XX

Tres teoremas de cubierta en la teoría general de conjuntos

Título original: Drei Überdeckungssätze der allgemeinen Mengenlehre
Von Alfred Tarski
Fundamenta Mathematicae (1938), 132-15530

Hace algunos año el Sr. Ulam demostró[2] un teorema de cubierta de caracter teórico conjuntista; este teorema fue después sensiblemente generalizado por W. Sierpiński. En el articulo presente propongo dos teoremas de naturaleza similar.

Primero se definen algunos conceptos propios de la aritmética de los números cardinales que permiten una formulación más comoda de los teoremas en cuestión.

Definición 1. Diremos que el número cardinal $\mathfrak{n}$ *es accesible fuertemente por el cardinal* $\mathfrak{m}$*, cuando* $\mathfrak{n}$ *pertenece a cada sistema* $\mathfrak{K}$ *de números cardinales que satisfaga las siguientes condiciones:*

(i) $\mathfrak{m} \in \mathfrak{K}$*;*

(ii) Si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{K}$ *y* $\mathfrak{p} \geq \mathfrak{q}$*, entonces* $\mathfrak{q} \in \mathfrak{K}$*;*

(iii) Si a cada elemento p *de un conjunto* P *de cardinalidad* $|P| = \mathfrak{p} \in \mathfrak{K}$ *se asocia un número cardinal* $\mathfrak{q}_p \in \mathfrak{K}$*, entonces* $\sum_{p \in P} \mathfrak{q}_p \in \mathfrak{K}$*;*

(iv) Si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{K}$ *y* $\mathfrak{q}$ *es el sucesor cardinal de* $\mathfrak{p}$*, entonces* $\mathfrak{q} \in \mathfrak{K}$*.*

[2]Véase S. Ulam, , *Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math. **16**(1930), pág. 145, así como W. Sierpiński, *Sur un théorème de recouverment dans la théorie générale des ensemble*, Fund. Math. **20**(1933), pág. 214 y siguientes (o el libro del mismo autor *Hypoth'ese du continu*, Monogr. Matem. **4**, Warszawa-Lwów 1934, pág. 152 y siguientes.)

Definición 2. Diremos que el número cardinal es accesible débilmente por el cardinal $\mathfrak{m}$*, cuando* $\mathfrak{n}$ *pertenece a todo sistema de números cardinales que satisfaga las condiciones (i)-(iii) de la defінción 1, así como la siguiente condición:*[1]

(iv) si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{K}$ *y* $\mathfrak{q} \in \mathfrak{K}$*, entonces* $\mathfrak{p}^{\mathfrak{q}} \in \mathfrak{K}$.

De estas definiciones se desprende de inmediato que cualquier número cardinal $\mathfrak{n}$ accesible fuertemente por el número cardinal $\mathfrak{m} \geq 2$ es simultáneamente accesible débilmente. El problema de si el recíproco se cumple, no se puede decidir inluso en el caso más trivial: $\mathfrak{m} = \aleph_0$ y $\mathfrak{n} = 2^{\aleph_0}$; una solución de este problema, y de hecho positiva, se alcanza claramente mediante la hipótesis de los álef de Cantor:

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \qquad \text{para todo número ordinal } \alpha.$$

El teorema de cubierta de Sierpiński (en una forma un tanto cambiada y más general) afirma lo siguiente:

Primer teorema de cubierta. *Sean* $\mathfrak{m}$ *un cardinal infinito,* N *un conjunto y* $\mathbf{S}$ *un sistema de conjuntos que satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) la cardinalidad $|N| = \mathfrak{n}$ *es accesible fuertemente por* $\mathfrak{m}$*;*

(ii) cada[2] *sistema* $\mathbf{T} \subset Pt(N) - \mathbf{S}$ *de conjuntos no vacíos y ajenos entre si tiene cardinalidad* $\leq \mathfrak{m}$*;*

(iii) $N \subset \sum_{X\in\mathbf{S}} X$.

Con estas hipótesis existe un sistema $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ *de cardinalidad* $\leq \mathfrak{m}$ *tal que* $N \subset \sum_{X\in\mathbf{M}} X$.

Este teorema fue formulado y demostrado por W. Sierpiński para el caso $\mathfrak{m} = \aleph_0$, pero la demostración se puede extender casi literalmente al caso general. La formulación de Sierpiński de este teorema se distingue de la aquí dada en ciertas particularidades; no obstante, es fácil corroborar que ambas formulaciones son equivalentes (de lo cual se hablará aun más abajao, pág. ??).

El área de aplicabilidad del primer teorema de cubierta está restringido esencialmente por la condición (1): por ejemplo, si $\mathfrak{m} = \aleph_0$, el teorema se cumple para el conjunto N de cardinalidad $\aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega$, etc, pero ya no se puede aplicar (sin hipótesis adicionales) para conjuntos con cardinalidad $2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}$, etc.

Nos es posible eliminar esta restricción en los dos teoremas presentados más adelante, y de hecho, remplazar la palabra *fuertemente* por *débilmente* en la hipótesis (i), para lo que estamos obligados a fortalecer la hipótesis (ii) del teorema antes dado, o bien, a debilitar la conclusión.

Antes de presentar los tres teoremas de cubierta, introducimos una serie de definiciones y lemas.

Definición auxiliar 1. Mediante $\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ *denotamos al sistema de los números cardinales* $\mathfrak{n}$ *que satisfacen la siguiente condición: si* N *es un conjunto de cardinalidad* $\mathfrak{n}$ *y* $\mathbf{S}$ *un sistema de conjuntos tal que*

[1] Subsiste una estrecha relación entre las nociones recién definidas y las de número cardinal inaccesible en sentido amplio y estricto, que se discuten en mi trabajo *Über unerreichbare Kardinalzahlen*, este volumen, pág. 68 y siguientes. En efecto, un número $\mathfrak{n}$ es accesible fuertemente, respectivamente débilmente, por el número dado $\mathfrak{m}$, si y sólo si no existe un número cardinal inaccesible en sentido amplio, respectivamente estricto, que sea $> \mathfrak{m}$ y $\leq \mathfrak{n}$.

[2] Con $Pt(N)$ denotamos el conjunto potencia de N, es decir el sistema de subconjuntos del conjunto N.

(i) el sistema $Pt(N) - \mathbf{S}$ no contiene ninguna pareja de conjuntos no vacíos ajenos,

(ii) $N \subset \sum_{X \in \mathbf{S}} X$,

entonces existe un sistema $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ de cardinalidad $\leq \mathfrak{m}$, tal que $N \subset \sum_{X \in \mathbf{M}} X$.

Lema 1. Se cumple: $\mathfrak{m} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ para cada número cardinal $\mathfrak{m}$.

Demostración. Sea $|N| = \mathfrak{m}$ y $N \subset \sum_{X \in \mathbf{S}} X$. A cada elemento $n \in N$ asociamos (con ayuda del axioma de elección) un conjunto determinado $F(n)$, para el que $n \in F(n)$ y $F(n) \in \mathbf{S}$, y hacemos[1] $\mathbf{M} = \mathrm{E}_{F(n)}[n \in N]$.

Claramente se cumple $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ y $N \subset \sum_{X \in \mathbf{M}} X$. El conjunto N se aplica sobre el sistema $\mathbf{M}$ en forma unívoca mediante la función F; según un teorema bien conocido (que en las observaciones presentes se utilizará con frecuencia[2] ocurre $|\mathbf{M}| \leq |N| = \mathfrak{m}$. De acuerdo con la definición auxiliar 1, se concluye que $\mathfrak{m} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, l.q.q.d.

Lema 2. Si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ y $\mathfrak{p} \geq \mathfrak{q}$, entonces $\mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$.

Demostración. Sea $|N| = \mathfrak{q}$; $\mathbf{S}$ es un sistema de conjuntos que satiaface las condiciones (i) y (ii) de la defınción auxiliar 1. Ya que $\mathfrak{p} \geq \mathfrak{q}$, claramente existe un conjunto $N' \supset N$ de cardinalidad $|N'| = \mathfrak{p}$. Hacemos

$$\mathbf{S}' = \mathop{\mathrm{E}}_{X+Y}[X \in \mathbf{S} \text{ y } Y \subset N' - N] + Pt(N' - N). \tag{1}$$

Como es fácil de ver, no existen dos conjuntos no vacíos ajenos Z_1, Z_2 que pertenezcan al sistema $Pt(N') - \mathbf{S}'$, pues de lo contrario $X_1 = Z_1 \cdot N$ y $X_2 = Z_2 \cdot N$ serían dos conjuntos no vacíos ajenos que estarían en el sistema $Pt(N) - \mathbf{S}$. Por (1) $N' \subset \sum_{Z \in \mathbf{S}'} Z$. Puesto que $|N'| = \mathfrak{p} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, por la definición auxiliar 1 existe un sistema $\mathbf{M}' \subset \mathbf{S}'$ tal que $|\mathbf{M}'| \leq \mathfrak{m}$ y $N' \subset \sum_{Z \in \mathbf{M}'} Z$. De (1) se sigue que a cada conjunto $Z \in \mathbf{M}'$ (y en general, a cada conjunto $Z \in \mathbf{S}'$), que no este contenido en $N' - N$, se le asocia un conjunto $Z^* \in \mathbf{S}$ de tal forma que $Z - (N' - N) \subset Z^*$. Ahora ponemos:

$$\mathbf{M} = \mathop{\mathrm{E}}_{Z^*}[Z \in \mathbf{M}' \text{ y } Z - (N' - N) \neq 0],$$

entonces se puede mostrar sin dificultad que $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$, $|\mathbf{M}| \leq |\mathbf{M}'| \leq \mathfrak{m}$ y

$$N = N' - (N' - N) \subset \sum_{Z \in \mathbf{M}'} Z - (N' - N) \subset \sum_{X \in \mathbf{M}} X.$$

En consonancia con la definición auxiliar 1, se ha demostrado que $|N| = \mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, l.q.q.d.

Lema 3. Sea $\mathfrak{p} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$; sean N un conjunto y $\mathbf{S}$ un sistema de conjuntos tales que

[1] Las expresiones símbolicas de la forma $\mathrm{E}_{f(x)}[\varphi(x)]$ denotan al conjunto de los valores de la función f que corresponden a aquel argumento x que satisfacen la condición $\varphi(x)$.

[2] Véase, por ejemplo, mi trabajo *Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires*, Fund. Math. **16**(1930), pág. 197 y siguiente (lema 11a).

(i) $Pt(N) - \mathbf{S}$ no contiene como elementos dos conjuntos no vacíos ajenos.

Entonces, si existe un sistema $\mathbf{P} \subset \mathbf{S}$ de cardinalidad $\leq \mathfrak{p}$ tal que $N \subset \sum_{X\in\mathbf{P}} X$, debe existir un sistema $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ de cardinalidad $\leq \mathfrak{m}$ con $N \subset \sum_{X\in\mathbf{M}} X$.

Demostración.[1] Con ayuda del principio del buen orden ponemos al sistema $\mathbf{P}$ como una sucesión transfinita $X_0, X_1, \ldots, X_\xi, \ldots$ de tipo α y denotamos mediante $\mathbf{P}'$ al sistema que consiste en los conjuntos no vacíos de la forma $N \cdot \left(X_\xi - \sum_{\eta<\xi} X_\eta\right)$, $0 \leq \xi < \alpha$. Como se constata fácilmente, $\mathbf{P}'$ es un sistema de conjuntos ajenos y se cumple:

$$N = N \cdot \sum_{X\in\mathbf{P}} X = \sum_{X\in\mathbf{P}'} X, \tag{1}$$

$$|\mathbf{P}'| = \mathfrak{p}' \leq |\mathbf{P}| \leq \mathfrak{p}. \tag{2}$$

Ya que por la hipótesis del lema 3 $\mathfrak{p} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, de (2) se logra, por los lemas 2 y 3, que

$$|\mathbf{P}'| = \mathfrak{p}' \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m}). \tag{3}$$

Sea $\mathcal{S}$ el sistema de sistemas de conjuntos $\mathbf{T} \subset \mathbf{P}'$ que satisfacen la siguiente condición: existe un conjunto $Z \in \mathbf{S}$ tal que $\sum_{X\in\mathbf{T}} X \subset Z$. Supongamos que $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son dos subsistemas de $\mathbf{P}'$ ajenos que no pertenecen a $\mathcal{S}$. Ya que $\mathbf{P}'$ consiste en subconjuntos no vacíos de N , entonces $Y_1 = \sum_{X\in\mathbf{T}_1} X$ y $Y_2 = \sum_{X\in\mathbf{T}_2} Z$ también son subconjuntos no vacíos de N ajenos. De la definición de $\mathcal{S}$ se sigue además, que Y_1 y Y_2 no pertenecen a $\mathbf{S}$ (de hecho, no están contenidos en ningún conjunto $Z \in \mathbf{S}$). Por consiguiente, el sistema $Pt(N) - \mathbf{S}$ contiene dos conjuntos ajenos no vacíos Y_1, Y_2 como elementos, lo que contradice las hipótesis del lema a demostrar. Con ello se contradice nuesta hipótesis y se demuestra lo siguiente:

(4) si $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son dos subsistemas de $\mathbf{P}'$ no vacíos y ajenos, al menos uno de ellos debe pertenecer al sistema $\mathcal{S}$,

Ya que $\mathbf{P}$ consta de los conjuntos X_ξ y $\mathbf{P}'$ de los conjuntos $N \cdot (X_\xi - \sum_{\eta<\xi} X_\eta)$, cada conjunto de $\mathbf{P}'$ está contenido en un conjunto de $\mathbf{P}$, y de aquí, en un conjunto de $\mathbf{S}$. Así, si un conjunto Y pertenece a $\mathbf{P}'$, entonces el sistema[2] $\mathbf{T} = \{Y\}$ pertenece a $\mathcal{S}$ (porque existe un conjunto $Z \in \mathbf{S}$ tal que $\sum_{X\in\mathbf{T}} X = Y \subset Z$). De esto se sigue que

$$\mathbf{P}' \subset \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{S}} \mathbf{T}. \tag{5}$$

Ahora apelamos a la definición auxiliar 1, donde remplazamos $N, \mathfrak{n}$ y $\mathbf{S}$ por $\mathbf{P}', p'$ y $\mathcal{S}$, respectivamente; de (3)-(5) se logra la existencia de un sistema $\mathcal{M}$ tal que

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{S}, \quad |\mathcal{M}| \leq \mathfrak{m} \quad \text{y} \quad \mathbf{P}' \subset \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{M}} \mathbf{T}. \tag{6}$$

[1]Las demostraciones de los lemas 3 y 5 son, en general, análogas a la de W. Siepiński, loc. cit. La idea básica de la demostración del lema 3 se debe a S. Banach; véase S. Banach Über additive Maßfunktiones in abstrakten Mengen, Fund. Math. **15**(1930), pág. 97 y siguientes, en particular pág. 100 y siguiente.

[2]Con el símbolo "$\{Y\}$" denotamos al conjunto que consiste exclusivamente en el elemento Y.

Por la defınción de $\mathcal{S}$ y con ayuda del axioma de elección se puede asociar a cada sistema $\mathbf{T}$ que pertenezca a $\mathcal{S}$, en particular a $\mathcal{M}$, un conjunto $F(\mathbf{T})$ de tal suerte que

$$F(\mathbf{T}) \in \mathbf{S} \quad y \quad \sum_{X \in \mathbf{T}} X \subset F(\mathbf{T}) \text{ para cada } \mathbf{T} \in \mathcal{S}. \tag{7}$$

Hacemos:

$$\mathbf{M} = \underset{F(\mathbf{T})}{\mathrm{E}}[\mathbf{T} \in \mathcal{M}]. \tag{8}$$

(6)-(8) propician fácilmente: $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$, $|\mathbf{M}| \leq |\mathcal{M}| \leq \mathfrak{m}$ y $\sum_{X\in\mathbf{P}'} X \subset \sum_{X\in\mathbf{M}} X$; considerando (1) se obtiene la última fórmula: $N \subset \sum_{X\in\mathbf{M}} X$. Con esto el sistema $\mathbf{M}$ adquiere las propiedades requeridas y concluye la demostración.

Observación. El lema 3 sigue siendo válido cuando tanto en la definición auxiliar 1 como en el lema se generaliza la condición (i) como sigue:

(i') *cada sistema $\mathbf{T} \subset Pt(N) - \mathbf{S}$ de conjuntos ajenos entre sí, respectivamente no vacíos, tiene cardinalidad $< \mathfrak{q}$.*

(donde $\mathfrak{q}$ es un número cardinal arbitrario dado).

La demostración del lema no requiere ninguna modificación esencial.

Lema 4. Si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ y $\mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$, entonces $\mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$.

Demostración. Sea N un conjunto de cardinalidad $\mathfrak{q}$ y $\mathbf{S}$ un sistema de conjuntos que satisface las condiciones (i)-(ii) de la defınción auxiliar 1. Ya que $\mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$, por la defınción auxiliar 1 existe un sistema $\mathbf{P} \subset \mathbf{S}$ con $|\mathbf{P}| \leq \mathfrak{p}$ y $N \subset \sum_{X\in\mathbf{P}} X$. Dado que además, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, por el lema 3 se deduce la existencia de un sistema $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$, que cumple las fórmulas $|\mathbf{M}| \leq \mathfrak{m}$ y $N \subset \sum_{X\in\mathbf{M}} X$. Empleamos por segunda ocasión la defınción auxiliar 1 para inferir que $\mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, l.q.q.d.

Lema 5. Si $|P| = \mathfrak{p} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ y a cada elemeto $p \in P$ se asocia un número cardinal $\mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, entonces $\sum_{p\in P} \mathfrak{q}_p \in \mathfrak{Q}(2 \cdot \mathfrak{m})$. Si además, $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, entonces $\sum_{p\in P} \mathfrak{q}_p \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$.

Demostración. Consideramos un conjunto N de cardinalidad $\sum_{p\in P} \mathfrak{q}_p$ y un sistema de conjuntos $\mathbf{S}$, que satisface las condiciones (i) y (ii) de la defınción auxiliar 1. Ya que $|N| = \sum_{p\in P} \mathfrak{q}_p$, se puede descomponer N en conjuntos ajenos entre sí de tal suerte que $N = \sum_{p\in P} \mathfrak{Q}_p$ y $|\mathfrak{Q}_p| = \mathfrak{q}_p$ para cada $p \in P$. Entre los sumandos $\mathfrak{Q}_p$ surge a lo sumo un conjunto no vacío que no pertenece a $\mathbf{S}$, digamos el conjunto $\mathfrak{Q}_{p_0}$. Hacemos

$$\mathbf{P}_1 = \underset{\mathfrak{Q}_p}{\mathrm{E}}[p \in P \text{ y } \mathfrak{Q}_p \neq \mathfrak{Q}_{p_0}].$$

Es claro que: $\mathbf{P}' \subset \mathbf{S}$, $|\mathbf{P}'| \leq \mathfrak{p}$ y $N - \mathfrak{Q}_{p_0} \subset \sum_{X\in\mathbf{P}'} X$; ya que $\mathfrak{p} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, por el lema 3 existe un sistema de conjuntos $\mathbf{M}_1$ tal que

$$\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{S}, \quad |\mathbf{M}_1| \leq \mathfrak{m} \quad y \quad N - \mathfrak{Q}_{p_0} \subset \sum_{X\in\mathbf{M}_1} X. \tag{1}$$

Por otro lado $|\mathfrak{Q}_{p_0}| = \mathfrak{q}_{p_0} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ y $\mathfrak{Q}_{p_0} \subset \sum_{X \in \mathbf{S}} X$; de acuerdo con la definición auxiliar 1 (para $N = \mathfrak{Q}_{p_0}$ y $\mathfrak{n} = \mathfrak{q}_{p_0}$) disponemos de un sistema $\mathbf{M}_2$ con las siguientes propiedades

$$\mathbf{M}_2 \subset \mathbf{S}, \quad |\mathbf{M}_2| \leq \mathfrak{m} \quad \text{y} \quad \mathfrak{Q}_{p_0} \subset \sum_{X \in \mathbf{M}_2} X. \tag{2}$$

Hacemos: $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$, de (1) y (2) logramos: $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$, $|\mathbf{M}| \leq 2 \cdot \mathfrak{m}$ y $N \subset \sum_{X \in \mathbf{M}} X$ (en el caso en que todos los conjuntos $\mathfrak{Q}_p$, $p \in P$ pertenecen a $\mathbf{S}$, se deduce la existencia de un sistema $\mathbf{M}$ de estas características directamente del lema 3). En consonancia con la defínción auxiliar 1 (para $\mathfrak{n} = \sum_{p \in P} \mathfrak{q}_p$) se deduce de inmediato que $\sum_{p \in P} \mathfrak{q}_p \in \mathfrak{Q}(2 \cdot \mathfrak{m})$; si ahí $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, es sabido que $2 \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, por lo quye $\sum_{p \in P} \mathfrak{q}_p \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, l.q.q.d.

Lema 6. Si P es un conjunto de cardinalidad $\mathfrak{p}$ y N un conjunto de cardinalidad $2^{\mathfrak{p}}$, entonces a cada elemento $p \in P$ se le puede asociar dos conjuntos no vacíos ajenos $N_{p,0}$ y $N_{p,1}$ de tal suerte que:

(i) $N_{p,0} + N_{p,1} = N$ para cada $p \in P$,

(ii) para toda función f cuyo dominio sea P y rango consista en dos números 0 y 1 o de sólo uno de esos números, la intersección $\Pi_{p \in P} N_{p,f(p)}$ consta de a lo sumo un elemento.

Demostración. Primero notemos que el sistema de conjuntos $Pt(P)$ tiene la misma cardinalidad que el conjunto N, a saber, $2^{\mathfrak{p}}$; por tanto, existe una función g que aplica este sistema en forma unívoca sobre el conjunto N. Hacemos:

(1) $N_{p,0} = \mathrm{E}_{g(x)}[p \in X \text{ y } X \subset P]$ y $N_{p,1} = \mathrm{E}_{g(x)}[p \notin X \text{ y } X \subset P]$ para cada $p \in P$.

De esto se deduce de inmediato:

(2) $N_{p,0} \neq 0$, $N_{p,1} \neq 0$, $N_{p,0} \cdot N_{p,1} = 0$ y $N_{p,0} + N_{p,1} = N$ para cada $p \in P$.

Consideremos una función arbitraria f con dominio P y rango consistente en a lo sumo dos números 0 y 1. Supongamos que

(3) la intersección $\Pi_{p \in P} N_{p,f(p)}$ contiene dos elementos distintos $n_1 \neq n_2$.

Por (2) y (3) n_1, n_2 son elementos de N. Por consiguiente, existen dos conjuntos X_1, X_2 tales que

(4) $X_1 \subset P$, $X_2 \subset P$, $g(X_1) = n_1$ y $g(X_2) = n_2$.

En vista de la inyectividad de la función g los conjuntos X_1 y X_2 deben ser diferentes. Alguna de las diferencias $X_1 - X_2$ y $X_2 - X_1$, no es vacía, digamos $X_1 - X_2$. Sea

$$p' \in X_1 - X_2, \tag{5}$$

(es decir, $p' \in X_1$ y $p' \notin X_2$). De (1), (4) y (5) se deduce que

$$n_1 \in N_{p',0} \quad \text{y} \quad n_2 \in N_{p',1}. \tag{6}$$

Más aún, de (3) se infiere que n_1 y n_2 pertenecen a $N_{p',f(p')}$. Aquí, $f(p') = 0$ o $= 1$, entonces los elementos n_1 y n_2 pertenecen ambos a $N_{p',0}$ o ambos a $N_{p',1}$. Por (6) inferimos que los conjuntos $N_{p',0}$ y $N_{p',1}$ no son ajenos, lo que se opone a (2).

Con ello se contradice la suposición (3), y se cumple

(7) para cada función f con dominio P y rango consistente en a lo sumo 0 y 1, la intersección $\Pi_{p\in P} N_{p,f(p)}$ contiene a lo sumo un elemento.

Considerando (2) y (7), el lema 6 queda demostrado.

Lema[1] *7. Se cumple* $2^{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{p}+1)$ *para cada número cardinal* $\mathfrak{p}$*, en particular,* $2^{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$ *para* $\mathfrak{p} \geq \aleph_0$.

Demostración. Sea $|N| = 2^{\mathfrak{p}}$; sea $\mathbf{S}$ un sistema de conjuntos que satisface las condiciones (i) y (ii) de la definición auxiliar 1.

A cada elemento $p \in P$ le asociamos dos conjuntos $N_{p,0}$ y $N_{p,1}$ que satisfacen las condiciones (i), (ii) dadas en el enunciado del lema 6. Puesto que $N_{p,0}$ y $N_{p,1}$ son subconjuntos no vacíos de N ajenos, alguno de ellos debe pertenecer a $\mathbf{S}$. Definimos una función f de la siguiente manera: si $p \in P$, prescribimos $f(p) = 0$ o $= 1$ dependiendo de si $N_{p,1}$ pertenece a $\mathbf{S}$ o no. De esto se sigue que

$$N_{p,1-f(p)} \in \mathbf{S} \qquad \text{para cada } p \in P. \tag{1}$$

En virtud de que la condición (i) del lema 6 implica $N_{p,1-f(p)} + N_{p,f(p)} = N$ para cada $p \in P$, logramos lo siguiente por las reglas del cálculo de conjuntos:

$$N = \sum_{p\in P} N_{p,1-f(p)} + \prod_{p\in P} N_{p,f(p)}. \tag{2}$$

De acuerdo con la condición (ii) del lema 6, la intersección $\Pi_{p\in P} N_{p,f(p)}$ tiene a lo sumo un elemento; ya que $N \subset \sum_{X\in\mathbf{S}} X$, se deduce la existencia de un conjunto X_0 tal que

$$X_0 \in \mathbf{S} \quad \text{y} \quad \prod N_{p,f(p)} \subset X_0. \tag{3}$$

Las fórmulas (2) y (3) dan lugar a:

$$N \subset \sum_{p\in P} N_{p,1-f(p)} + X_0. \tag{4}$$

Denotamos con $\mathbf{M}$ al sistema de conjuntos que consta de los conjuntos $N_{p,1-f(p)}$ y X_0; por (1), (3) y (4) logramos: $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$, $|\mathbf{M}| \leq \mathfrak{p}+1$ y $N \subset \sum_{X\in\mathbf{M}} X$. Mediante una aplicación de la defnción auxiliar 1 (para $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}+1$ y $\mathfrak{n} = 2^{\mathfrak{p}}$) concluimos que $2^{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{p}+1)$. Si $\mathfrak{p} \geq \aleph_0$ y por tanto $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}+1$, tenemos finalmente: $2^{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{p})$ l.q.q.d.

Lema 8. Si $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$ *y* $\mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$*, entonces* $\mathfrak{p}^{\mathfrak{q}} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$.

Demostración. Si $\mathfrak{p}^{\mathfrak{q}} < \aleph_0$, entonces $\mathfrak{m} > \mathfrak{p}^{\mathfrak{q}}$, por los lemas 1 y 2, $\mathfrak{p}^{\mathfrak{q}} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$. Pero si $\mathfrak{p}^{\mathfrak{q}} \geq \aleph_0$, también $\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} \geq \aleph_0$; de esto se sigue, como es sabido, que $\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ o $= \mathfrak{q}$, por lo que según las

[1]Este lema (con otra redacción) fue demostrado antes en forma independiente por S. Ulam y el autor; véase S. Ulam op. cit., pág. 146 (teorema 1 y nota 1.)

suposiciones del lema 8, $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$. De acuerdo con el lema 7 se cumple además: $2^{\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q})$, ya que $\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} + 1 = \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}$; aplicando el lema 4 obtenemos: $2^{\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$. Finalmente $2^{\mathfrak{p}} > \mathfrak{p}$, por lo que $2^{\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}} = (2^{\mathfrak{p}})^{\mathfrak{q}} \geq \mathfrak{p}^{\mathfrak{q}}$; por el lema 2 se deduce otra vez: $p^{\mathfrak{q}} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, l.q.q.d.

Lema 9. Si $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ *y el número cardinal* $\mathfrak{n}$ *es accesible débilmente por* $\mathfrak{m}$*, entonces* $\mathfrak{n} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$*.*

Demostración. Basta observar que el sistema $\mathfrak{K} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, satisface las condiciones de la definición 2, según los lemas 1,2, 5 y 8, por lo que que cualquier número cardinal accesible debilemnte por $\mathfrak{m}$ pertenece a este sistema.

Observación. Los lemas 8, y 9 se pueden extender a conjuntos finitos, si se remplaza en su enunciado "$\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$" por "$\mathfrak{Q}(\mathfrak{m}+1)$". La prueba para números cardinales finitos se basa en los lemas 2,4 y 7.

Lema[1] *10. Sean* $\mathfrak{m}$ *y* $\mathfrak{q}$ *dos números cardinales,* N *un conjunto y* $\mathbf{S}$ *un sistema de conjuntos que satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) $\mathfrak{m} \geq \sum_{\mathfrak{p}<\mathfrak{q}} 2^{\mathfrak{p}}$ *y* $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$*;*

(ii) cada sistema $\mathbf{T} \subset Pt(N) - \mathbf{S}$ *de conjuntos no vacíos ajenos entre sí tiene cardinalidad* $< \mathfrak{q}$*;*

(iii) $N \subset \sum_{X\in\mathbf{S}} X$*;*

(iv) si $Y \subset N$ *y* $Y \not\subseteq \sum_{X\in\mathbf{M}} X$ *para cada sistema* $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ *de cardinalidad* $\leq \mathfrak{m}$*, entonces existe un conjunto* $Z \subset Y$ *tal que* $Z \not\subseteq \sum_{X\in\mathbf{S}} X$ *y* $Y - Z \not\subseteq \sum_{X\in\mathbf{M}} X$ *para todo sistema* $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ *de cardinalidad* $\leq \mathfrak{m}$*.*

Con estas hipótesis existe un sistema $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ *de cardinalidad* $\leq \mathfrak{m}$ *tal que* $N \subset \sum_{X\in\mathbf{M}} X$*.*

Demostración. Denotamos con $\mathbf{I}$ al sistema de conjuntos Y que satisfacen la siguiente condición: existe un sistema $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ tal que $|\mathbf{M}| \leq \mathfrak{m}$ y $Y \subset \sum_{X\in\mathbf{M}} X$. De esta definición se sigue fácilmente la siguiente propiedad del sistema $\mathbf{I}$:

$$0 \in \mathbf{I} \quad \text{y} \quad \mathbf{S} \subset \mathbf{I} \tag{1}$$

$$\text{si} \quad Y \in \mathbf{I} \text{ y } Z \subset Y, \text{ también } Z \in \mathbf{I}; \tag{2}$$

$$\text{si} \quad \mathbf{M}' \subset \mathbf{I} \text{ y } \quad |\mathbf{M}'| \leq \mathfrak{m}, \text{ también } \sum_{Y\in\mathbf{M}'} Y \in \mathbf{I}. \tag{3}$$

Por ejemplo, comprobemos (3). A cada conjunto $Y \in \mathbf{I}$, en particular a cada conjunto $Y \in \mathbf{M}'$ corresponde, por definición, un sistema $\mathbf{M}_\gamma \subset \mathbf{S}$ tal que $|\mathbf{M}_\gamma| \leq \mathfrak{m}$ y $Y \subset \sum_{X\in\mathbf{M}_\gamma} X$. Sea $\mathbf{M} =$

[1]Los lemas 10 y 11 están relacionados con ciertos resultados de S. Ulam, l. cit., pág. 147 y siguientes (teoremas 2 y 3), pero son de naturaleza más general.

$\sum_{Y\in \mathbf{M}Ât} \mathbf{M}_\gamma$. Entonces se cumple $\mathbf{M}' \subset \mathbf{S}$, $|\mathbf{M}| \leq \mathfrak{m}\cdot|\mathbf{M}'| \leq \mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ (ya que $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$) y

$$\sum_{Y\in\mathbf{M}'} Y \subset \sum_{Y\in\mathbf{M}'}\left(\sum_{X\in\mathbf{M}_Y} X\right) = \sum_{X\in\mathbf{M}} X,$$

de donde, en consonancia con la definición de $\mathbf{I}$, $\sum_{Y\in\mathbf{M}'} Y \in \mathbf{I}$.

Por la hipótesis (iv) se puede asociar (con ayuda del axioma de elección) a cada conjunto $Y \subset N$ un conjunto $F(Y)$ que satisface la condición:

$$F(Y) \subset Y \text{ para cada } Y \subset N; \tag{4}$$

(5) Si $Y \subset N$ y $Y \notin \mathbf{I}$, entonces no ocurre $F(Y) \in \mathbf{I}$ ni $Y - F(Y) \in \mathbf{I}$ [si $Y \subset N$ y $Y \in \mathbf{I}$, se puede hacer simplemente $F(Y) = Y$].

Sea α un número ordinal arbitrario. Con Φ_α denotamos al sistema de funciones φ con dominio $\mathrm{E}_\xi[\xi < \alpha]$ y sólo toma como valores 0 y 1, respectivamente sólo uno de ellos (es decir, el sistema de sucesiones de tipo α, cuyos miembros son 0 o 1). Si $\varphi \in \Phi_\alpha$ y $\beta \leq \alpha$, entonces $\varphi^{(\beta)}$ es aquella función $\varphi' \in \Phi_\beta$ determinada por la fórmula: $\varphi'(\xi) = \varphi(\xi)$ para cada $\xi < \beta$ (la sucesión $\varphi^{(\beta)}$ es una sección de la sucesión φ o es idéntica con φ). Por recursión asociamos a cada función $\varphi \in \Phi_\alpha$ (α un número ordinal arbitrario) un conjunto definido X_φ; de hecho hacemos:

$$X_\varphi = N \quad \text{para} \quad \varphi \in \Phi_0 \tag{6}$$

[el sistema Φ_0 consiste evidentemente en una sola función φ, a saber, la función "vacía"];

(7) si $\varphi \in \Phi_{\alpha+1}$, entonces $X_\varphi = F(X_{\varphi^{(\alpha)}})$ o $= X_{\varphi^{(\alpha)}} - F(X_{\varphi^{(\alpha)}})$, dependiendo de si $\varphi(\alpha) = 0$ o $= 1$;

(8) si α es un número límite, entonces $X_\varphi = \Pi_{\xi<ga} X_{\varphi^{(\xi)}}$.

Mediante una sencilla inducción se logra de esto:

(9) si α es un número ordinal arbitrario y $\varphi \in \Phi_\alpha$, entonces $X_\varphi \subset X_{\varphi^{(0)}} = N$; en general, si $\alpha \geq \beta$, entonces $X_\varphi \subset X_{\varphi^{(\beta)}}$.

Además, se cumple

(10) si $\alpha \geq \beta$, $\varphi \in \Phi_\alpha$, $\psi \in \Phi_\beta$ y $\varphi^{(\beta)} \neq \psi$, entonces $X_\varphi \cdot X_\psi = 0$.

Para probar esto, denotemos con γ le menor ordinal γ tal que $\varphi(\gamma) \neq \psi(\gamma)$. Así, $\varphi(\xi) = \psi(\xi)$ para $\xi < \gamma$, por lo que $\varphi^{(\gamma)} = \psi^{(\gamma)}$; ya que $\varphi^{(\beta)} \neq \psi = \psi^{(\beta)}$, debe ocurrir $\beta > \gamma$ y $\alpha \geq \beta \geq \gamma + 1$. Más aún, $\varphi(\gamma) = 0$ y $\psi(\gamma) = 1$ o viceversa. En el primer caso de (7) obtenemos:

$$X_{\varphi^{(\gamma+1)}} = F(X_{\varphi^{(\gamma)}}) \quad \text{y} \quad X_{\psi^{(\gamma+1)}} = X_{\psi^{(\gamma)}} - F(X_{\psi^{(\gamma)}}),$$

pero en el segundo $X_{\varphi^{(\gamma+1)}} = X_{\varphi^{(\gamma)}} - F(X_{\varphi^{(\gamma)}})$ y $X_{\psi^{(\gamma+1)}} = F(X_{\varphi^{(\gamma)}})$; de donde se sigue: $X_{\varphi^{(\gamma)}} = X_{\varphi^{(\gamma)}}$, por lo que en ambos casos: $X_{\varphi^{(\gamma+1)}} \cdot X_{\varphi^{(\gamma+1)}} = 0$. Por (9) se cumple, por otro lado: $X_\varphi \subset X_{\varphi^{(\gamma+1)}}$ y $X_\psi \subset X_{\psi^{(\gamma+1)}}$ de tal suerte que $X_\varphi \cdot X_\psi = 0$.

Ahora queremos corroborar (mediante recursión transfinita) que se cumple la siguiente fórmula para cada número ordinal:

$$N = \sum_{\varphi\in\Phi_\alpha} X_\varphi. \tag{11}$$

Considerando (6), de hecho se cumple (11) para $\alpha = 0$. Además, cuando esta fórmula es satisfecha por algún número α, se cumple también para el número $\alpha + 1$, pues por (7), la suma $\sum_{\varphi\in\Phi_{\alpha+1}} X_\varphi$ se puede obtener de la suma $\sum_{\varphi\in\Phi_\alpha} X_\varphi$ mediante la sustitución de cada sumando X_φ de la última suma por dos sumandos $X_\psi = F(X_\varphi)$ y $X_\chi = X_\varphi - F(X_\varphi)$, donde, consdierando (7) y (12), $F(X_\varphi) \subset X_\varphi$, por lo que $X_\varphi = X_\psi + X_\chi$. Finalmente, si α es límite y se cumple (11) para cada número $\xi < \alpha$, se obtiene:

$$N = \prod_{\xi<\alpha} \sum_{\varphi\in\Phi_\xi} X_\varphi,$$

de donde, por la ley distributiva general:

$$N = \sum_{\sigma} \prod_{\xi<\sigma} X_{\delta_\xi}; \tag{12}$$

La suma se extiende aquí a toda sucesión σ de tipo α, cuyos miembros son de la forma $\sigma_\xi \in \Phi_\xi$. Entre los sumano de (12) aparecen, en particular, las intersecciones de la forma $\Pi_{\xi<\alpha} X_{\varphi(\xi)}$, donde φ es una función arbitraria del sistema Φ_α; en vista de (10) se puede deducir fácilmente, que todas las intersecciones restantes son vacías, por lo que se pueden eliminar, y la fórmula (12) se reduce a

$$N = \sum_{\psi\in\Phi_\alpha} \prod_{\xi<\alpha} X_{\varphi(\xi)};$$

por (8) se transforma esta fórmula en (11). Por consiguiente, (11) se cumple para cada número ordinal α.

Sea ρ el menor ordinal que satisface la fórmula:

$$\overline{\rho} = |\underset{\xi}{E}[\xi < \rho]| = \mathfrak{q}; \tag{13}$$

ρ es finito o un número inicial y ocurre:

$$\overline{\xi} < \mathfrak{q} \quad \text{para cada} \quad \xi < \rho \tag{14}$$

[la existencia de un número ρ con esta característica se obtienen, como es sabido, del prinipio del buen orden].

Hacemos:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{I} \cdot \underset{x_\varphi}{E}\left[\varphi \in \sum_{\xi<\rho} \Phi_\xi\right] \tag{15}$$

y evaluamos la cardinalidad del sistema de conjuntos así definido $\mathbf{M}'$. De (15) se sigue de inmediato que

$$|\mathbf{M}'| \leq |\underset{X_\varphi}{E}[\varphi \in \sum_{\xi<\rho} \Phi_\xi]| \leq |\sum_{\xi<\rho} \Phi_\xi| \leq \sum_{\xi<\rho} |\Phi_\xi|;$$

y de esto deducimos por la definición de Φ_ξ que $|\Phi_\xi| = 2^{\overline{\xi}}$ para cada número ξ, por lo que

$$|\mathbf{M}'| \leq \sum_{\xi<\rho} 2^{\overline{\xi}} \tag{16}$$

Por (14) $2^{\overline{\xi}} \leq \sum_{\mathfrak{p}<\mathfrak{q}} 2^{\mathfrak{p}}$ para cada $\xi < \rho$; también es conocido que, considerando (13), $|\mathrm{E}_{\xi}[\xi < \rho]| = \mathfrak{q} \leq \sum_{\mathfrak{p}<\mathfrak{q}} 2^{\mathfrak{p}}$. Por la suposición (i):

$$\sum_{\xi<\rho} 2^{\overline{\xi}} \leq \sum_{\mathfrak{p}<\mathfrak{q}} 2^{\mathfrak{p}} \cdot \sum_{\mathfrak{p}<\mathfrak{q}} 2^{\mathfrak{p}} \leq \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m};$$

esta fórmula junto con (16) da lugar a:

$$|\mathbf{M}'| \leq \mathfrak{m}. \tag{17}$$

Por (3), de (15) y (17) de infiere:

$$\sum_{Y \in \mathbf{M}'} Y \in \mathbf{I}. \tag{18}$$

Consideremos una función arbitraria $\varphi \in \Phi_{\rho}$ y nos preguntamos si es posible que ningún conjunto $X_{\varphi(\xi)}$, $\xi < \rho$, pertenezca a $\mathbf{I}$. Para responder esta pregunta, determinemos, para cada $\xi < \rho$, una función $\psi_{\xi} \in \Phi_{\xi+1}$ mediante la siguiente fórmula:

$$\psi_{\xi}(\eta) = \varphi(\eta) \quad \text{para} \quad \eta < \xi; \quad \psi_{\xi}(\xi) = 1 - \varphi(\xi).$$

De (9) y (10) deducimos fácilmente que los conjuntos $X_{\psi_{\xi}}$ están contenidos en N y son ajenos entre sí. De (7) se obtiene que $X_{\psi_{\xi}} = F(X_{\varphi(\xi)})$ o $= X_{\varphi(\xi)} - F(X_{\varphi(\xi)})$. Así que si $X_{\varphi(\xi)} \notin \mathbf{I}$, por (5) $X_{\psi_{\xi}} \notin \mathbf{I}$, y por consiguiente, según (1) $X_{\psi_{\xi}} \neq 0$ y $X_{\psi_{\xi}} \notin \mathbf{S}$. En consecuencia, si ningún conjunto $X_{\varphi(\xi)}$ perteneciese al sistema $\mathbf{I}$, el sistema $\mathbf{T} = \mathrm{E}_{X_{\psi_{\xi}}}[\xi < \rho]$ consistiría en subconjuntos de N no vacíos y ajenos entre sí, que no pertenecen a $\mathbf{S}$; tomando en cuenta (13), $\mathbf{T}$ tendría cardinalidad $\mathfrak{q}$, lo que contradice la hipótesis (ii).

Con ello hemos comprobado que a cada función $\varphi \in \Phi_{\rho}$ le corresponde aun número $\xi < \rho$, tal que $X_{\varphi(\xi)} \in \mathbf{I}$. Por (9) y (15) se deduce lo siguiente: a cada función $\varphi \in \Phi_{\rho}$ existe un conjunto $Y \in \mathbf{M}'$ tal que $X_{\varphi} \subset Y$. Por (11) $N = \sum_{\varphi \in \Phi_{\rho}} X_{\varphi}$, se cumple además:

$$N \subset \sum_{Y \in \mathbf{M}'} Y. \tag{19}$$

(2), (18) y (19) dan lugar a: $N \in \mathbf{I}$. En consonancia con la definición de $\mathbf{I}$, se deduce inmediatamente del enunciado del lema a demostrar: existe un sistema $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ con $|\mathbf{M}| \leq \mathfrak{m}$ y $N \subset \sum_{X \in \mathbf{M}} X$.

Lema 11. Si se satisfacen las hipótesis (i)-(iii) del lema 10, pero no la conclusión, entonces existe un sistema $\mathbf{S}'$ con las siguientes características:

I el sistema $Pt(N) - \mathbf{S}'$ no contiene ninguna pareja de conjuntos no vacíos ajenos entre sí;

II se cumple $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}'$, por lo que $N \subset \sum_{X \in \mathbf{S}'} X$;

III ocurre $N \not\subseteq \sum_{X \in \mathbf{M}'} X$ para cada sistema $\mathbf{M}' \subset \mathbf{S}'$ de cardinalidad $\leq \mathfrak{m}$.

Demostración. Ya que se cumplen las hipótesis (i)-(iii) del lema 10, pero no así la conclusión, no se puede satisfacer la hipótesis (iv) de ese lema, por lo que existe un conjunto N' con las siguientes propiedades:

$$N' \subset N \quad \text{y} \quad N' \notin \mathbf{I}; \tag{1}$$

$$\text{para cada conjunto } Y \subset N', \text{ ocurrre} Y \in \mathbf{I} \text{ o } N' - Y \in \mathbf{I}. \tag{2}$$

Por consiguiente, **I** tiene mismo significado que en la demostración previa, lo que lo obliga a cumplir las siguientes condiciones:

$$0 \in \mathbf{I} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{S} \subset \mathbf{I}; \tag{3}$$

$$\text{si} \quad Y \in \mathbf{I} \text{ y } Z \subset Y, \text{ entonces } Z \in \mathbf{I}; \tag{4}$$

$$\text{si } \mathbf{M} \subset \mathbf{I} \text{ y } |\mathbf{M}| \leq \mathfrak{m}, \text{ entonces } \sum_{Y \in \mathbf{M}} Y \in \mathbf{I} \tag{5}$$

Hacemos:

$$\mathbf{S}' = \mathop{\mathrm{E}}_{Y}\left[Y \subset \sum_{X \in \mathbf{S}} X \text{ y } N' \cdot Y \in \mathbf{I}\right]. \tag{6}$$

Si Y es un conjunto arbitrario del sistema **S**, es claro que $Y \subset \sum_{X \in \mathbf{S}} X$; ya que $N' \cdot Y \subset Y$, deducimos de inmediato de (3) y (4) que $N' \cdot Y \in \mathbf{I}$. Por (6) y considerando la hipótesis (iii) del lema 10 se cumple:

$$\mathbf{S} \subset \mathbf{S} \quad \text{por tanto} \quad N \subset \sum_{X \in \mathbf{S}'} X. \tag{7}$$

Supongamos que el sistema $Pt(N) - \mathbf{S}'$ contuviese como elementos dos cojuntos no vacíos Y_1 y Y_2 ajenos. Dado que $Y_1 \subset N \subset \sum_{X \in \mathbf{S}} X$, y análogamente $Y_2 \subset \sum_{X \in \mathbf{S}} X$, de (6) se sigue que $N' \cdot Y_1$ y $N' \cdot Y_2$ no pertenecen a **I**. De $N' \cdot Y_1 \notin \mathbf{I}$ y $Y_1 \cdot Y_2 = 0$ se infiere con ayuda de (2) que: $N' - N' \cdot Y_1 = N' - Y_1 \in \mathbf{I}$ y $N' \cdot Y_2 \subset N' - Y_1$, por lo que de (4) obtenemos: $N' \cdot Y_2 \in \mathbf{I}$; con ello hemos dado con una contradicción. Por lo tanto,

(8) el sistema $Pt(N) - \mathbf{S}'$ no contiene como elementos pareja alguna de conjuntos ajenos.

Finalmente supongamos que existiese un sistema $\mathbf{M}' \subset \mathbf{S}'$ tal que $|\mathbf{M}'| \leq \mathfrak{m}$ y $N \subset \sum_{Y \in \mathbf{M}'} Y$, y hagamos: $\mathbf{M} = \mathrm{E}_{N' \cdot Y}[Y \in \mathbf{M}']$. Claramente $|\mathbf{M}'| \leq |\mathbf{M}|$ y según (6) $\mathbf{M} \subset \mathbf{I}$; por (5) ocurre $\sum_{Y \in \mathbf{M}} Y \in \mathbf{I}$.

Ya que además $N' \subset N$, entonces $N' \subset \sum_{Y \in \mathbf{M}'}(N' \cdot Y) = \sum_{Y \in \mathbf{M}} Y$; por (3) se cumple $N' \in \mathbf{I}$, que se opone a la condición (1). Con esto queda refutada nuestra suposición, así que:

(9) no existe un sistema $\mathbf{M}' \subset \mathbf{S}'$ tal que $|\mathbf{M}'| \leq \mathfrak{m}$ y $N \subset \sum_{Y \in \mathbf{M}'} Y$.

Por (7), (8) y (9) el sistema $\mathbf{S}'$ tiene todas las propiedades requeridas.

Lema 12. Sean $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{p}$ dos números cardinales, N un conjunto **S** *un sistema de conjuntos que satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) $\mathfrak{m} \geq \sum_{\mathfrak{p} < \mathfrak{q}} 2^{\mathfrak{p}}$ *y* $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$*;*

(ii) la cardinalidad $|N| = \mathfrak{n}$ *es accesible débilmente por* $\mathfrak{m}$*;*

(iii) cada sistema $\mathbf{T} \subset Pt(N) - \mathbf{S}$ *de conjuntos no vacíos y ajenos entre sí tiene cardinalidad* $< \mathfrak{q}$*;*

(iv) $N \subset \sum_{X \in \mathbf{S}} X$.

Con estas hipótesis existe un sistema $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ *de cardinalidad* $\leq \mathfrak{m}$ *tal que* $N \subset \sum_{X \in \mathbf{M}} X$.

Demostración. Si la afirmación del lema fuese falsa, existiría un sistema $\mathbf{S}'$ que satisface las condiciones (I)-(III) del lema 11; conforme a la definición auxiliar 1 esto significaría que el número cardinal $\mathfrak{n} = |N|$ no pertenece al sistema $\mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$. Puesto que por el lema 9 y por la hipótesis (ii) $\mathfrak{n} \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{m})$, debemos reconocer la afirmación como correcto.

El lema recién formulado es el teorema más general del presente artículo; tiene la esencia (al igual que algunos de los lemas previos) de un teorema de cubierta. Pero ya que su formulación es un tanto complicada, daremos aquí dos casos particulares de este lema como teoremas de cubierta.

Segundo teorema de cubierta. *Sean* $\mathfrak{m}$ *un número cardinal infinito,* N *un conjunto y* $\mathbf{S}$ *un sistema de conjuntos que satisface las siguientes propiedades:*

(i) la cardinalidad $|N| = \mathfrak{n}$ *es accesible débilmente por* $\mathfrak{m}$.

(ii) cada sistema $\mathbf{T} \subset Pt(N) - \mathbf{S}$ *de conjuntos no vacíos ajenos entre sí es finita;*

(iii) $N \subset \sum_{X \in \mathbf{S}} X$.

Con estas hipótesis existe un sistema $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ *de cardinalidad* $\leq \mathfrak{m}$ *tal que* $N \subset \sum_{X \in \mathbf{M}} X$.

Demostración. Basta hacer $\mathfrak{q} = \mathfrak{n}$ en el lema 12 (pues claramente $\sum_{\mathfrak{p} < \aleph_0} 2^{\mathfrak{p}} = \aleph_0$).

Tercer teorema de cubierta. *Sean* $\mathfrak{m}$ *un número cardinal infinito,* N *un conjunto y* $\mathbf{S}$ *un sistema de conjuntos que satisface las siguientes propiedades:*

(i) la cardinalidad $|N| = \mathfrak{n}$ *es accesible débilmente por* $\mathfrak{m}$*;*

(ii) cada sistema $\mathbf{T} \subset Pt(N) - \mathbf{S}$ *de conjuntos no vacíos ajenos entre sí tiene cardinalidad* $\leq \mathfrak{m}$*;*

(iii) $N \subset \sum_{X \in \mathbf{S}} X$.

Con estas hipótesis se garantiza la existencia de un sistema $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ *de cardinalidad* $\leq 2^{\mathfrak{m}}$ *tal que* $N \subset \sum_{X \in \mathbf{M}} X$.

Demostración. Aplicamos de nueva cuenta el lema 12, donde se remplaza $\mathfrak{m}$ por $2^{\mathfrak{m}}$ y denotamos con $\mathfrak{q}$ al menor número cardinal $> \mathfrak{m}$ (claramente se cumple

$$\sum_{\mathfrak{p} < \mathfrak{q}} 2^{\mathfrak{p}} = \sum_{\mathfrak{p} \leq \mathfrak{m}} 2^{\mathfrak{p}} \leq 2^{\mathfrak{m}} \cdot |\underset{\mathfrak{p}}{E}[\mathfrak{p} \leq \mathfrak{m}]| \leq 2^{\mathfrak{m}} \cdot \mathfrak{m} \leq 2^{\mathfrak{m}} \cdot 2^{\mathfrak{m}} = 2^{\mathfrak{m}},$$

y de la definición 2 se infiere que el número $\mathfrak{n}$, que es accesible por $\mathfrak{m}$, con mayor razón es accesible por $2^{\mathfrak{m}}$).

Los tres teoremas de cubiertas recien presentados permiten diversas formulaciones y generalizaciones. Una formulación cercana consiste en que en esos teoremas se elimina la hipótesis (iii), en cambio la afirmación adquiere una forma ligeramente más débil (con esto, la formulación del primer teorema de cubierta se aproxima a la redacción original dada por Sierpiński). De esta forma logramos el siguiente:

Corolario 1. Con las hipótesis (i) y (ii) del primer teorema de cubierta existe un sistema $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ *tal que* $|\mathbf{M}| \leq \mathfrak{m}$ *y* $|N - \sum_{X\in\mathbf{M}} X \leq \mathfrak{m}| \leq \mathfrak{m}$.

Con las hipótesis (i) y (ii) del segundo teorema de cubierta existe un sistema $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ *tal que* $|\mathbf{M}| \leq \mathfrak{m}$ *y* $N - \sum_{X\in\mathbf{M}} X$ *es finito.*

Con las hipótesis (i) y (ii) del tercer teorema de cubierta existe un sistema $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ *tal que* $|\mathbf{M}| \leq 2^{\mathfrak{m}}$ *y* $|N - \sum_{X\in\mathbf{M}} X| \leq \mathfrak{m}$.

Demostración. En virtud de que el razonamiento en cada uno de los tres teoremas de cubierta es el mismo, nos restringiremos aquí al caso del segundo teorema de cubierta.

Sean $\mathfrak{m}$ un número cardinal, N un conjunto y $\mathbf{S}$ un sistema de conjuntos que satisfacen las hipótesis (i) y (ii) de ese teorema. Expandimos $\mathbf{S}$ a un sistema $\mathbf{S}'$ haciendo

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} + \underset{\{x\}}{\mathrm{E}}[x \in].$$

Como es fácil ver, $\mathbf{S}'$ satisface las hipótesis (i)-(iii) del segundo teorema de cubierta; por consiguiente, existe un sistema $\mathbf{M}' \subset \mathbf{S}'$, tal que $|\mathbf{M}'| \leq \mathfrak{m}$ y $N \subset \sum_{X\in\mathbf{M}'} X$.

Sea $\mathbf{M} = \mathbf{M}' \cdot \mathbf{S}$. Es evidente que $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$, $|\mathbf{M}'| \leq |\mathbf{M}'| \leq \mathfrak{m}$ y $N - \sum_{X\in\mathbf{M}} X \subset \sum_{X\in\mathbf{M}'-\mathbf{S}} X$. Ya que el sistema $\mathbf{M}' - \mathbf{S}'$ consiste en subconjuntos de N ajenos entre sí que no pertenecen a $\mathbf{S}$, por la hipótesis (ii) debe ser finito; de esto se sigue que también el conjunto $\sum_{X\in\mathbf{M}'-\mathbf{S}} X$ y su subconjunto $N - \sum_{X\in\mathbf{M}} X$ es finito. Por tanto, el sistema $\mathbf{M}$ tiene las propiedades requeridas.

Se debe notar que es igualmente fácil derivar los tres teoremas de cubierta del corolario 1. Por ejemplo, si se satisfacen las hipótesis (i)-(iii) del primer teorema de cubierta, entonces logramos, primero, por el corolario 1 un sistema $\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{S}$ tal que $|\mathbf{M}_1| \leq \mathfrak{m}$ y $|N - \sum_{X\in\mathbf{M}_1} X \leq \mathfrak{m}$. Considerando la hipótesis (iii), se infiere de la última fórmula que existe un sistema $\mathbf{M}_2 \subset \mathbf{S}$, tal que $|\mathbf{M}_2| \leq \mathfrak{m}$ y $N - \sum_{X\in\mathbf{M}_1} X \subset \sum_{X\in\mathbf{M}_2} X$ (véase la prueba del lema 1). Hacemos: $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ y se muestra sin dificultad que el sistema $\mathbf{M}$ cumple la afirmación del primer teorema de cubierta.

Otra generalización de los tres teoremas de cubierta radica en un debilitamiento de las hipótesis (i) y (iii):

Corolario 2. El primer (respectivamente el segundo, el tercero) sigue siendo válido si se remplazan las hipótesis (i) y (iii) por la siguiente condición:

(i') existe un sistema $\mathbf{P} \subset \mathbf{S}$ *tal que* $|\mathbf{P}| = \mathfrak{p}$ *es accesible fuertemente (respectivamente débilmente) por* $\mathfrak{m}$ *y* $N \subset \sum_{X\in\mathbf{P}} X$.

La demostración es totalmente análoga a la del lema 3 (para mayor simplicidad se puede derivar el corolario 2 de los tres teoremas de cubierta aplicando el lema 3 generalizado; véase la observación en la pág. 167).

Se debe notar que no sólo los tres teoremas de cubierta se pueden generalizar en forma correspondiente a los corolarios 1 y 2, si no también otros teoremas de carácter análogo (por ejemplo, los lemas 9 y 12).

También se puede dar una apariencia de los tres teoremas de cubierta de la forma de teoremas sobre los así llamados ideales, es decir, sobre sistemas de conjuntos aditivos y hereditarios. Algunos de los resultados así obtenidos pueden generalizarse más, y de hecho conducen a ciertos teoremas sobre funciones de conjunto aditivas y multiplicativas; los últimos teoremas tienen por su parte interesantes aplicaciones, a saber, en el álgebra booleana, en particular, en las investigaciones de J. v. Neumann y M. H. Stone sobre el problema de representación. Tenemos la intención de publicar estos resultados detalladamente en otra parte.[1]

Sin duda, la consecuencia más importante de los teoremas de cubierta concierne al problema de medida abstracto.[2] Como se sabe, una función m en el conjunto N es llamada una función medida finito, respectivamente numerablemente, aditiva cuando se cumplen las siguientes propiedades:

(i) a cada conjunto $X \subset N$ se le asocia un número real $m(X) \geq 0$;

(ii) para cada sucesión finita, respectivamente infinita, de subconjuntos del conjunto N ajenos entre sí $X_0, X_1, X_2, \ldots$:

$$m(X_0 + X_1 + X_2 + \cdots) = m(X_0) + m(X_1) + m(X_2) + \cdots ;$$

(iii) para cada $x \in N$ se cumple $m(\{x\}) = 0$;

(iv) existe un conjunto $X \subset N$ tal que $m(X) \neq 0$.

Según un teorema del autor existe una función medida finito aditiva en cualquier conjunto infinito N. Del primer teorema de cubierta (para $\mathfrak{m} = \aleph_0$) se deduce, en cambio, el conocido teorema de S. Ulam según el cual no existe una función medida numerablemente aditiva en un conjunto N, cuando la cardinalidad $\mathfrak{n}$ de este conjunto es accesible fuertemente por $\aleph_0$. Si nos restringimos a funciones medida con un rango finito, es decir, a funciones que sólo toman una cantidad finita de valores distintos, entonces se puede inferir del segundo teorema de cubierta que no existe tal función en un conjunto N cuando $\mathfrak{n} = |N|$ es accesible débilmente por $\aleph_0$, así, por ejemplo,[3] $\mathfrak{n} = 2^{\aleph_0}$ (si se quiere derivar una consecuencia sobre el problema de medida del tercer teorema de cubierta, entonces se deben considerar, además de funciones de medida finito y numerablemente aditivas, tales funciones pero con mayor grado de aditividad; no obstante, dicha noción parece ser un tanto artificial. [4] Vale la pena observar que estos resultados negativos se pueden resumir en una forma más precisa; a saber:

Corolario 3. Si la cardinalidad $\mathfrak{n}$ del conjunto N es accesible fuertemente por $\aleph_0$ y m es una función de medida finito aditiva en N, entonces a cada conjunto $X \subset N$ le corresponde una sucesión

[1] Los últimos resultados se describen sin demostración en mi comunicación *Über additive und multiplikative Mengenkörper und Mengenfunktionen*, C. R. Soc. Sc. Vars. **30**(1937), pág. 151 y siguientes (véase en particular los teoremas 2.13-2.15, 3.19, 3.20, 3.23-3.25, 5.7-5.9, 7.12 y 7.13).

[2] Para lo siguiente véase S. Banach y C. Kuratowski, *Sur une généralisation du problème de la mesure*, Fund. Math. **14**(1929), pág. 127 y siguientes, además los trabajos citados antes de S. Banach y S. Ulam, así como el libro de W. Sierpiński (págs. 44 y siguiente, 107 y siguientes y 159), finalmente mi comunicación *Sur les fonctions additives dans les classes abstraites et leur application au problème de la mesure*, C. R. Soc. Sc. Vars. **22**(1929), pág. 114 y siguientes, mi trabajo *Une contribution à la théorie de la mesure*, Fund. Math. **16**(1930), pág. 42 y siguientes.

[3] En relación a funciones medida que sólo toman dos valores distintos, se obtuvo este resultado antes por S. Ulam y por mi; véase pág. 169, nota 1.

[4] Todos estsos resultados siguen siendo válidos, cuando se elimina la condición de no negatividad de la definición de función medida.

finita o infinita de conjuntos $X_0, X_1, X_2, \ldots, \ldots$*, tales que* $m(X_0) = m(X_1) = m(X_2) = \cdots = 0$ *y* $X = X_0 + X_1 + X_2 + \cdots$.

La afirmación del corolario se cumple también, cuando $\mathfrak{n}$ *es accesible débilmente por* $\aleph_0$*, pero simultáneamente el rango de* m *es finito.*

Demostración. Para probar la primera parte del corolario hacemos $\mathbf{S} = \mathrm{E}_Y[Y \subset N$ y $m(Y) = 0]$. Mediante una inferencia bien conocida se muestra que N y $\mathbf{S}$ satisfacen las hipótesis del primer teorema de cubierta (a saber, si contrario a lo que afirma la hipótesis (ii), existiera un sistema innumerable $\mathbf{T} \subset Pt(N) - \mathbf{S}$ de conjuntos ajenos entre sí, existiría un número $\varepsilon > 0$ y una sucesión infinita de conjuntos ajenos entre sí $X_0, X_1, \ldots, X_k, \ldots$, que cumpliría $m(X) > \varepsilon$; pero en tal caso $m(X_0 + X_1 + \cdots + X_k + \cdots)$ no sería un número real).[1] Por consiguiente , existe un sistema a lo sumo numerable $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$ tal que $N \subset \sum_{Y \in \mathbf{M}} Y$. Si $Y \subset N$, entonces $X = \sum_{Y \in \mathbf{M}} (X \cdot Y)$; claramente los conjuntos del sistema $\mathrm{E}_{X \cdot Y}[Y \in \mathbf{M}]$ se pueden poner en una sucesión (finita o infinita) $X_0, X_1, X_2, \ldots$ y se logra: $m(X_0) = m(X_1) = m(X_2) = \dot{=} 0$ (ya que $\mathbf{M} \subset \mathbf{S}$), así como $X = X_0 + X_1 + X_2 + \cdots$, l.q.q.d.

En una forma totalmente análoga se deriva la segunda parte del coroalrio del segundo teorema de cubierta.

Para finalizar echemos un vistazo a dos problemas en este contexto que hasta hoy no se pueden decidir.

Si se compara la formulación de los tres teoremas de cubierta, se reconoce de inmediato que es posible dar un teorema $\mathfrak{H}$ que se puede considerar como un refinamiento de cada uno de los tres teoremas. Se logra el teorema $\mathfrak{H}$ si en el primer teorema se remplaza la condición (i) por la (i) del segundo teorema, o en el segundo la condición (ii) por la propiedad (ii) del tercero, o finalmente en el tercero se remplaza la conclusión por la conclusión del primero. No obstante, no se ha logrado demostar este teorema. El primer teorema de cubierta ilustra, que el teorema en cuestión se deriva del la hipótesis de los álef de Cantor, de hecho, de una hipótesis más débil, a saber, que para cada cardinal $\mathfrak{m}$ el número $2^{\mathfrak{m}}$ es accesible fuertemente por $\mathfrak{m}$; considerando esto, es poco plausible que se pueda refutar el eorema $\mathfrak{H}$. Del tercer teorema de cubierta se reconoce que sería suficiente demostrar el teorema $\mathfrak{H}$ para el caso $|N| = \mathfrak{n} = 2^{\mathfrak{m}}$, para lograr la validez del teorema en su absoluta generalidad.

El segundo problema sin decidir es la cuestión de si la hipótesis (i) en los teoremas de cubierta es esencial y no se puede eliminar. Yo veo muy probable que la solución de este problema será positiva: a saber, se podría mostrar que un conjunto N satisface la conclusión del primer, respectivamente del segundo o tercer, teorema de cubierta (relativo a a cualquier sistema de conjuntos $\mathbf{S}$ como en las hipótesis (ii) y (iii)), cuando la cardinalidad de este conjunto sea accesible débilmente por el número cardinal $\mathfrak{m}$.

[1] Véase, por ejemplo, el libro antes citado de W. Sierpiński, pág. 108.