_\beta)$, de donde, según la definición 16 $\mathbf{S}_\beta(\mathbf{N}) \subset \mathbf{N}$; asociamos esta inclusión con (23), se deduce:

$$\sum_{\xi \le \eta < \omega_{cf(\alpha)}} B_\eta \in \mathbf{N} \, para \, \xi < \omega_{cf(\alpha)}. \tag{24}$$

Por un razonamiento análogo (con la diferencia de que en lugar de la ecuación (20) y de la definición 20 se recurre a la fórmula (24) y el teorema (53)) se llega a la fórmula: $\overset{\circ}{\prod}_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} \sum_{\xi \le \eta < \omega_{cf(\alpha)}} B_\eta \in \mathbf{N}$, la cual dará según (22):

$$X \in \mathbf{N}. \tag{26}$$

La fórmula (26) queda establecida con la hipótesis (11). Pero según (10), esta fórmula se presenta también bajo la hipótesis contraria; en consecuencia queda satisfecha en general. Queda probado que la fórmula (9) trae consigo (26), para cualquier conjunto X; este hecho, puede expresarse brevemente con la inclusión: $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$. Como la inclusión inversa se establece de manera completamente análoga, se tiene por fin

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}. \tag{27}$$

Asíhemos demostrado que si ambas $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ se cumplen las fórmulas (7) y (8) igualmente verifican la identidad (27). Este resultado puede evidentemente resumirse en la proposición siguiente: *Siendo Y una clase cualquiera, si* $\mathbf{M} \in cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) \cdot E_X[\mathbf{F}(X) = Y]$, $\mathbf{N} \in cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) \cdot E_X[\mathbf{F}(X) = Y]$, y $\mathbf{G}(\mathbf{M}) = \mathbf{G}(\mathbf{N})$, se tiene $\mathbf{M} = \mathbf{N}$.

Por consiguiente, la función $\mathbf{G}$ transforma biunívocamente la familia $cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) \cdot E[F(X) = Y]$ en su imagen $\overline{\mathbf{G}}(cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) \cdot \underset{X}{E}[\mathbf{F}(X) = Y])$, de tal suerte que

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) \overset{\circ}{+} E_X[\mathbf{F}(X) = Y]}} = \overline{\overline{\overline{\mathbf{G}}(cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) \cdot \underset{X}{E}[\mathbf{F}(X) = Y])}} \tag{28}$$

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Observemos que en virtud de (6) se tiene $\mathbf{G}(\mathbf{M}) \subset \sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \mathbf{U}(A_\xi)$ para toda clase $\mathbf{M}$, por tanto $\overline{\mathbf{G}}(\mathcal{H}) \subset \mathbf{U}\left(\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \mathbf{U}(A_\xi)\right)$ para toda familia de clases $\mathcal{H}$ y en particular,

$$\overline{\mathbf{G}}(cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) \cdot \underset{X}{E}[\mathbf{F}(X) = Y]) \subset \mathbf{U}\left(\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \mathbf{U}(A_\xi)\right). \tag{29}$$

Ahora bien, el lema 10^a da: $\overline{\overline{\mathbf{U}(A_\xi)}} \leq 2^{\overline{\overline{A_\xi}}}$, de donde, en virtud de (4) y de la definición 4, $\overline{\overline{\mathbf{U}(A_\xi)}} \leq 2^{\aleph_\alpha}_{\smile}$ para todo $\xi < \omega_{cf(\alpha)}$ y, por tanto $\overline{\overline{\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \mathbf{U}(A_\xi)}} \leq \sum_{\xi<\omega_{cf(\aleph_\alpha)}} \overline{\overline{\mathbf{U}(A_\xi)}} \leq 2^{\aleph_\alpha}_{\smile} \cdot \aleph_{cf(\alpha)}$. Como además según los lemas 5^d y 1^a, $2^{\aleph_\alpha}_{\smile} \geq \aleph_\alpha \geq \aleph_{cf(\alpha)}$, luego entonces $2^{\aleph_\alpha}_{\smile} \cdot \aleph_{cf(\alpha)} = 2^{\aleph_\alpha}_{\smile}$ se tendrá $\overline{\overline{\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \mathbf{U}(A_\xi)}} \leq 2^{\aleph_\alpha}_{\smile}$. Aplicando otra vez el lema 10^a, obtenemos:

$$\overline{\overline{\mathbf{U}\left(\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \mathbf{U}(A_\xi)\right)}} \leq 2^{2^{\aleph_\alpha}_{\smile}}. \tag{30}$$

Fácilmente se deduce de (28)-(30) la desigualdad:

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) \cdot \underset{X}{E}[\mathbf{F}(X) = Y]}} \leq 2^{2^{\aleph_\alpha}_{\smile}}. \tag{31}$$

Escribiendo en el lema 11^b: $f \overset{\circ}{=} \mathbf{F}$ y $A = cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma)$, de (31) se concluye que

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma)}} \leq \overline{\overline{\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma)}} \cdot 2^{2^{\aleph_\alpha}_{\smile}}. \tag{32}$$

Por otra parte de (5) resulta que $\mathbf{F}(\mathbf{M}) \subset \sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \mathbf{U}(A_\xi)$ para toda clase $\mathbf{M}$, por tanto que $\overline{\mathbf{F}}(\mathcal{H}) \subset \mathbf{U}\left(\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \mathbf{U}(A_\xi)\right)$, para toda familia $\mathcal{H}$, por tanto que,

$$\overline{\mathbf{F}}(cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma)) \subset \mathbf{U}\left(\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \mathbf{U}(A_\xi)\right). \tag{33}$$

Las fórmulas (30) y (33) de inmediato traen consigo: $\overline{\overline{\overline{\mathbf{F}}(cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma))}} \leq 2^{2^{\aleph_\alpha}_{\smile}}$, de donde según (32) $\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma)}} \leq 2^{2^{\aleph_\alpha}_{\smile}} \cdot 2^{2^{\aleph_\alpha}_{\smile}} = 2^{2^{\aleph_\alpha \cdot 2}_{\smile}}$. Pero $2^{\aleph_\alpha}_{\smile}$ es un número transfinito (por el lema 5^d), así $2^{\aleph_\alpha}_{\smile} \cdot 2 = 2^{\aleph_\alpha}_{\smile}$ y entonces,

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma)}} \leq 2^{\underset{\smile}{2^{\aleph_\alpha}}}. \tag{34}$$

Juntando (1) y (34) se obtiene finalmente la fórmula buscada:

$$2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} \leq 2^{\underset{\smile}{2^{\aleph_\alpha}}}.$$

Teorema 70. *Si* $1 = \aleph_\alpha$ *y* $\beta > cf(\alpha)$, *se tiene*

[a]) $2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)}} \leq 2^{\underset{\smile}{2^{\aleph_\alpha}}}$;

[b]) $2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} \leq 2^{\underset{\smile}{2^{\aleph_\alpha}}}$;

[c]) $2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} \leq 2^{\underset{\smile}{2^{\aleph_\alpha}}}$;

Demostración. Por el teorema 51^b y el lema 19^c se tiene:

$\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \subset \mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}$ y $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{\subseteq} \mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{\subseteq} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \subset \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*$, de donde en virtud del teorema 21^a:

(1)
$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}) \subset cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)$$

y

(2)
$$cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*) \subset cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta) \subset cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta) \subset cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta).$$

A causa del teorema 50^a se puede aplicar el teorema 28^b, poniendo ahí: $\mathbf{F} \doteq \mathbf{S}_\beta$; se deduce:

$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)$, por tanto usando el teorema 21^b (para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{C}$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta$):

$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta) = cl(\mathbf{C}) \cdot cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)$. En consecuencia,

(3)
$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta) \subset cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta).$$

Con ayuda de los teoremas fundamentales V y VII se deduce con facilidad de (1) y (2) las desigualdades siguientes:

(4)
$$2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)}} \;\text{ y }\; 2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}}.$$

Asímismo en razón del teorema 69 (para $\gamma = \beta$), Las inclusiones (2) y (3) proporcionan:

Traducción: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

(5)

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)}} \leq 2^{\underset{\smile}{2^{\aleph_\alpha}}} \quad \text{y} \quad \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)}} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} \leq 2^{\underset{\smile}{2^{\aleph_\alpha}}}.$$

Resulta del lema $19^{d,b}$ que $[\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta]^* \overset{\circ}{=} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta$ y que $[\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta]^* \overset{\circ}{=} \mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta$; aplicando entonces dos veces el teorema 33, se llega a:

(6)

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)}} \overset{\circ}{=} \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} \quad \text{y} \quad \overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} \overset{\circ}{=} \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)}}$$

De (4)-(6) se obtienen inmediatamente todas las fórmulas buscadas.

Teorema 71. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *y* $\beta > cf(\alpha)$, *se tiene*

^{a}) $2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{R}_\beta)}} \leq 2^{\underset{\smile}{2^{\aleph_\alpha}}}$;

^{b}) $2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(C \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} \leq 2^{\underset{\smile}{2^{\aleph_\alpha}}}$;

^{c}) $2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} \leq 2^{\underset{\smile}{2^{\aleph_\alpha}}}$;

^{d}) $2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} \leq 2^{\underset{\smile}{2^{\aleph_\alpha}}}$.

Demostración. La demostración es, a grandes razgos, análoga a la del teorema anterior. Con ayuda de los teoremas 55^d, 51^b, $42^{a,b}$ y de los lemas de §2 se establece sin dificultad las inclusiones: $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{ST}$ y $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{SS}^*$; por la aplicación del teorema 21^a se obtiene:

$$cl(\mathbf{ST}) \subset cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta) \subset cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta) \subset cl(\mathbf{R}_\beta) \subset cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta) \tag{1}$$

y

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{SS}^*) \subset cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta) \subset cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta). \tag{2}$$

Por los teoremas 24^d, $42^{a,b}$, 36^b, y el lema 19^1, se tiene $cl(\mathbf{ST}) = cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{T})$ y $cl(\mathbf{SS}^*) = cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)$; en virtud del corolario 22 y del teorema 28^b esta última fórmula implica: $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{SS}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})$. Con ayuda del teorema V y VII concluimos que

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{ST})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{SS}^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}. \tag{3}$$

Por el teorema 69 tenemos además:

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} \leq 2^{\underset{\smile}{2^{\aleph_\alpha}}}. \tag{4}$$

Traduccion Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

De las fórmulas (1) a (4) se deduce inmediatemente :

$$2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{R}_\beta)}} \leq 2^{2^{\underset{\smile}{\aleph_\alpha}}} \tag{5}$$

y

$$2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} \leq 2^{2^{\underset{\smile}{\aleph_\alpha}}}. \tag{6}$$

Tomando en cuenta el teorema 55^a y aplicando el teorema 33 y el lema 19^d, se llega a las igualdades:

$$\begin{aligned} &\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} \quad \text{y} \\ &\overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta)}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Las fórmulas (5), (6) y (7) en conjunto, permiten obtener las fórmulas buscadas.

En los teoremas IX a XI y 69-71 hemos examinado la familia $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)$ y las otras familias análogas en los dos casos siguientes: $\beta \leq p(\alpha)$ y $\beta > cf(\alpha)$ (siendo $\aleph_\alpha$ la potencia del conjunto 1). Por el contrario estos resultados no comprenden el caso donde $p(\alpha) < \beta \leq cf(\alpha)$; en este último caso no sabemos evaluar las potencias de las familias consideradas ni aún, establecer para ellas, delimitaciones interesantes (sin contar delimitaciones bastante simples que resultan del teorema 49: $2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)}} \leq 2^{2^{\aleph_\alpha}}$). En particular no se ha deducido si se pueden generalizar los teoremas 69 - 71, reemplazando en donde aparezca $cf(\alpha)$ por $p(\alpha)$, si bien este problema parece tener bastante posibilidades. Esta laguna en los resultados obtenidos hasta el presente no se puede llenar, salvo que se recurra a la hipótesis H, dado que (como ya lo mostramos por el lema 9^b) esta hipótesis excluye el caso donde $p(\alpha) < \beta \leq cf(\alpha)$.

Teorema Fundamental XII. *La hipótesis H trae consigo las siguientes consecuencias: Si $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ y $\beta > p(\alpha)$, se tiene,*

a) $\overline{\overline{cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)}} = 2^{\aleph_\alpha}$;

b) $\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)}} = 2^{\aleph_\alpha}$;

c) $\overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)}} = 2^{\aleph_\alpha}$;

d) si además $\gamma > p(\alpha)$, entonces $\overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Demostración. Es suficiente recordar que como consecuencia de la hipótesis H se tienen las fórmulas $cf(\alpha) = p(\alpha)$ y $2^{\underset{\smile}{\aleph_\alpha}} = \aleph_\alpha$ (lema $9^{a,b}$), y seguidamente aplicar los teoremas 69 y 70.

Análogamente, del teorema 71 se deduce el siguiente:

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Teorema 72. *La hipótesis* H *trae consigo la siguiente consecuencia: Si* $\bar{\bar{1}} = \aleph_\alpha$ *y* $\beta > p(\alpha)$*, se tiene* $\overline{\overline{cl(\mathbf{R}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{C} \mathring{+} \mathbf{R}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T} \mathring{+} \mathbf{R}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{T}^* \mathring{+} \mathbf{R}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S} \mathring{+} \mathbf{R}_\beta)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \mathring{+} \mathbf{R}_\beta)}} = 2^{\aleph_\alpha}$

Es interesante examinar las dificultades que enfrentarán los intentos por evitar la hipóteis H en las demostraciones de los teoremas XII y 72.

Supongamos que, en efecto, lográsemos demostrar una de esas fórmulas sin esta hipótesis, por ejemplo, el teorema XII^b. Obtenemos entonces como caso particular (para $\alpha = \omega$ y $\beta = 1$) la proposición siguiente:

A. *Si* $\bar{\bar{1}} = \aleph_\omega$, se tiene $\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \mathring{+} \mathbf{S}_1)}} = 2^{\aleph_\omega}$.

Admitiremos ahora que la hipótesis ordinaria del continuo: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ *es verdadera. En virtud del teorema del Sr. Bernstein* [1] *tendremos entonces para todo número ordinal* α *tal que* $0 < \alpha < \omega$*, las igualdades:* $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha \cdot 2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha \cdot \aleph_1 = \aleph_\alpha$*; por tanto, según el lema* 4^c, $p(\alpha) \leq 1$. *Para* $\beta = 1$ *en el teorema X, se obtiene por consecuencia*:

B. *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ *y* $\bar{\bar{1}} = \aleph_\alpha$*, donde* $0 < \alpha < \omega$*, se tiene* $\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \mathring{+} \mathbf{S}_1)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

La proposición B se generaliza fácilmente como sigue:[1]

C. *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ *y* $\overline{\overline{A}} = \aleph_\alpha$ *donde* $0 < \alpha < \omega$*, se tiene* $\overline{\overline{\mathbf{UU}(A) \cdot cl(\mathbf{T} \mathring{+} \mathbf{S}_1)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ Tomando como 1 un conjunto arbitrario de potencia $\aleph_\omega$ y un subconjunto A de potencia $\aleph_\alpha$ donde $\alpha < \omega$, de A y C se deduce D:

D. *Si* $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_1$ *y* $\alpha < \omega$*, se tiene* $2^{2^{\aleph_\alpha}} \leq 2^{\aleph_\omega}$ *y* $2^{\aleph_\alpha} < 2^{\aleph_\omega}$.

Ahora, todos los intentos para establecer con ayuda de la hipótesis ordinaria del continuo las desigualdades semejantes a las que constituyen la tesis de la proposición D se han saldado hasta hoy con absoluto fracaso.

Tendremos que considerar entonces que es poco probable que la proposición A y, por consiguiente el teorema XII^b sea demostrables sin la hipótesis generalizada del continuo.

En mis notas anteriores[2] señalé que ciertos resultados obtenidos con ayuda de la hipótesis H se pueden establecer sin ella, pero con la condición de restringir el dominio de los números cardinales considerados, a un sistema por muy vasto de números $\aleph_{\pi(\alpha)}$ definidos por recursión como a continuación:

$$\aleph_{\pi(0)} = \aleph_0; \quad \aleph_{\pi(\alpha)} = 2^{\aleph_{\pi(\alpha-1)}} \quad \textit{para } \alpha \textit{ de primera especie}$$

[1] Untersuchungen aus der Mengenlehte (Inaugural-Dissertation), Halle a. S. 1901, pág. 49 (Math. Ann. 61).

[1] En el fondo, esta "generalización", es ilusoria, pues la proposición C no constituye más que otra formulación de la proposición B. En efecto tuve oportunidad de mencionar en este trabajo (págs. 2, 26) que el símbolo 1 desempeña el papel de un signo variable que denota el conjunto de todos los individuos considerados en un teorema dado. Sale sobrando, tal vez, aclarar que la "generalización" que se aplicó para la proposición B, sirve para "generalizar" todos los teoremas sobre las familias de la forma $cl(\mathbf{F})$, donde $\mathbf{F}$ es una operación *intrínseca* cualquiera.

[2] *Quelques théorÃlmes en sous-ensembles presque disjoints*, Fund. Math. XII, pág. 204, y Fund. Math. XIV, pág. 213.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

$$\aleph_{\pi(\alpha)} = \sum_{\xi<\alpha} \aleph_{\pi(\xi)} \;\; para\ \alpha\ de\ segunda\ especie\ \ \alpha \neq 0.$$

Ahora bien, la situación es todavía la misma en lo tocante a los teoremas XII y 72: todas las fórmulas de estos teoremas pueden establecerse sin la hipótesis H a condición de que α sea de la forma $\alpha = \pi(\alpha_1)$, donde α_1, es un número de segunda especie. En efecto, se puede mostrar entonces que $p(\alpha) = cf(\alpha) = cf(\alpha_1)$ y que[1] $2^{\overset{\aleph_\alpha}{\smile}} = \aleph_\alpha$; pero, son las únicas consecuencias de la hipótesis H que intervienen en la demostración del teorema XII.

Observemos también que como lo mostramos en el corolario 63, todas las familias de la forma $cl(\mathbf{F})$ donde $\mathbf{F}$ es una operación sujeta a la inclusión: $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{TS}_\beta$, luego, en particular una operación semiaditiva del grado β e intrinseca, tienen la misma potencia, a saber $2^{2^{\aleph_\alpha}}$, en la hipótesis de que $\beta \leq p(\alpha)$ (siendo $\aleph_\alpha$ la potencia de 1). Por el contrario, en el caso de $\beta > p(\alpha)$ las familias del tipo considerado no tienen potencias iguales. En efecto, se pueden indicar como ejemplo de operaciones $\mathbf{F}$ semiaditivas del grado β e intrínsecas las operaciones $\mathbf{T}$, $\mathbf{S}_\beta$ y $\mathbf{S}^*_\beta$ por un lado y las operaciones $\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta$, $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta$, $\mathbf{R}_\beta$, y $\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{R}_\beta$, por otro lado; pero en el primer caso tendremos $\overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ (teoremas II, VIII) y en el segundo $\overline{\overline{cl(\mathbf{F})}} = 2^{\aleph_\alpha}$ (teoremas XII, 72).

Para terminar, cabe decir algo sobre ciertas operaciones que vienen a ligarse en las que examinamos en este párrafo. Antes que nada hay que mencionar una generalización de la definición 20. Introduzcamos la operación $\mathbf{S}_{(\mathfrak{b})}$ definida por la fórmula:[2] $\mathbf{S}_{(\mathfrak{b})}(\mathbf{K}) = \underset{\sum(X)}{E}[X \subset \mathbf{K} \ \ y \ \ 0 < \overline{\overline{X}} < \mathfrak{b}]$ Si $\mathfrak{b}$ es un número trasnfinito, a saber $\mathfrak{b} = \aleph_\beta$, la operación $\mathbf{S}_{(\mathfrak{b})}$ coincide con $\mathbf{S}_\beta$ por el contrario, en el caso de $\mathfrak{b}$ finito, estamos en presencia de una nueva operación. Sin embargo, esta generalización no tiene valor desde el punto de vista de estas consideraciones: ya que para $\mathfrak{b} \leq 2$ la operación $\mathbf{S}_{(\mathfrak{b})}$ es banal ($\mathbf{S}_{(0)}(\mathbf{K}) = \mathbf{S}_{(1)}(\mathbf{K}) = 0$ para toda clase $\mathbf{K}$, $\mathbf{S}_{(2)} \overset{\circ}{=} \mathbf{I}$); si por el contrario, $2 < \mathfrak{b} < \aleph_0$, se comprueba facilmente que $cl(\mathbf{S}_{(\mathfrak{b})}) = cl(\mathbf{S}_0)$.

Después es la operación $\mathbf{B}_{\beta,\gamma}$ definida por la fórmula $\mathbf{B}_{\beta,\gamma}(\mathbf{K}) = \prod(\boldsymbol{V}(\mathbf{K}) \cdot cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma))$, la que merece se le preste atención. La clase $\mathbf{B}_{\beta,\gamma}(\mathbf{K})$ es pues la clase más pequeña que contiene a la clase $\mathbf{K}$ y es cerrada respecto a las operaciones $\mathbf{S}_\beta$ y $\mathbf{S}^*_\gamma$ (veáse págs. 76, 79); se le podría llamar *clase de los conjuntos borelianos formados de la clase* $\mathbf{K}$, *que es aditiva de grado β y multiplicativa al grado γ.* La operación $\mathbf{B}_{\beta,\gamma}$ ha sido estudiada hasta el presente sobre todo en el caso $\beta = \gamma = 1$, donde coincide con la operación boreliana habitual y además, en el caso[3] $\beta = \gamma = 0$ y $\beta = 2,\ \gamma = 1$. Desde el punto de vista de estas investigaciones esta operación no tiene aún gran importancia, a causa de la fórmula fácil del obtener $cl(\mathbf{B}_{\beta,\gamma}) = cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma)$.

§7. Operación D. Clases sustractivas de conjuntos

La operación $\mathbf{D}$ consiste en agregar a la clase de conjuntos dada $\mathbf{K}$, todas las diferencias de los

[1] La primera de estas fórmulas resultan del teorema II, enunciado en la nota del Fundation Math. VII, pág. 9; la segunda es consecuencia de la definición de los números $\aleph_{\pi(\alpha)}$.

[2] Veáse el artículo de Koźniewski y Lindenbaum, pág. 59 nota 1).

[3] Véase pág. 62 notas 1), 2).

Traducción: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

conjuntos que pertenecen a esta clase; las clases de conjuntos que son cerradas respecto de esta operación se llaman *clases sustractivas.*

Definición 22. $\mathbf{D}(\mathbf{K}) = \mathbf{K} + \underset{X-Y}{E}[X \in \mathbf{K} \;\; y \;\; Y \in \mathbf{K}]$.

De entre las númerosas propiedades elementales de la operación $\mathbf{D}$ sólo citaré las que utilizo más adelante.

Teorema 73.

[a]) $\mathbf{D} \in \mathfrak{U}_0$ *donde* $\mathbf{D} \in \mathfrak{U}_\beta$ *y* $\mathbf{D} \in \mathbf{M}$

[b]) $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{D}$;

[c]) $\mathbf{D}(0) = 0$;

[d]) $\mathbf{D} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}$;

[e]) $\mathbf{D} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_0^*[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]$;

[f]) $\mathbf{S}_0^* \overset{\circ}{\subset} \sum\limits_{1 \leq \nu < \omega} \mathbf{D}^\nu$

[g]) $\mathbf{S}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{DSD}$ *y con más generalidad,* $\mathbf{S}_\beta^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{DS}_\beta\mathbf{D}$.

Demostración. Las fórmulas [a]) a [d]) resultan casi de inmediato de la definición 22 y las definiciones precedentes. Para establecer la fórmula [e]), observamos que todo conjunto de la clase dada $\mathbf{K}$, en virtud de la fórmula bien conocida: $X - Y = X \cdot (1 - Y)$, aún toda diferencia de dos conjuntos de esta clase se puede representar como productos de dos, por tanto de menos que $\aleph_0$, conjuntos de la clase $\mathbf{K} + \underset{1-Y}{\mathrm{E}}[Y \in \mathbf{K}]$. Según la definición 22 y el teorema 53, se tiene pues $\mathbf{D}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{S}_0^*(\mathbf{K} \overset{\circ}{+} \underset{1-Y}{\mathrm{E}}[Y \in \mathbf{K}])$, donde se obtiene de inmediato, con ayuda de las definiciones del sección 2, la inclusión buscada: $\mathbf{D} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_0^*[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} C]$.

[f]) La fórmula $X \cdot Y = X - (X - Y)$ implica que $X \cdot Y \in \mathbf{DD}(\mathbf{K})$, bajo la condición que $X \in \mathbf{K}$ y $Y \in \mathbf{K}$. En razón de la definición $10^{b,c}$ se concluye de ahí por medio de una inducción fácil que $\prod\limits_{1 \leq \xi \leq \nu+1} X_\xi \in \mathbf{D}^{2,\nu}(\mathbf{K})$, cuado $\nu < \omega$ y $X_\xi \in \mathbf{K}$ y $1 \leq \xi \leq \nu + 1$. Pero, a consecuencia del teorema 53, los conjuntos $\prod\limits_{1 \leq \xi \leq \nu+1} X_\xi$ forman la clase $\mathbf{S}_0^*(\mathbf{K})$; luego se tiene $\mathbf{S}_0^*(\mathbf{K}) \subset \sum\limits_{1 \leq \nu < \omega} \mathbf{D}^\nu(\mathbf{K})$, de donde $\mathbf{S}_0^* \overset{\circ}{\subset} \sum\limits_{1 \leq \nu < \omega} \mathbf{D}^\nu$ l.q.q.d.

La fórmula: [g]) se obtiene análogamente a la formula [e]) apoyándose en la transformación conocida del Álgebra de los conjuntos: $\prod(\mathbf{K}) = X - \sum\limits_{Y \in \mathbf{K}}(X - Y)$ *para todo* $X \in \mathbf{K}$, y recurriendo a la definición 18 y al teorema 44, respectivamente (en lo que toca a la segunda inclusión) a la definición 20 y el teorema

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

53. Se debe observar que en la demostración de esta segunda inclusión se recurre además al lema 11[a] (para probar que $\overline{\overline{\underset{X-Y}{\mathrm{E}}[Y \in \mathbf{K}]}} \leq \overline{\overline{\mathbf{K}}}$), por lo tanto, indirectamente al axioma de elección.

La operación $\mathbf{D}^*$, doble de $\mathbf{D}$, se caracteriza por el teorema siguiente, que resulta fácilmente de las definiciones 14, 15 y 22:

Teorema 74. $\mathbf{D}^*(\mathbf{K}) = \mathbf{K} + \underset{(1-X)+Y}{E}[X \in \mathbf{K} \ \ y \ \ Y \in \mathbf{K}]$.

Esta operación consiste en añadir a una clase de conjuntos $\mathbf{K}$ cocientes de los elementos de esta clase: entendemos por cociente de los conjuntos Y y X al que está dado por $Z = Y : X = (1 - X) + Y$.

A causa del lema 19 las propiedades de la operación $\mathbf{D}^*$ inmediatemente se deducen de las que les corresponden para la operación $\mathbf{D}$ formulada en el teorema 73. Se tiene además el siguiente

Teorema 75. $\mathbf{C} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{DD}^*$

Demostración. Considerese una clase cualquiera $\mathbf{K}$. Sea $X \in \mathbf{C}(\mathbf{K})$, y por tanto $X = 1 - Y$ donde $Y \in \mathbf{K}$ (definición 14), de donde en virtud del teorema 74 $Y \in \mathbf{D}^*(\mathbf{K})$ y $1 = (1 - Y) + Y \in \mathbf{D}^*(\mathbf{K})$; por consiguiente, según la definición 22, $X = 1 - Y \in \mathbf{DD}^*(\mathbf{K})$. Se sigue que $\mathbf{C}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{DD}^*(\mathbf{K})$ para toda clase $\mathbf{K}$, por lo tanto que $\mathbf{C} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{DD}^*$. l.q.q.d.

Voy a indicar aquí algunas propiedades de las operaciones $\mathbf{D}$ y $\mathbf{D}^*$, omitidas en los teoremas precedentes. El teorema 73[a] puede reforzarse como sigue: $\mathbf{D}(\mathbf{Y}) = \sum_{X \subset \mathbf{Y} \ y \ \overline{\overline{X}} < 3} \mathbf{D}(X)$ *para toda clase de conjuntos* $\mathbf{Y}$, *de donde en particular,* $\mathbf{D}(\mathbf{X} + \mathbf{Y} + \mathbf{Z}) = \mathbf{D}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \mathbf{D}(\mathbf{X} + \mathbf{Z}) + \mathbf{D}(\mathbf{Y} + \mathbf{Z})$ para todas las clases $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ *y* $\mathbf{Z}$. *Se tiene a continuación por los teoremas*: *si* $\mathbf{K} \neq 0$, *entonces* $0 \in \mathbf{D}(\mathbf{K})$ *y* $1 \in \mathbf{D}^*(\mathbf{K})$; *si* $1 \in \mathbf{K}$, *se tiene* $\mathbf{C}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{D}(\mathbf{K})$; *si* $0 \in \mathbf{K}$, *se tiene* $\mathbf{C}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{D}^*(\mathbf{K})$; $\mathbf{D} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{TC}$; $\mathbf{DC} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}$; $\mathbf{C} \subset \mathbf{D}^*\mathbf{D}$ (la fórmula "doble" del teorema 75); $\mathbf{DSS}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{SS}^*\mathbf{D}$, $\mathbf{D}[\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta] \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_\beta\mathbf{S}^*_\beta\mathbf{D}$, $\mathbf{D}[\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta] \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}^*_\beta\mathbf{S}_\beta\mathbf{D}$ y $\mathbf{DR}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{R}_\beta\mathbf{D}$; $\mathbf{S}^*\mathbf{D} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{D}[\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*]$ y, en general, $\mathbf{S}^*_\beta\mathbf{D} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{D}[\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta]$; $\overline{\overline{\mathbf{D}(\mathbf{K})}} \leq \overline{\overline{\mathbf{K}}} + \overline{\overline{(\mathbf{K})}}^2$. Finalmente hay que notar que $\mathbf{MD}(\mathbf{K})$ *es una clase de conjuntos ajenos entre sí, cualquiera que sea la clase* $\mathbf{K}$ (veáse la definición 19).

En vez de la operación $\mathbf{D}$, suele considerarse la operación habitual $\mathbf{D}_1$, determinada por la fórmula $\mathbf{D}_1(\mathbf{K}) = \underset{X-Y}{\mathrm{E}}[X \in \mathbf{K} \ \ y \ \ Y \in \mathbf{K}]$, y se designa de la clase $\mathbf{D}_1(\mathbf{K})$ por $\mathbf{K}_p$.[1] Las operaciones $\mathbf{D}$ y $\mathbf{D}_1$ están muy estrechamente relacionadas, por ejemplo: si $0 \in \mathbf{K}$, *se tiene* $\mathbf{D}(\mathbf{K}) = \mathbf{D}_1(\mathbf{K})$; $\mathbf{DD}_1 \overset{\circ}{=} \mathbf{D}_1^2$ y $\mathbf{D}_1\mathbf{D} \overset{\circ}{=} \mathbf{D}^2$; $\mathbf{D} \overset{\circ}{=} \mathbf{D}_1 + \mathbf{I}$. Esta última igualdad da: $cl(\mathbf{D}) = cl(\mathbf{D}_1)$, de tal suerte que no importa cual de las dos operaciones $\mathbf{D}$ y $\mathbf{D}_1$, se toma como objeto, desde el punto de vista de estas investigaciones (comparemos con el teorema 23[b] y las observaciones que la acompañan). Entre otras propiedades de $\mathbf{D}_1$, mencionamos finalmente estas dos: $\mathbf{D}_1 \overset{\circ}{=} \mathbf{D}_1\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}_1^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{D}_1\mathbf{D}_1^*$.

Ahora pasaré a las familias de las clases cerradas respecto a las operaciones $\mathbf{D}$ y $\mathbf{D}^*$ y a las operaciones de la forma $\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}$, $\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*$ y $\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*$ y $\mathbf{F} \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*$, donde $\mathbf{F}$ es de las operaciones examinadas en las secciones anteriores. En este estudio se simplifica notablemente mediante unas identidades que

[1] Veáse Sierpinski pág. 113, citado en la pág. 62, nota 2).

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

son válidas entre estas familias y que voy a establecer preliminarmente.

Observemos que las clases de la familia $cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$ ya se estudiaron aunque desde otro punto de vista por el Sr. Hausdorft, a las cuales el designa con el nombre de Körper en el caso $\beta = 0$ y *erweiterte Kŗper* en el caso general.[1]

Teorema 76. $cl(\mathbf{D}) \subset cl(\mathbf{S}_0^*)$, $cl(\mathbf{D}^*) \subset cl(\mathbf{S}_0)$.

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 73^f y aplicando el teorema 21^a, se obtiene:

$$cl\left(\sum_{1\leq\nu\leq\omega} \mathbf{D}^\nu\right) \subset cl(\mathbf{S}_0^*),$$

de donde en razón del teorema 21^b.

$$\prod_{1\leq\nu<\omega} cl(\mathbf{D}^\nu) \subset cl(\mathbf{S}_0^*). \tag{1}$$

También, el teorema 25 proporciona en virtud del teorema 73^b:

$$cl\,(\mathbf{D}^\nu) = cl(\mathbf{D})\ para\ 1 \leq \nu < \omega. \tag{2}$$

Resulta inmediatamente de (1) y (2) que

$$cl(\mathbf{D}) \subset cl(\mathbf{S}_0^*), \tag{3}$$

de donde $\overline{\mathbf{C}}(cl(\mathbf{D})) \subset \overline{\mathbf{C}}(cl(\mathbf{S}_0^*))$; con ayuda del teorema 26 concluímos que $cl(\mathbf{D}^*) \subset cl(\mathbf{S}_0^{**})$, y se tiene por el lema 19^b:

$$cl(\mathbf{D}^*) \subset cl(\mathbf{S}_0). \tag{4}$$

Las fórmulas (3) y (4) consitituyen el teorema que ha quedado demostrado.

Teorema 77.

$^a)$ $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0)$;

$^b)$ $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{H}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{H}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{H}) = cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{H}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0 \overset{\circ}{+} \mathbf{H})$. *para toda operación* $\mathbf{H}$.

Demostración. Según los teoremas 28^b y 73^a, se tiene

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*). \tag{1}$$

[1] Veáse Hausdorff, Mengenlehre, Berlin und Leipzig 1927, 78 - 82

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

El teorema 21^b (para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{C}$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*$) da: $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{C}) \cdot cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)$, de donde

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) \subset cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*). \tag{2}$$

Como $\mathbf{D}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*$, se concuye del teorema 21^a que $cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) \subset cl(\mathbf{D}^*)$, en razón del teorema 76,

$$cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) \subset cl(\mathbf{S}_0). \tag{3}$$

Las inclusiones: $cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) \subset cl(\mathbf{D}\mathbf{D}^*)$ y $cl(\mathbf{D}\mathbf{D}^*) \subset cl(\mathbf{C})$, de las cuales la primera resulta del teorema 24^a y 73^a y la segunda de los teoremas 21^a y 75, dan como consecuencia inmediata:

$$cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) \subseteq cl(\mathbf{C}). \tag{4}$$

Las fórmulas (3) y (4) implican: $cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) \subset cl(\mathbf{C}) \cdot cl(\mathbf{S}_0)$ de donde según el teorema 21^b,

$$cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) \subset cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0). \tag{5}$$

Volviendo a aplicar el teorema 28^b y tomando en cuenta el teorema 50^a, obtenemos:

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0^*). \tag{6}$$

El teorema 23^b (para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0^*$) implica que $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0^*) = cl(\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0^*) = cl(\mathbf{S}_0^* \overset{\circ}{+} [\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}])$. En virtud de la inclusión evidente: $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}$, concluímos del teorema 24^a (para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_0^*$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}$) que $cl(\mathbf{S}_0^* \overset{\circ}{+} [\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]) \subset cl(\mathbf{S}_0^*[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}])$. Por consiguiente,

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0^*) \subset cl(\mathbf{S}_0^*[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]). \tag{7}$$

Con ayuda del teorema 21^a se deduce del teorema 73^e, la inclusión: $cl(\mathbf{S}_0^*[\mathbf{I} \overset{\circ}{+} \mathbf{C}]) \subset cl(\mathbf{D})$, la cual, junto con (6) y (7), proporciona: $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0) \subset cl(\mathbf{D})$. Mediante doble aplicación del terorema 21^b se obtiene fácilmente: $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} [\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0]) = cl(\mathbf{C}) \cdot cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0) \subset cl(\mathbf{C}) \cdot cl(\mathbf{D}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$, por tanto

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0) \subset cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}). \tag{8}$$

Las fórmulas (1), (2), (5) y (8) trae consigo la identidad buscada:

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0), \quad \textit{l.q.q.d.}$$

Aplicando el corolario 22^a) se obtiene fácilmente ^{b}). Como casos particulares del teorema 77^b citamos las identidades:
$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)$, $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})$, etc.

Corolario 78.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

[a]) $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T})$;

[b]) $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{H}) = cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{H}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{H})$ *para toda operación* $\mathbf{H}$.

Demostración. [a]) Poniendo en el teorema 77^b : $\mathbf{H} \overset{\circ}{=} \mathbf{T}$, respectivamente $\mathbf{H} \overset{\circ}{=} \mathbf{T}^*$, obtenemos:

(1) $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}) = cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{T})$ y $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^*) = cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^*)$.

Según el teorema 73^d y el lema 19^c se tiene $\mathbf{D} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}$ y $\mathbf{D}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*$, donde $\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{=} \mathbf{T}$, $\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^* \overset{\circ}{=} \mathbf{T}^*$, con lo cual simplificamos las fórmulas (1) para obtener:

(2) $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}) = cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)$ y $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^*) = cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$.

Ahora bien las igualdades de (2) junto con el teorema 41^a, nos proporciona la fórmula buscada.
[b]) El corolario 22 implica [b]) a partir de [a]).

Tomando en cuenta el teorema 41, se concluye del corolario precedente que la familia $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$, así como toda familia de la forma $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{H}) = cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{H})$, donde $\mathbf{H}$ es cualquier operación considerada en este trabajo, contiene solo dos elementos a saber 0 y $\mathbf{U}(1)$.

Teorema 79.

[a]) *Si* $\beta \geq \gamma$, *se tiene* $cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$ *y* $cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)$;

[b]) $cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$ *y* $cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)$.

Demostración. [a]) En virtud el teorema 52^b y el lema 19^c, tenemos $\mathbf{S}^*_\gamma \subset \mathbf{S}^*_\beta$, de donde en razón del teorema 73^g $\mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{\subset} \mathbf{D}\mathbf{S}_\beta\mathbf{D}$; con ayuda del teorema 21^a se concluye que
(1)
$$cl(\mathbf{D}\mathbf{S}_\beta\mathbf{D}) \overset{\circ}{\subset} cl(\mathbf{S}^*_\gamma).$$

Poniendo en el teorema 24^a, $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{D}$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta\mathbf{D}$ y tomando en cuenta el teorema 73^a se obtiene: $cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta\mathbf{D}) \subset cl(\mathbf{D}\mathbf{S}_\beta\mathbf{D})$; como además $cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}\mathbf{D}) = cl(\mathbf{D}) \cdot cl(\mathbf{S}_\beta\mathbf{D})$ por el teorema 21^b se tiene:
(2)
$$cl(\mathbf{D}) \cdot cl(\mathbf{S}_\beta\mathbf{D}) \subset cl(\mathbf{D}\mathbf{S}_\beta\mathbf{D}).$$

El teorema 24^a da todavía en virtud de 73^b: $cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) \subset cl(\mathbf{S}_\beta\mathbf{D})$; del teorema 21^a (o 21^b) que $cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) \subset cl(\mathbf{D})$. Por consiguiente,
(3)
$$cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) \subset cl(\mathbf{D}) \cdot cl(\mathbf{S}_\beta\mathbf{D}).$$

Las inclusiones (1) - (3) implican inmediatamente:

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

(4)

$$cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) \subset cl(\mathbf{S}^*_\gamma).$$

Pero el teorema 21[b] implica que $cl(\mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{S}^*_\gamma) \cdot cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$; aunado con (4) esta dará la primera fórmula que se buscaba:

$$cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D}).$$

Por el corolario 27, se sigue que $cl([\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}]^*) = cl([\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D}]^*)$, de donde deducimos con ayuda del lema 19[b,d], la segunda fórmula:

$$cl(\mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*), \qquad \textit{l.q.q.d.}$$

^{b}) Sea $\aleph_\alpha$ la potencia del conjunto universal 1. Pongamos: $\beta = \max(\alpha + 1, \gamma)$, de donde $\beta \geq \gamma$. Las fórmulas ^{a}) que acabamos de establecer dan entonces:

(5) $cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$ y $cl(\mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)$.

Como en virtud de la definición de β, se tiene $\bar{1} = \aleph_\beta$, el teorema 51[d] implica: $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{=} \mathbf{S}$ y, por consecuencia, $\mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{=} \mathbf{S}^*$. Entonces al reemplazar en (5) $\mathbf{S}_\beta$ por $\mathbf{S}$ y $\mathbf{S}^*_\beta$ por $\mathbf{S}^*$, llegamos de inmediato a las identidades buscadas.

El siguiente teorema nos permite seguidamente resumir (al final de la sección) de una manera muy clara todos los resultados obtenidos en este trabajo.

Teorema 80. *Sea $\mathfrak{K}$ la clase compuesta por operaciones $\mathbf{C}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^*$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^*$ y por todas las operaciones $\mathbf{S}_\xi$ y $\mathbf{S}^*_\eta$, (donde ξ y η son números ordinales arbitrarios); sea $\mathfrak{L}$ la clase formada por las operaciones $\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{T}^*, \mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}$ y todas las operaciones $\mathbf{S}_\xi$, $\mathbf{S}^*_\eta$, $\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\xi$, $\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\xi$, $\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\eta$, , $\mathbf{S}_\xi \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\eta$, $\mathbf{S}_\xi \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*$, $\mathbf{S}^*_\eta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}$, $\mathbf{S}_\xi \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\eta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}$, y $\mathbf{S}_\xi \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\eta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*$, ($\xi$ y η arbitrarios). Se tiene entonces*

$$\underset{cl(\mathbf{F})}{E}[\mathbf{F} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{K})] = \underset{cl(\mathbf{G})}{E}[\mathbf{G} \in \mathfrak{L}]$$

Demostración. Consideremos una familia arbitraria $\mathcal{X}$ tal que

$$\mathcal{X} \in \underset{cl(\mathbf{F})}{\mathrm{E}}[\mathbf{F} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{K})]. \tag{1}$$

De conformidad con la definición 11[a], (1) implica la existencia de una clase de operaciones $\mathfrak{S}_1$ que verifican las fórmulas:

$$\mathcal{X} = cl\left(\overset{\circ}{\sum_{\mathbf{G} \in \mathfrak{S}_1}} \mathbf{G}\right), \tag{2}$$

Traducion Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

$$\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{K} \quad \text{y} \;\; \mathfrak{S}_1 \neq 0. \tag{3}$$

Ahora bien, probaremos que existe una clase de operaciones $\mathfrak{S}_2$ y de números ordinales β y γ que satisfacen las condiciones:

$$\sum^{\circ}_{\mathbf{G} \,\in\, \mathfrak{S}_2} \mathbf{G} \overset{\circ}{=} \sum^{\circ}_{\mathbf{G} \,\in\, \mathfrak{S}_1} \mathbf{G}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{S}_2 \subset \{\mathbf{C},\ \mathbf{T},\ \mathbf{T}^*,\ \mathbf{S}_\beta,\ \mathbf{S}^*_\gamma,\ \mathbf{D},\ \mathbf{D}^*\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{S}_2 \neq 0. \tag{5}$$

Resulta, efectivamente, de (3) y de la hipótesis del teorema que $\mathfrak{S}_1$ no contiene más que las operaciones $\mathbf{C},\ \mathbf{T},\ \mathbf{T}^*,\ \mathbf{S},\ \mathbf{S}^*,\ \mathbf{D},\ \mathbf{D}^*$ así como las operaciones de la forma $\mathbf{S}_\xi$ y $\mathbf{S}^*_\eta$. Las operaciones $\mathbf{S}$ y $\mathbf{S}^*$ pueden representarse bajo la forma de $\mathbf{S}_\xi$, respectivamente $\mathbf{S}^*_\eta$ (ya que, siendo $\aleph_\alpha$ la potencia del conjunto universal 1, se tiene por el teorema 51^d: $\mathbf{S} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{\alpha+1}$ y $\mathbf{S}^* \overset{\circ}{=} \mathbf{S}^*_{\alpha+1}$); es por esto que aquí los podemos pasar por alto. Ahora sea $\mathfrak{F}_1$, respectivamente $\mathfrak{F}_2$, las clases de todas las operaciones de $\mathfrak{S}_1$ que son de la forma $\mathbf{S}_\xi$, respectivamente $\mathbf{S}^*_\eta$ y A_1, respectivamente A_2, el conjunto de todos los índices ξ, respectivamente η, de tales operaciones. Escribimos: $\beta = \sup(A_1)$ y $\gamma = \sup(A_2)$; $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1$, cuando $\mathfrak{F}_1 = 0 = \mathfrak{F}_2$; $\mathfrak{S}_2 = (\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{F}_1) + \{\mathbf{S}_\beta\}$ cuando $\mathfrak{F}_1 \neq 0$, y $\mathfrak{F}_2 = 0$; $\mathfrak{S}_2 = (\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{F}_2) + \{\mathbf{S}^*_\gamma\}$, cuando $\mathfrak{F}_1 = 0$ y $\mathfrak{F}_2 \neq 0$, finalmente $\mathfrak{S}_2 = (\mathfrak{S}_1 - (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2) + \{\mathbf{S}_\beta, \mathbf{S}^*_\gamma\})$, cuando $\mathfrak{F}_1 \neq 0$ y $\mathfrak{F}_2 \neq 0$. Resulta del teorema 52^a que $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{=} \sum^{\circ}_{\mathbf{G} \,\in\, \mathfrak{F}_1} \mathbf{G}$ *para* $\mathfrak{F}_1 \neq 0$ y también (en virtud de lema 19^d) que $\mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{=} \sum^{\circ}_{\mathbf{G} \,\in\, \mathfrak{F}_2} \mathbf{G}$ *para* $\mathfrak{F}_2 \neq 0$. Se deduce sin dificultad la igualdad (4) y se concluye de inmediato de la defínción de $\mathfrak{S}_2$ que en este caso verifica también las fórmulas (5).

Observemos ahora las identidades siguientes, que existen entre las diversas familias de la forma $cl\left(\sum^{\circ}_{\mathbf{G}\in\mathfrak{S}} \mathbf{G}\right)$, donde $\mathfrak{S}$ es una subclase de $\{\mathbf{C},\ \mathbf{T},\ \mathbf{T},\ \mathbf{S}_\beta,\ \mathbf{S}^*_\gamma,\ \mathbf{D},\ \mathbf{D}^*\}$:

$$cl(\mathbf{T}) = cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) = cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D}); \tag{6}$$

$$cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta) = cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) = cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D}); \tag{7}$$

$$cl(\mathbf{T}^*) = cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta) = cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*); \tag{8}$$

$$cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) = cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) = cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*); \tag{9}$$

Traduccion. Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

$$
\begin{aligned}
cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}) &= cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \overset{\circ}{\sum}_{\mathbf{G}\in\mathfrak{G}} \mathbf{G}) \\
&= cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \overset{\circ}{\sum}_{\mathbf{G}\in\mathfrak{G}} \mathbf{G}) \\
&= cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \overset{\circ}{\sum}_{\mathbf{G}\in\mathfrak{G}} \mathbf{G}) \\
&= cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^* \overset{\circ}{+} \overset{\circ}{\sum}_{\mathbf{G}\in\mathfrak{G}} \mathbf{G}) \\
&= cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \overset{\circ}{\sum}_{\mathbf{G}\in\mathfrak{G}} \mathbf{G}). \qquad (10)
\end{aligned}
$$

para toda subclase de $\{\mathbf{C},\ \mathbf{T},\ \mathbf{T}^*\ \mathbf{S}_\beta,\ \mathbf{S}^*_\gamma,\ \mathbf{D},\ \mathbf{D}^*\}$;

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*); \qquad (11)$$

$$cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*); \qquad (12)$$

$$
\begin{aligned}
cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma) &= cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) \\
&= cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) \\
&= cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*); \qquad (13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{\max(\beta,\gamma)}) &= cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma) \\
&= cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) \\
&= cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) \\
&= cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) \\
&= cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*); \qquad (14)
\end{aligned}
$$

$$cl(\mathbf{D}) = cl(\mathbf{S}^*_0 \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) \ \ y \ \ cl(\mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{S}_0 \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*); \qquad (15)$$

$$cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) \ \ y \ \ cl(\mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*). \qquad (16)$$

Estas fórmulas se demuestran como sigue:

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Las identidades (6)-(9) resultan de las incluisiones: $\mathbf{S}_\gamma^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}$, $\mathbf{D} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}$, $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*$ y $\mathbf{D}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*$ (teoremas 51^b, 73^d, lema $19^{b,c}$), que en virtud del lema 13 implican las igualdades: $\mathbf{T} \overset{\circ}{=} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma^* \overset{\circ}{=} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}$ e igualmente $\mathbf{T}^* \overset{\circ}{=} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{=} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*$.

Para demostrar la fórmula (10), hay que observar que para toda operación $\mathbf{G}$ de la clase $\{\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{T}^*, \mathbf{S}, \mathbf{S}_\gamma^*, \mathbf{D}, \mathbf{D}^*\}$ se tiene $\mathbf{G}(0) = 0$ (lemas 18^d y 19^k, teorema 36^c, 50^c y 73^c); resulta de ello según la definición 9^b que también se tiene $\left[\overset{\circ}{\sum}_{\mathbf{G} \in \mathfrak{S}} \mathbf{G}\right](0) = 0$ para toda subclase $\mathfrak{S}$ de esta clase. Así pues, poniendo en el teorema 41^b y en el corolario 78^b: $\mathbf{H} = \overset{\circ}{\sum}_{\mathbf{G}\in\mathfrak{S}} \mathbf{G}$ y aplicando el teorema 41^a, se obtiene la fórmula buscada.

Las identidades (11) se establecen en el teorema 77^a. Poniendo en el teorema 77^b: $\mathbf{H} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta$ y tomando en cuenta la inclusión: $\mathbf{S}_0 \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_\beta$ (teorema 52^b), se llega a la fórmula (12). Las fórmulas (13) y (14) se obtienen de manera totalmente análoga ($\mathbf{H} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\gamma^*$, respectivamente $\mathbf{H} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma^*$), pero se tendrá cuidado de observar que en razón de los teoremas 28^b y 50^a $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma^*)$, de donde en virtud del teorema 52^a y del corolario 22 (para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma$, $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma^*$, y $\mathbf{H} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta$), $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_{\max(\beta,\gamma)}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)$.

Las igualdades (15) se deducen fácilmente de los teoremas 76 y 21^b (para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_0^*$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{D}$, respectivamente para $\mathbf{F} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_0$ y $\mathbf{G} \overset{\circ}{=} \mathbf{D}^*$). Finalmente, las fórmulas (16) tan sólo presentan casos particulares del teorema 79^a.

Ahora bien, se ve con facilidad que en consecuencia de la definición $9^{a,b}$ y las identidades (6)-(16) que se acaban de establecer, toda familia de la forma $cl\left(\overset{\circ}{\sum}_{\mathbf{G} \in \mathfrak{S}} \mathbf{G}\right)$, donde $\mathfrak{S}$ es una subclase no vacía de $\{\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{T}^*, \mathbf{S}_\beta, \mathbf{S}_\gamma^*, \mathbf{D}, \mathbf{D}^*\}$, coincide con una de las siguientes familias: $cl(\mathbf{C})$, $cl(\mathbf{T})$, $cl(\mathbf{T}^*)$, $cl(\mathbf{S}_\beta)$, $cl(\mathbf{S}_\gamma^*)$, $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{T})$, $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_0)$, $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta)$, $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma)$, $cl(\mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma^*)$, $cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma^*)$, $cl(\mathbf{S}_0 \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)$, $cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)$, $cl(\mathbf{S}_0^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$, $cl(\mathbf{S}_\gamma^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$, $cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$, $cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$, $cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)$, y $cl(\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\gamma^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)$, de acuerdo con la hipótesis, con una de las familias $cl(\mathbf{G})$ donde $\mathbf{G} \in \mathfrak{L}$. Esto se aplica en particular a la familia $cl\left(\overset{\circ}{\sum}_{\mathbf{G} \in \mathfrak{S}_2} \mathbf{G}\right)$, siendo, $\mathfrak{S}_2$ por (5) una subclase no vacía de $\{\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{T}^*, \mathbf{S}_\beta, \mathbf{S}_\gamma^*, \mathbf{D}, \mathbf{D}^*\}$; así pues, existe una operación $\mathbf{G}'$ que cumple con:

$$cl\left(\overset{\circ}{\sum_{\mathbf{G} \in \mathfrak{S}_2}} \mathbf{G}\right) = cl(\mathbf{G}') \tag{17}$$

y

$$\mathbf{G}' \in \mathfrak{L}. \tag{18}$$

Las igualdades (2), (4) y (17), de inmediato darán: $\mathcal{X} = cl(\mathbf{G}')$: asociando con (18) se obtiene

Traduccion Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

$$\mathfrak{X} \in \underset{cl(\mathbf{G})}{\mathrm{E}}[\mathbf{G} \in \mathfrak{L}]. \tag{19}$$

Asíse demuestra que la fórmula (1) siempre implica (19); por lo tanto, se tiene la inclusión: $\underset{cl(\mathbf{F})}{\mathrm{E}}[\mathbf{F} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{K})] \subset \underset{cl(\mathbf{G})}{\mathrm{E}}[\mathbf{G} \in \mathfrak{L}]$. La inclusión inversa resulta de la hipótesis de manera inmediata, y entonces llegamos finalmente a la identidad buscada:

$$\underset{cl(\mathbf{F})}{\mathrm{E}}[\mathbf{F} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{K})] = \underset{cl(\mathbf{G})}{\mathrm{E}}[\mathbf{G} \in \mathfrak{L}], \qquad \text{l.q.q.d}$$

Los problemas que tratan de la potencia de las familias de la forma $cl(\mathbf{F})$ no presentarán en esta sección dificultades apreciables y no exigirán nuevos métodos de deducción. Se observará que las familias de la forma $cl(\mathbf{F})$, donde $\mathbf{F}$ es una suma de operaciones que entre sus sumandos contienen ya sea las dos operaciones $\mathbf{D}$ y $\mathbf{D}^*$, ya sea una de ellas acompañada por $\mathbf{C}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^*$, pueden omitirse en el estudio de estos problemas pues en virtud del teorema 77 y el corolario 78, estas familias coinciden con las que ya se estudiaron en §§4-6. Así por ejemplo al confrontar los teoremas IX y 77[a] se convence uno de inmediato que en la *hipótesis*: $\bar{\bar{1}} = \aleph_\alpha$ *la familia* $cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{C} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*) = cl(\mathbf{D} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)$ *es de potencia* $2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Teorema Fundamental XIII. *Si* $\bar{\bar{1}} = \aleph_\alpha$, se tiene

^{a}) $\overline{\overline{cl(\mathbf{D})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{D}^*)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

^{b}) $\overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

^{c}) $\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Demostración. Según el teorema 73[d] y el lema 19[c], se tiene $\mathbf{D}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*$, de donde en virtud del teorema 51[b], $\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*$ y $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*$. Establecido lo anterior se razona como en la demostración del teorema fundamental IV.

Teorema Fundamental XIV. *Si* $\bar{\bar{1}} = \aleph_\alpha$, *se tiene* $\overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Demostración. En razón del teorema 73[d], se cumple $\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}$, de donde en virtud del teorema 21[a], $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}) \subset cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$; en razón de los teoremas 79[b] y 21[b] se tiene además: $cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*) \cdot cl(\mathbf{D}) \subset cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)$. Se sigue

(1)
$$\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})}} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)}}.$$

De acuerdo con los teoremas fundementales V y VI, $\overline{\overline{cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S})}} = 2^{\aleph_\alpha} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)}}$, lo que según (1): $\overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = 2^{\aleph_\alpha}$. Como además, por el teorema 33 y el lema 19[d], $\overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}}$, se deduce finalmente:

MEXICO
Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} = 2^{\aleph_\alpha} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

En el caso donde $\bar{\bar{1}} = \mathfrak{a} < \aleph_0$ se puede establecer para las potencias de las también estudiadas en el teorema XIII las mismas limitaciones que se indicaron antes (pág. 44) para la familia $cl(\mathbf{T})$; en cuanto a las familias del teorema XIV, las delimitaciones establecidas para la familia $cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*)$ (pág. 55) siguen siendo válidas para ellas.

Teorema Fundamental XV. *Si $\bar{\bar{1}} = \aleph_\alpha$ y $\beta \leq p(\alpha)$, se tiene*

$^{a})$ $\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

$^{b})$ $\overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

$^{c})$ $\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Demostración. Con ayuda del teorema 51^b, 73^d y del lema $19^{b,c}$ se convence de que por ser $\mathbf{F}$ una de las seis siguientes operaciones: $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}$, $\mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*$, $\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*$, $\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}$, $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D}$ y $\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*$, se tiene ya sea $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta$ ya sea $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta$. Así es que al aplicar el corolario 63^a, se obtienen inmediatamente todas las fórmulas buscadas.

Queda abierta la pregunta si se puede reforzar el teorema XV^a en el mismo sentido que el teorema XI^b (es decir, que si se puede reemplazar en el teorema 67, $\mathbf{S}^*_\gamma$ por $\mathbf{D}$); este este problema por demás, es equivalente al problema análogo concerniente a la operación $\mathbf{C}$ (véase pág. 78 y 79).

Teorema 81. *Si $\bar{\bar{1}} = \aleph_\alpha$ y $\beta \leq p(\alpha)$, se tiene* $\overline{\overline{cl(\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Demostración. La demostración está basada en las formulas: $\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}\mathbf{S}_\beta$, $\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^* \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T}^*\mathbf{S}^*_\beta$ y no difiere de la del teorema 64 (respectivamente del teorema anterior).

Teorema 82. *Si $\bar{\bar{1}} = \aleph_\alpha$ y $\beta > cf(\alpha)$, se tiene*

$^{a})$ $2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} \leq 2^{\underset{\smile}{2^{\aleph_\alpha}}}$;

$^{b})$ $2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} \leq 2^{\underset{\smile}{2^{\aleph_\alpha}}}$;

$^{c})$ $2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} \leq 2^{\underset{\smile}{2^{\aleph_\alpha}}}$.

Traduccion Prof. Andres Sestier Bouclier Mexico

Demostración. En virtud de los teoremas 51^b, 73^d y del lema $19^{b,c}$, se tienen las inclusiones: $\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}$, que dan en razón del teorema 21^a : $cl(\mathbf{T} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}) \subset cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) \subset cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) \subset cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$. Tomando en cuenta el teorema fundamental V, se obtiene de aquí:

$$2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}}. \tag{1}$$

Por los teoremas 79^a (para $\gamma = \beta$) y 21^b, $cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}) = cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta) \cdot cl(\mathbf{D}) \subset cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)$. Como por hipótesis se tiene $\beta > cf(\alpha)$, el teorema 69 (para $\gamma = \beta$) implica además: $\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta)}} \leq 2^{2^{\aleph_\alpha}}$. Por consiguiente:

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} \leq 2^{2^{\aleph_\alpha}}. \tag{2}$$

Finalmente, aplicando varias veces el teorema 33 y el lema $19^{b,d}$ se llega a las igualdades:

$$\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}}, \quad \overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} \quad y$$
$$\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}}. \tag{3}$$

De (1)-(3) se obtienen de inmediato todas las fórmulas buscadas.

Teorema 83. *Si* $\bar{\bar{1}} = \aleph_\alpha$ *y* $\beta > cf(\alpha)$, *se tiene* $2^{\aleph_\alpha} \leq \overline{\overline{cl(\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} \leq 2^{2^{\aleph_\alpha}}$

Demostración. La demostración es por completo similar a la del teorema 71.

Teorema Fundamental XVI. *La hipóteis H trae consigo las consecuencias:*
Si $\bar{\bar{1}} = \aleph_\alpha$ *y* $\beta > p(\alpha)$, *se tiene:*

a) $\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}$;

b) $\overline{\overline{cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = 2^{\aleph_\alpha}$;

c) $\overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{S}_\gamma \overset{\circ}{+} \mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Teorema 84. *La hipótesis* H *implica la siguiente consecuencia:*
Si $\bar{\bar{1}} = \aleph_\alpha$ *y* $\beta > p(\alpha)$, *se tiene* $\overline{\overline{cl(\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})}} = \overline{\overline{cl(\mathbf{R}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D}^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Demostración. La demostración de los dos últimos teoremas está basada en los teoremas 82, 83 y en el lema $9^{a,b}$, no presenta dificultades (veáse el teorema XII).

Al comparar los teoremas XIII^b y XIV vemos que las familias $cl(\mathbf{S} \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$ y $cl(\mathbf{S}^* \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$, que uno pensaría que son idénticos, se comportan en realidad de formas esencialmente diferentes, aún desde el punto de vista de sus potencias. Para las familias $cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$ y $cl(\mathbf{S}^*_\beta \overset{\circ}{+} \mathbf{D})$ el mismo efecto es producido por los teoremas XIII^c y XVI^a.

Resumen

El campo de estas investigaciones comprende ciertas operaciones elementales que hacen corresponder a toda clase de conjuntos, nuevas clases de conjuntos, a saber las operaciones $\mathbf{C}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_\xi$, (donde ξ recorre todos los números ordinales) y $\mathbf{D}$, así como mediante sus operaciones dobles; la clase de todas estas operaciones se denotó mediante $\mathfrak{K}$ (teorema 80). Los problemas fundamentales de esta obra consisten en determinar la potencia de las familias de todas las clases que se componen de subconjuntos de un conjunto dado 1 y que son cerradas respecto de una cualquiera de las operaciones indicadas o bien respecto de varias de dichas operaciones a la vez; en nuestro simbolismo que las familias aludidas se presentan bajo la forma de $cl(\mathbf{F})$ donde $\mathbf{F} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{K})$. En los teoremas fundamentales de §§3-7 hemos examinado una serie de problemas de este tipo y hemos logrado (recurriendo a veces a la hipótesis del continuo de Cantor respecto de los álef) determinar las potencias de las familias consideradas según la potencia $\aleph_\alpha$ del conjunto universal 1. Los resultados obtenidos muestran que la potencia de una familia examinada es igual las más de las veces ya sea a $2^{2^{\aleph_\alpha}}$ ya sea a $2^{\aleph_\alpha}$; no obstante ciertas familias consideradas no tenian más que 2 elementos.

Para darse cuenta, en cual medida los problemas de esta especie quedan agotados por nuestras investigaciones, se consultará el teorema 80. Este teorema muestra que todas las familias $cl(\mathbf{F})$ donde $\mathbf{F} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{K})$ se reducen a ciertos tipos, bastante simples y poco numerosos. Combinando este resultado con los obtenidos en los teoremas fundamentales I-XVI, se constatará que las *investigaciones presentes agotan todos los problemas que atañen a la potencia de las familias de todas las clases cerradas respecto a una operacion arbitraria de la clase $\boldsymbol{\mathfrak{K}}$ o bien respecto a varias operaciones de esta clase, a la vez.*

Es interesante el hecho de que los resultados antes expuestos pueden extenderse a las operaciones de una clase mucho mas vasta que $\mathfrak{S}(\mathfrak{K})$, a saber, a las operaciones de la clase $\mathfrak{B}(\mathfrak{K})$ formada por todas las operaciones que se obtienen de las de la clase $\mathfrak{K}$ mediante la adición y la multiplicación relativa efectuadas un número arbitrario (finito o transfinito) de veces (ver la definición 11^c). Las operaciones de la clase $\mathfrak{B}(\mathfrak{K})$ pueden presentar una estructura muy complicada y no se pueden reducir a un finito de tipos simples. Por el contrario, de las observaciones generales de §3 (véase teorema B. pág. 32) resulta que las familias de la forma $cl(\mathbf{F})$ donde $\mathbf{F} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{K})$, se prestan a una reducción considerable y esta reducción desemboca en las mismas familias que aparecieron en el curso del examen de la clase $\mathfrak{S}(\mathfrak{K})$ en el teorema 80 y en una sola familia nueva $cl(\mathbf{I})$, cuya potencia conocemos por el teorema 32.

Algunos resultados (teoremas 61, 64, 72, 81, 84) tenían que ver con una clase más extendida, que se obtiene de $\mathfrak{K}$ al adjuntar operaciones $\mathbf{R}_\xi$ (donde ξ recorre todos los números ordinales). Sin tratar de agotar en este trabajo todos los problemas de este género tan solo haré la observación de que los problemas que no se han mencionado explícitamente (por ejemplo el de la potencia de la familia $cl(\mathbf{S}_\beta \overset{\circ}{+}$

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

$\mathbf{R}_\gamma$)) pueden ser resueltos fácilmente por los métodos aplicados repetidamente en este trabajo.

Índice de símbolos

Enumeramos aquí los símbolos introducidos por primera vez o que no son universalmente aceptados, indicando el lugar donde se encuentra la explicación de su sentido:

Traduccion Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico

Índice de materias

Traduccion: Prof. Andres Sestier Bouclier
Mexico