XIX

Sobre números cardinales inaccesibles

Título original: Über unerreichbare Kardinalzahlen
Von Alfred Tarski
Fundamenta Mathematicae (1938), 68-89 **30**

Desde hace mucho encontramos el concepto de número cardinal inaccesible en las investigaciones sobre teoría de conjuntos (aunque la expresión *cardinal inaccesible* se introdujo hasta hace poco en la literatura científica [1]).[2] Al principio se trataba a los números inaccesibles más bien como una curiosodad; así expresa su opinión, por ejemplo, Hausdorf en su conocida obra *Grundzüge der Mengenlehre* de que estos números serían de una magnitud tan "exorbitante", que para los fines normales de la teoría de conjuntos difícilmente serán considerados [2]. Sólo después se reconoció la importancia de la noción mencionada en preguntas fundamentales [3]. En los últimos años se ha evidenciado que los números inaccesibles no carecen de importancia para ciertos problemas inherentes a la teoría de conjuntos, de hecho, desempeñan un papel fundamental en algunas investigaciones [4]. Por estas razones, hoy en día vale la pena analizar con más cuidado el concepto de número cardinal inaccesible; el presente trabajo es una contribución a ese problema.

§1. Definición y propiedades características de los números cardinales inaccesibles. Los siguientes hechos se basan en el sistema axiomático Zermelo-Fraenkel [5]. Si la operación con números cardinales se puede fundamentar en este sistema, entonces se puede proceder como a continuación. Considerese el concepto *número cardinal* (respectivamente *cardinalidad) del conjunto M*, en símbolos $|M|$, como una noción nueva y se introducen en el sistema dos axiomas nuevos, a saber:

Axioma I. *A cada conjunto M le corresponde un $\mathfrak{m}$ tal que $|M| = \mathfrak{m}$.*

Axioma II. *Dos conjuntos arbitrarios M y N son equipotentes si y sólo si $|M| = |N|$.*

Se puede proceder sin estos axiomas: se debe entonces tratar siempre con los conjuntos mismos en lugar de con las cardinalidades.

[2]Las expresiones entre corchetes se refieren a las anotaciones al final de este artículo. N. del T.

Ahora definimos:

Definición 1. *El número cardinal $\mathfrak{m}$ se llama inaccesible en sentido amplio, cuando $\mathfrak{m}$ es distinto de 0 y satisface la siguiente condición:*

$\mathfrak{B}_1$ *Si X es un conjunto arbitrario de cardinalidad $< \mathfrak{m}$ y a cada elemento $x \in X$ se asocia un número cardinal $\mathfrak{n}_x < \mathfrak{m}$, se cumple*

$$\sum_{x \in X} \mathfrak{n}_x < \mathfrak{m};$$

$\mathfrak{B}_2$ *Si $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$, existe un número cardinal $\mathfrak{p}$ tal que $\mathfrak{n} < \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$.*

Definición 2. *El número cardinal $\mathfrak{m}$ es inaccesible en sentido estricto, cuando $\mathfrak{m}$ es distinto de 0 y se satisface la conddición $\mathfrak{B}_1$, así como la siguiente:*

$\mathfrak{B}_3$ *Si $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ y $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, se cumple $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}$ [6].*

Ahora damos, en una serie de teoremas que en parte son elmentales, diversas propiedades características de ambos tipos de números inaccesibles.

Lema 1. *El número cardinal $\mathfrak{m}$ satisface la condición $\mathfrak{B}_1$ si y sólo si $\mathfrak{m} \leq 2$ o existe un número ordinal α tal que $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ y ω_α es un número inicial regular.*

Demostración. De la fórmula obvia: $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m} - 1) + 1$ se deduce de inmediato que ningún número finito $\mathfrak{m} > 2$ satisface la condición $\mathfrak{B}_1$. Si $\mathfrak{m}$ es infinito, se puede considerar como un álef, por el principio del buen orden: $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$. Además, se puede dar una sucesión de números $\mathfrak{n}_\xi$ de tipo $\omega_{cf(\alpha)}$ tal que [7]:

$$\aleph_\alpha = \sum_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} \mathfrak{n}_\xi \quad \text{y} \quad \mathfrak{n}_\xi < \mathfrak{m} \quad \text{para cada } \xi < \omega_{cf(\alpha)} \tag{1}$$

Si ω_α fuese singular, es decir, $cf(\alpha) < \alpha$, tendríamos

$$\aleph_{cf(\alpha)} = |\underset{\xi}{\mathrm{E}}[\xi < \omega_{cf(\alpha)}]| < \aleph_\alpha,$$

y la fórmula se opondría a la condición $\mathfrak{B}_1$.

Así, si $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ satisface esta condición, ω_α debe ser regular. Es igualmente sencillo mostrar que tanto los números 0,1 y 2 como cada número $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ con número regular inicial ω_α satisfacen la condición $\mathfrak{B}_1$. Por lo tanto, el lema 1 se cumple en ambas direcciones.

Lema 2. *El número cardinal $\mathfrak{m}$ satisface la condición $\mathfrak{B}_2$ si y sólo si $\mathfrak{m} = 0$ o existe un número ordinal α tal que $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ con $\alpha = 0$ o α es un número límite.*

Demostración. Obvia, considerando el principio del buen orden.

Teorema 3. *El número cardinal $\mathfrak{m}$ es inaccesible en el sentido amplio si y sólo si existe un número ordinal α tal que $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ y que $\alpha = 0$ o ω_α es un número inicial regular con índice límite.*

Demostración. El teorema se obtiene de la definición 1 así como de los lemas 1 y 2.
Del teorema 3 se sigue de inmediato:

Teorema 4. *$\aleph_0$ es el menor número cardinal inaccesible en el sentido amplio.*

Lema 5. *Los números 0, 2 y $\aleph_0$ satisfacen la condición $\mathfrak{B}_3$; no existe ningún número cardinal finito $\mathfrak{m}$ distinto de 0 y 2 que satisfaga esta condición.*

Demostración. La condición $\mathfrak{B}_3$ es satsifecha trivialmente por el número 0. La definción de la potenia de números cadinales propicia $0^0 = 1^0 = 1$ y $o^1 = 0$; por tanto, el número 2 satisface la condición $\mathfrak{B}_3$, pero no el número 1. Tampoco satisface esta condición ningún número finito $\mathfrak{m} > 2$, ya que, por ejemplo, $\mathfrak{n} = 2 < \mathfrak{m}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} - 1 < \mathfrak{m}$, no obstante $\mathfrak{n}^\mathfrak{p} = 2^{\mathfrak{m}-1} > \mathfrak{m}$. Finalmente, si los números $\mathfrak{n}$ y $\mathfrak{p}$ son finitos, también $\mathfrak{n}^\mathfrak{p}$ es finto, por lo que el número $\aleph_0$ satisface la condición $\mathfrak{B}_3$.

Teorema 6. *2 es el menor y $\aleph_0$ el siguiente número mayor que son cardinales inaccesibles en sentido estricto.*

Demostración. Por la definición 2, así como por los lemas 1 y 5.
Se debe observar que diversos teoremas formulados y demostrados originalmente para números inaccesibles infinitos, también resultan válidos para el 2 (no así para ningún otro número finito) [8]. Por tanto, parece ser conveniente expresar la noción de número inaccesible en sentido estricto de tal forma que comprenda también al número 2.

Lema 7. *Cada número cardinal $\mathfrak{m}$ que satisfagala siguiente condición:*

$\mathfrak{B}_4$ *Si $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, se cumple $2^\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$.*

también satisface la condición $\mathfrak{B}_2$, por lo que igual a 0 o es infinito.
Si $\mathfrak{m} \neq 2$, las condiciones $\mathfrak{B}_3$ y $\mathfrak{B}_4$ son equivalentes.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{m}$ satisface la condición $\mathfrak{B}_4$. Por la desigualdad de Cantor $\mathfrak{n} < 2^\mathfrak{n}$ se deduce de inmediato que $\mathfrak{m}$ también debe satisfacer la condición $\mathfrak{B}_2$; según el lema 2 $\mathfrak{m}$ es igual a 0 o infinito.

Si $\mathfrak{m} = 0$, $\mathfrak{m}$ satisface claramente la condición $\mathfrak{B}_3$. Pero si $\mathfrak{m}$ es infinito, derivamos $\mathfrak{B}_3$ de $\mathfrak{B}_4$ de la siguiente manera. Sean $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ y $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$; es conocido que en tal caso se cumple $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, de donde por $\mathfrak{B}_4$ $2^{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}$; por otro lado $\mathfrak{n}^\mathfrak{p} \leq (2^\mathfrak{n})^\mathfrak{p} = 2^{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{p}}$, así que $\mathfrak{n}^\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$.

Recíprocamente, si el número $\mathfrak{m} \neq 2$ la condición $\mathfrak{B}_3$, por el lema 5 se tiene $\mathfrak{m} > 2$ (sin contar el caso trivial $\mathfrak{m} = 0$); $\mathfrak{B}_4$ está entonces contenida en $\mathfrak{B}_3$ como caso particular. Con esto concluye la demostración.

De la definición 2 y del lema 2 se obtiene inmediatamente:

Teorema 8. *Para que $\mathfrak{m}$ sea un número cardinal inaccesible en el sentido estricto distinto de 2 (respectivamente infinito), es necesario y suficiente que $\mathfrak{m}$ sea distinto de 0 y satisfaga las condiciones $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_4$.*

Teorema 9. *Cualquier número cardinal innacesible en el sentido estricto distinto de 2 (respectivamente infinito) también es inaccesible en el sentido amplio.*

Si la hipótesis de los álef de Cantor:

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \quad \textit{para cada número ordinal } \gamma$$

es correcta, entonces también ocurre el recíproco: todo número inaccesible en el sentido amplio es inaccesible en el sentido estricto [6].

Demostración. La primera parte del teorema se obtiene directamente de los teoremas 7 y 8 por la definición 1.

Supongamos ahora la validez de la hipótesis de los álef de Cantor. Si el número $\mathfrak{m}$ es inaccesible en sentido amplio, por el teorema 3 $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$, donde α es igual a 0 o es un número límite. Si se cumple $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, entonces seguramente $2^\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, cuando $\mathfrak{p}$ es finito; si $\mathfrak{p}$ es infinito, esto es $\mathfrak{p} = \aleph_\beta$, se sigue de la hipótesis de los álef de Cantor que $2^\mathfrak{p} = 2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ y por consiguiente otra vez ocurre $2^\mathfrak{p} < \aleph_\alpha = \mathfrak{m}$. Por tanto, el número $\mathfrak{m}$ satisface la condición $\mathfrak{B}_4$ y por el teorema 8 es inaccesible en el sentido estricto, l.q.q.d

Teorema 10. *El número cardinal $\mathfrak{m}$ es inaccesible en el sentido estricto si y sólo si es distinto de 0 y satisface la siguiente condición:*

$\mathfrak{B}_5$ *Si X es un conjunto arbitrario de cardinalidad $< \mathfrak{m}$ y a cada elemento $x \in X$ se le asocia un número cardinal $\mathfrak{n}_x < \mathfrak{m}$, entonces se cumple*

$$\Pi_{x \in X} \mathfrak{n}_x < \mathfrak{m}.$$

Demostración. Sea $\mathfrak{m}$ un número cardinal inaccesible en el sentido estricto. Supongamos que a cada elemento x de un conjunto X de cardinalidad $|X| = \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$ se le asocia un número $\mathfrak{n}_x$. Entonces por $\mathfrak{B}_1$

$$\sum_{x \in X} \mathfrak{n}_x < \mathfrak{m}$$

y de esto se sigue por $\mathfrak{B}_3$ que

$$\left(\sum_{x \in X} \mathfrak{n}_x \right)^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m};$$

ya que, por otro lado,

$$\Pi_{x\in X}\mathfrak{n}_x \le \left(\sum_{x\in X}\mathfrak{n}_x\right)^{\mathfrak{p}}$$

(sin contar el caso trivial $X = 0$), finalmente obtenemos $\Pi_{x\in X}\mathfrak{n}_x < \mathfrak{m}$. Así, este número $\mathfrak{m}$ satisface la condición $\mathfrak{B}_5$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathfrak{m} \neq 0$ satisface la condición $\mathfrak{B}_5$. La condición $\mathfrak{B}_3$ está contenida como caso especial en $\mathfrak{B}_5$: se cumple

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} = \Pi_{x\in X}\mathfrak{n}_x,$$

cuando $|X| = \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{n}_x = \mathfrak{n}$ para cada $x \in X$. $\mathfrak{B}_1$ se obtiene de $\mathfrak{B}_5$ por la conocida desigualdad:

$$\sum_{x\in X}\mathfrak{n}_x \le \Pi_{x\in X}\mathfrak{n}_x$$

(esta desigualdad no se cumple cuando entre los números $\mathfrak{n}_x$ aparece el número 0 o cuando todos los números $\mathfrak{n}_x$ son iguales a 1; ambas excepciones se pueden tratar sin la más mínima dificultad). El número $\mathfrak{m} \neq 0$ satisface entonces las condiciones $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_3$, por lo que es inaccesible en el sentido estricto, l.q.q.d.

El teorema 13 abajo es algo más profundo que los previos, y proporciona la caracterización más sencilla de los números cardinales inaccesibles en sentido estricto. Antes requerimos dos lemas.

Lema 11. *Si el número cardinal $\mathfrak{m}$ satisface la condición $\mathfrak{B}_1$, entonces para cada $\mathfrak{p} \neq 0$:*

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}\cdot\sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}}\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}.$$

Demostración. Primero, se cumple en general

$$\mathfrak{m}\cdot\sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}}\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} \le \mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}\cdot|\underset{\mathfrak{n}}{\mathrm{E}}[\mathfrak{n}<\mathfrak{m}]| \le \mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}\cdot\mathfrak{m}$$

de donde se sigue, dado que $\mathfrak{m}$ es infinito y $\mathfrak{p} > 0$:

$$\mathfrak{m}\cdot\sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}}\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} \le \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}. \tag{1}$$

Para la demostración de la desigualdad inversa

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \le \mathfrak{m}\cdot\sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}}\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} \tag{2}$$

debemos distinguir tres casos, dependiendo de si $\mathfrak{p} < \aleph_0$, o $\aleph_0 \le \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$ o $\mathfrak{p} \ge \mathfrak{m}$.

Si $\mathfrak{p}$ es finito, se cumple (2) con seguridad, pues en tal caso se cumple $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$. Si $\mathfrak{p}$ es infinito y $< \mathfrak{m}$, hacemos:

$$\mathfrak{m} = \aleph_\alpha \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{p} = \aleph_\gamma, \tag{3}$$

Por el lema 1 ω_α debe ser un número inicial regular, por lo que

$$\gamma < cf(\alpha) = \alpha. \tag{4}$$

Si α es un número límite, por un teorema conocido [9] se cumple (tomando en consideración (3) y (4)):

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \aleph_\alpha^{\aleph_\gamma} = \sum_{\xi<\alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\gamma} = \sum_{\aleph_0 \leq \mathfrak{n} < \mathfrak{m}} \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} \leq \sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}},$$

y de esto se obtiene (2) de inmediato. Si por el contrario, α no es un número límite, α debe ser de la forma $\alpha = \beta + 1$ (ya que por (4) $\alpha \neq 0$). Por la fórmula recursiva de Hausdorff [10] ocurre

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \aleph_{\beta+1}^{\aleph_\gamma} = \aleph_{\beta+1} \cdot \aleph_\beta^{\aleph_\gamma} = \mathfrak{m} \cdot \aleph_\beta^{\mathfrak{p}},$$

lo que da paso a (2).

Finalmente consideremos el caso $\mathfrak{p} \geq \mathfrak{m}$. Es sabido que entonces [10] $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = 2^{\mathfrak{p}}$; de esta fórmula se sigue otra vez la desigualdad (2).

Las desigualdades (1) y (2) dan paso inmediatamente a la igualdad a demostrar.

Lema 12. *Cada número cardinal* $\mathfrak{m}$ *que satiafaga la siguiente condición:*

$\mathfrak{B}_6$. *Si* $0 < \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$*, se cumple* $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$,

también satisface la condición $\mathfrak{B}_1$.

El recíproco de este teorema es equivalente a la hipótesis de los álef de Cantor.

Demostración. Primero supongamos que $\mathfrak{m}$ satisface la condición $\mathfrak{B}_6$. Sea X un conjunto arbitrario de cardinalidad $|X| = \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$; a cada elemento $x \in X$ le asociamos un número $\mathfrak{n}_x < \mathfrak{m}$. Hacemos $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}$ para $x \in X$. Ya que $\mathfrak{n}_x < \mathfrak{m}_x$ para cada $x \in X$, se desprende de un teorema conocido de Zermelo [11] que:

$$\sum_{x\in X} \mathfrak{n}_x < \Pi_{x\in X}\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}},$$

de donde de acuerdo con $\mathfrak{B}_6$

$$\sum_{x\in X} \mathfrak{n}_x < \mathfrak{m}.$$

El número $\mathfrak{m}$ satisface la condición $\mathfrak{B}_1$.

Ahora supongamos la validez de la hipótesis de los álef y consideremos un número $\mathfrak{m}$ que satisface $\mathfrak{B}_1$. Si $\mathfrak{m}$ es finito, por el lema 1 debe ser $\mathfrak{m}$ uno de los trés números 0, 1, 2; cada uno de estos números cumple claramente con la condición $\mathfrak{B}_6$. Ahora supongamos $\mathfrak{m}$ infinito y sea $0 < \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$. Por el lema 11 se cumple entonces:

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m} \cdot \sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} \leq \mathfrak{m} \cdot \sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} (2^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m} \cdot \sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} 2^{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{p}}. \tag{1}$$

Si $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ y $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, también $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$; de la hipótesis de los álef de Cantor es fácil concluir $2^{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{p}} \leq \mathfrak{m}$, de donde se sigue por (1):

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \leq \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} \cdot |\underset{\mathfrak{n}}{E}[\mathfrak{n} < \mathfrak{m}]| \leq \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}.$$

Ya que la desigualdad inversa $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}^*$ es evidente, se obtiene finalmente que $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$, es decir, que se cumple $\mathfrak{B}_6$.

Resta derivar la hipótesis de los álef de Cantor de la afirmación:

(2) *Cada número cardinal* $\mathfrak{m}$*, que satisfaga la condición* $\mathfrak{B}_1$*, también cumple la condición* $\mathfrak{B}_6$.

Con este fin consideremos un número ordinal arbitrario α. Dado que $\omega_{\alpha+1}$ es regular, satisface $\mathfrak{m} = \aleph_{\alpha+1}$ la condición $\mathfrak{B}_1$ (véase lema 1). Considerando (2) $\aleph_{\alpha+1}$ también satisface la condición $\mathfrak{B}_6$; para $\mathfrak{p} = \aleph_\alpha$ obtenemos $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Es sabido [12] que esta fórmula es equivalente a la fórmula $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Con esto concluye la demostración.

Teorema 13. *El número cardinal* $\mathfrak{m}$ *es inaccesible en el sentido estricto si y sólo si* $\mathfrak{m}$ *es distinto de 0 y satisface las condiciones* $\mathfrak{B}_3$ *y* $\mathfrak{B}_6$.

Demostración. Si el número $\mathfrak{m}$ es inaccesible en el sentido estricto, satisface, por la definición 2, las condiciones $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_3$. Por el teorema 6 $\mathfrak{m}$ es igual a 2 o infinito. El número $\mathfrak{m} = 2$ cumple la condición $\mathfrak{B}_6$. Si $\mathfrak{m}$ es infinito, se logra la siguiente fórmula del lema 11:

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m} \cdot \sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$$

para cada $\mathfrak{p} > 0$; si $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, se obtiene con ayuda de $\mathfrak{B}_3$:

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \leq \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$$

y además, $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$. El número $\mathfrak{m}$ satisface otra vez la condición $\mathfrak{B}_6$.

Si, recíprocamente, $\mathfrak{m} \neq 0$ satisface las condiciones $\mathfrak{B}_3$ y $\mathfrak{B}_6$, se obtiene de inmediato del lema 12 y de la defención 2 que $\mathfrak{m}$ es inaccesible en el sentido esticto, l.q.q.d.

Teorema 14. *Para que* $\mathfrak{m}$ *distinto de 2 (respectivamente infinito) sea un número cardinal inaccesible en el sentido estricto, es necesario y suficiente que* $\mathfrak{m}$ *sea distinto de 0 y que satisfaga las condiciones* $\mathfrak{B}_4$ *y* $\mathfrak{B}_6$.

Con esto la condición $\mathfrak{B}_4$ *se puede sustituir por la siguiente:*

$\mathfrak{B}_7$. *Existe un número cardinal* $\mathfrak{p}$ *para el que* $2^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$.

Demostración. Según los teoremas 8 y 13 cualquier número inaccesible en el sentido estricto $\mathfrak{m} \neq 2$ cumple las condiciones $\mathfrak{B}_4$ y $\mathfrak{B}_6$; de $\mathfrak{B}_4$ se obtiene inmediatamente $\mathfrak{B}_7$ (por la desigualdad $\mathfrak{p} < 2^{\mathfrak{p}}$). Supongamos que el número $\mathfrak{m} \neq 0$ satisface las condiones $\mathfrak{B}_6$ y $\mathfrak{B}_7$. Por el lema 12 $\mathfrak{m}$ satisface también la condición $\mathfrak{B}_1$. De $\mathfrak{B}_7$ se deduce de inmediato que $\mathfrak{m} > 2$. Así, si $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, se cumple $2^{\mathfrak{p}} \leq \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$, de donde $2^{\mathfrak{p}} \leq \mathfrak{m}$ por $\mathfrak{B}_6$; ya que por $\mathfrak{B}_7$ $2^{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{m}$, se concluye $2^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}$, por lo que el número $\mathfrak{m}$ satisface

$\mathfrak{B}_4$. Por el teorema 8 concluimos que $\mathfrak{m}$ es un número distinto de 2 inaccesible en sentido estricto y el teorema 14 queda demostrado.

Teorema 15. *Para que un número $\mathfrak{m}$ distinto de 2 (respectivamente infinito) sea inaccesible en sentido estricto, es necesario y suficiente que $\mathfrak{m} \neq 0$, que satisfaga la condición $\mathfrak{B}_4$ y la siguiente:*

$\mathfrak{B}_8$. *Si $\mathfrak{p} \neq 0$, entonces $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m} \cdot 2^{\mathfrak{p}}$.*

Demostración. Por el teorema 14 todo número $\mathfrak{m}$ infinito e inaccesible en sentido estricto satisface las condiciones $\mathfrak{B}_4$ y $\mathfrak{B}_6$. Así, si $0 < \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, se obtiene $2^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$, lo que da paso a

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m} \cdot 2^{\mathfrak{p}}. \tag{1}$$

Pero si $\mathfrak{p} \geq \mathfrak{m}$, se sabe que $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = 2^{\mathfrak{p}}$ [10], de donde se duce otra vez (1). Por consiguiente, la fórmula (1) se cumple para cada $\mathfrak{p} \neq 0$; con otras palabras: $\mathfrak{m}$ satisface la condición $\mathfrak{B}_8$.

Ahora supongamos, recíprocamente, que el número $\mathfrak{m} \neq 0$ satisface las condiciones $\mathfrak{B}_4$ y $\mathfrak{B}_8$. Para cada número $\mathfrak{p}$, $0 < \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, ocurre $2^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}$ y se cumple (1); por el lema 7 $\mathfrak{m}$ es infinito, así que $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$. El número $\mathfrak{m}$ satisface, por tanto, la condición $\mathfrak{B}_6$. Tomando en cuenta el teorema 14, $\mathfrak{m}$ es un número infinito inaccesible en sentido estricto l.q.q.d

Lema 16. *Sea M un conjunto arbitrario de cardinalidad $|M| = \mathfrak{m}$. Para que $\mathfrak{m}$ sea un número cardinal distinto de 2 y satisfaga la condición $\mathfrak{B}_6$, es necesario y suficiente que M tenga la siguiente propiedad:*

$\mathfrak{C}_1$. *M es equipotente con el sistema de conjuntos $E_X[X \subset M$ y $|X| < |M|]$.*

Demostración. No tratremos el caso trivial $\mathfrak{m} < \aleph_0$ (se deduce fácilmente que un número finito $\mathfrak{m} > 2$ no satisface ninguna de las condiciones $\mathfrak{B}_6$ y $\mathfrak{C}_1$). Ahora sea $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$. Como consecuencia de un teorema de Sierpiński [12] el sistema $E_X[X \subset M$ y $|X| < |M|]$ tiene cardinalidad $\sum_{\mathfrak{p}<\mathfrak{m}} \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$ [13]; por consiguiente, la condición $\mathfrak{C}_1$ es equivalente a la fórmula

$$\mathfrak{m} = \sum_{\mathfrak{p}<\mathfrak{m}} \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}. \tag{1}$$

Es sencillo derivar esta fórmula de $\mathfrak{B}_6$; por $\mathfrak{B}_6$ se cumple

$$\mathfrak{m} \leq \sum_{\mathfrak{p}<\mathfrak{m}} \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \leq \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}.$$

Igualmente fácil es deducir la implicación inversa. Con ello, las condiciones $\mathfrak{B}_6$ y (1), respectivamente $\mathfrak{C}_1$ son equivalentes, lq.q.q.d.

Teorema 17. *Si M es un conjunto arbitrario de cardinalidad $|M| = \mathfrak{m}$, entonces $\mathfrak{m}$ un número distinto de 2 (respectivamente infinito) inaccesible en sentido estricto si y sólo si M no es vacío, satisface la condición $\mathfrak{C}_1$ y la siguiente:*

$\mathfrak{C}_2$ *No existe un conjunto P tal que M sea equipotente con el sistema de conjuntos $E_X[X \subset P]$.*

Demostración. Por el teorema 14 y el lema 16 (la condición $\mathfrak{C}_2$ expresa básicamente lo mismo que $\mathfrak{B}_7$).

Lema 18. *Sean α un número ordinal y N un conjunto arbitrario de cardinalidad $|N| < \aleph_\alpha$; a cada número ordinal $\xi < \omega_\alpha$ le asociamos un sistema de conjuntos N_ξ, y de tal suerte que:*

$$N_0 = \underset{X}{E}[X \subset N], \tag{i}$$

$$N_\xi = \underset{X}{E}[X \subset \sum_{\eta<\xi} N_\eta \text{ y } |X| < \aleph_\alpha] \text{ para cada } \xi \text{ y } 0 < \xi < \omega_\alpha; \tag{ii}$$

más aún

$$M = \sum_{\xi<\omega_\alpha} N_\xi. \tag{iii}$$

Entonces se cumple lo siguiente:

(I) M cumple la condición:

$\mathfrak{D}_1$. *Si $X \in M$ y $Y \subset X$, entonces $Y \in M$;*

(II) si el número $\mathfrak{m} = \aleph_0$ satisface la condición $\mathfrak{B}_4$, entonces M cumple la condición

$\mathfrak{D}_2$. *Si $X \in M$, entonces $E_Y[Y \subset X] \in M$;*

(III) si el número $\mathfrak{m} = \aleph_0$ cumple la condición $\mathfrak{B}_6$, entonces el sistema de conjuntos M es de cardinalidad $|M| = \aleph_\alpha$, y satisface la condición

$\mathfrak{D}_3$. *Si $X \subset M$ y $|X| < |M|$, entonces $X \in M$;*

(IV) Si $N = 0$ y el número $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ satisface la condición $\mathfrak{B}_6$, entonces M cumple la condición

$\mathfrak{D}_4$. *$M = E_X[X \subset M$ y $|X| < |M|]$.*

Demostración. De (i) y (ii) se obtiene de inmediato:
(1) Si $\xi < \omega_\alpha$, $X \in N_\xi$ y $Y \subset X$, entonces $Y \in N_\xi$;
considerando (iii) deducimos de lo anterior:
(2) Si $X \in M$ y $Y \subset X$, entonces $Y \in M$; con otras palabras M cumple la condición $\mathfrak{D}_1$.
Ya que $|N| < \aleph_\alpha$, de (i)–(iii), se deuce además que:
(3) $|X| < \aleph_\alpha$ para cada $X \in N_\xi$, $\xi < \omega_\alpha$ y más general para cada $X \in M$.

Ahora supongamos que el número $\aleph_\alpha$ satisface la condición $\mathfrak{B}_4$. Si el conjunto X tiene cardinalidad $|X| = \mathfrak{p} < \aleph_\alpha$, es sabido que el sistema $E_Y[Y \subset X]$ tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{p}}$, así que tiene cardinalidad $< \aleph_\alpha$. Tomando en cuenta esto, obtenemos de (1), (3) e (ii):

(4) si $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ cumple la condición $\mathfrak{B}_4$ y ocurre $\xi < \omega_\alpha$ así como $X \in N_\xi$, entonces $\mathrm{E}_Y[Y \subset X] \subset N_\xi \subset \sum_{\eta<\xi+1} N_\eta$, $|\mathrm{E}_Y[Y \subset X]| < \aleph_\alpha$ y finalmente $\mathrm{E}_Y[Y \subset X] \in N_{\xi+1}$.

De (4) e (iii) se logra de inmediato:

(5) si $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ satisface la condición $\mathfrak{B}_4$ y $X \in M$, entonces $\mathrm{E}_Y[Y \subset X] \in M$; el conjunto M satisface entonces la condición $\mathfrak{D}_2$.

Ahora mostraremos que

$$|M| \geq \aleph_\alpha. \tag{6}$$

Por (iii) con seguridad se cumple (6) cuando existe un número $\xi < \omega_\alpha$ para el que

$$|\sum_{\eta<\xi} N_\eta| \geq \aleph_\alpha.$$

De no existir tal número ξ, se deduce de (ii) que se cumple

$$N_\xi = \mathop{\mathrm{E}}_X \left[X \subset \sum_{\eta<\xi} N_\eta \right]$$

para cada ξ, $0 < \xi < \omega_\alpha$. De esto se sigue que cada sistema de conjuntos N_ξ tiene mayor cardinalidad que la de la suma de los sistemas de conjuntos previos; por consiguiente:

$$N_\xi - \sum_{\eta<\xi} N_\eta \neq 0 \text{ para cada } \xi, 0 < \xi < \omega_\alpha. \tag{7}$$

De (iii) se deduce, por otro lado, la fórmula:

$$M = N_0 + \sum_{0<\xi<\omega_\alpha} \left(N_\xi - \sum_{\eta<\xi} N_\eta \right). \tag{8}$$

Tomando en consideración (7), mediante (8) se determina una descomposición del sistema de conjuntos M en $\aleph_\alpha$ subsistemas no vacíos ajenos entre sí; M debe entonces satisfacer la fórmula (6).

De (3) y (6) obtenemos de inmediato:

$$\text{Si} \quad X \in M, \quad \text{entonces } |X| < |M|. \tag{9}$$

Ahora suponemos que el número $\aleph_\alpha$ satisface la condición $\mathfrak{B}_6$. Con ayuda de recursión transfinita mostraremos que:

$$|N_\xi| \leq \aleph_\alpha \tag{10}$$

para cada $\xi < \omega_\alpha$. Si $\xi = 0$, y hacemos $|N| = \mathfrak{p}$, de (i) se deduce que N_ξ tiene cardinalidad $2^\mathfrak{p}$; pero como $\mathfrak{p} < \aleph_\alpha$, de $\mathfrak{B}_6$ se infiere que $|N_\xi| = 2^\mathfrak{p} \leq \aleph_\alpha^\mathfrak{p} \leq \aleph_\alpha$.

Ahora sea $0 < \xi < \omega_\alpha$. Suponga que todos los sistemas de conjuntos N_η con $\eta < \xi$ son de cardinalidad $\leq \aleph_\alpha$, se sigue que

$$|\sum_{\eta<\xi} N_\eta| = \mathfrak{n} \leq \aleph_\alpha \cdot |\mathop{\mathrm{E}}_\eta[\eta < \xi]| \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

Si $\mathfrak{n} < \aleph_\alpha$, deducimos de (ii) que

$$N_\xi = \mathop{\mathrm{E}}_{X}[X \subset \sum_{\eta<\xi} N_\eta]$$

por lo que $|N_\xi| = 2^{\mathfrak{n}}$; de esto se sigue (exactamente como en el caso $\xi = 0$) la fórmula (10). Pero si $\mathfrak{n} = \aleph_\alpha$, en el lema 15 hacemos:

$$\mathfrak{m} = \aleph_\alpha, \qquad M = \sum_{\eta<\xi} N_\eta$$

y de inmediato logramos $|N_\xi| = \aleph_\alpha$ (otra vez por (ii) y $\mathfrak{B}_6$).

Con esto queda demostrado (10) para cada $\xi < \omega_\alpha$. Por (iii) se deduce de esto que $|M| \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$; junto con (6) se obtiene

$$|M| = \aleph_\alpha. \tag{11}$$

Consideremos un sistema de conjuntos arbitrario X tal que $X \subset M$ y $|X| < |M|$. Teniendo a la vista (iii) y (11) tenemos

$$X \subset \sum_{\xi<\omega_\alpha} N_\xi \quad \text{y} \quad |X| < \aleph_\alpha. \tag{12}$$

Ahora empleamos los lemas 1 y 12. Ya que $\aleph_\alpha$ satisface la condición $\mathfrak{B}_6$, ω_α debe ser regular, es decir,

$$\aleph_\alpha = \aleph_{cf(\alpha)}. \tag{13}$$

En base a un teorema conocido [14] se deduce de (11) y (12) la existencia de un número ξ, $0 < \xi < \omega_\alpha$ para el que

$$X \subset \sum_{\eta<\xi} N_\eta;$$

considerando (11), (ii) y (iii) se deduce de esto que $X \in N_\xi$ y $X \in M$.

Formulemos el resultado final de esta observación:

(14) *Si $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ satisface la condición $\mathfrak{B}_6$, entonces el sistema de conjuntos M de cardinalidad $|M| = \aleph_\alpha$, por lo que satisface la condición $\mathfrak{D}_3$: si $X \subset M$ y $|X| < |M|$, entonces $X \in M$.*

Finalmente para corroborar $\mathfrak{D}_4$, considere la siguiente implicación:

(15) si $X \in N_\xi$, entonces $X \subset M$.

Si $0 < \xi < \omega_\xi$, (15) se deduce directamente de (ii) y (iii). Para $\xi = 0$ (15) no se cumple en general. Pero si $N = 0$, de (i) se deduce que N_0 tiene exclusivamente como elemento al conjunto vacío; con esta hipótesis se cumple entonces (15) también para $\xi = 0$, y por tanto para cada $\xi < \omega_\alpha$. De (11) se obtiene:

(16) *Si $X \in M$, entonces $X \subset M$.*

Ahora supongamos que $N = 0$ y simultáneamente $\aleph_\alpha$ cumple la condición $\mathfrak{B}_6$. En consecuencia ocurren tres implicaciones: (9), (16), así como, en vista de (14), la implicación $\mathfrak{D}_3$; estas tres implicaciones se pueden combinar en una fórmula:

$$M = \mathop{\mathrm{E}}_{X}[X \subset M \text{ y } |X| < |M|].$$

Por consiguiente se cumple:

(17) *Si* $N = 0$ *y* $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ *cumple la condición* $\mathfrak{B}_6$*, entonces* M *satisface la fórmula* $\mathfrak{D}_4$*:* $M = E_X[X \subset M \text{ y } |X| < |M|]$.

Por (2), (5), (14) y (17) el sistema de conjuntos M tiene todas las propiedades requeridas.

Lema 19. *Para que el número* $\mathfrak{m}$ *sea distinto de 2 y satisfaga la condición* $\mathfrak{B}_6$ *es necesario y suficiente que existe un sistema de conjuntos* M *de cardinalidad* $|M| = \mathfrak{m}$ *que satisfaga la condición* $\mathfrak{D}_3$.

Aquí se puede sustituir $\mathfrak{D}_3$ *por la condición* $\mathfrak{D}_4$.

Demostración. El caso $\mathfrak{m} < \aleph_0$ es fácil de tratar: existe, como se deduce de inmediato, sólo dos números finitos $\mathfrak{m} \neq 2$, que cumplen $\mathfrak{B}_6$, a saber $\mathfrak{m} = 0$ y $\mathfrak{m} = 1$, y también existen sólo dos números finitos que satisfacen $\mathfrak{D}_3$, respectivamente $\mathfrak{D}_4$, a saber el conjunto vacío y el sistema que sólo contiene al conjunto vacío como elemento.

Ahora sea $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, de hecho $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$. Ponemos $N = 0$ y definimos por recursión el sistema de conjuntos N_ξ para $\xi < \omega_\alpha$ mediante las fórmulas (i) y (ii) del lema (18); mediante la fórmula (iii) se determina además el sistema de conjuntos M (la existencia de los sistemas N_ξ y M se garantiza por el axioma de remplazo). Supongamos que $\mathfrak{m}$ satisface la condición $\mathfrak{B}_6$. Por la afirmación del lema 18, el sistema M tiene cardinalidad $M = \mathfrak{m}$; por tanto satisface la fórmula $\mathfrak{D}_4$ y con mayor razón la condición $\mathfrak{D}_3$, que es una consecuencia inmediata de $\mathfrak{D}_4$.

Recíprocamente, supongamos que existe un sistema de conjuntos M de cardinalidad $|M| = \mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ que satisface $\mathfrak{D}_3$. De $\mathfrak{D}_3$ se sigue que el sistema

$$N = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset M \text{ y } |X| < |M|]$$

es un subsistema de M. Por otro lado, M es equipotente a un subsistema de N, de hecho al sistema

$$P = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset M \text{ y } |X| = 1].$$

Como consecuencia del teorema de equivalencia de Cantor-Bernstein, los sistemas de conjuntos M y N son equipotentes. Mediante la aplicación del lema 16 deducimos que el número $\mathfrak{m} = |M|$ cumple con la condición $\mathfrak{B}_6$, l.q.q.d.

En relación con el lema 19 se debe observar que la la condición $\mathfrak{B}_6$ para $\mathfrak{m} = \aleph_{\alpha+1}$ se reduce a la fórmula

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}, \quad \text{respectivamente } 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

(véase la demostración del lema 12). En particular, si hacemos $\mathfrak{m} = \aleph_1$, se infiere que la hipótesis del continuo

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

es equivalente a la siguiente afirmación:

Existe un conjunto M *de cardinalidad* $|M| = \aleph_1$ *que satisface la condición* $\mathfrak{D}_3$*, respectivamente* $\mathfrak{D}_4$.

Teorema 20. *Sean* $\mathfrak{m}$ *un número cardinal arbitrario y* N *un conjunto de cardinalidad* $|N| = \mathfrak{n}$*. El número* $\mathfrak{m}$ *es un número cardinal distinto de 2 (respectivamente infinito) en sentido estricto que* *es* $> \mathfrak{n}$ *si y sólo si existe un sistema de conjuntos* M *de cardinalidad* $|M| = \mathfrak{m}$ *que cumple las condiciones* $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ *y tiene al conjunto* N *como elemento.*

Demostración. Supongamos que el número $\mathfrak{m} \neq 2$ es inaccesible en sentido estricto y $> \mathfrak{n}$. Partiendo del conjunto N construimos el sistema de conjuntos M en la forma dada en el lema 18. Ya que $\mathfrak{m}$ cumple las condiciones $\mathfrak{B}_4$ y $\mathfrak{B}_6$ (teorema 14), entonces M tiene cardinalidad $|M| = \mathfrak{m}$ y satisface las condiciones $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$; las fórmulas (i) y (iii) (lema 18) dan lugar a $N \in M$.

Recíprocamente, sea M un sistema de conjuntos de cardinalidad $|M| = \mathfrak{m}$ que cumple las condiciones $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ y contiene a N como elemento. Dado que M no es vacío, $\mathfrak{m} \neq 0$. Considere un número $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$. Existe con seguridad un sistema $X \subset M$ de cardinalidad $|X| = \mathfrak{p}$; por $\mathfrak{D}_3$ $X \in M$. Hacemos:

$$U = \underset{Y}{\mathrm{E}}[Y \subset X] \quad \text{y} \quad V = \underset{Y}{\mathrm{E}}[Y \subset U].$$

Por $\mathfrak{D}_2$ $U \in M$; de $\mathfrak{D}_1$ se deduce de esto que $V \subset M$; por consiguiente

$$|V| \leq |M| = \mathfrak{m}. \tag{1}$$

Por otro lado

$$|U| = 2^{\mathfrak{p}} < |V| = 2^{2^{\mathfrak{p}}} : \tag{2}$$

las desigualdades (1) y (2) dan lugar inmediatamente a $2^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}$. El número $\mathfrak{m}$ satisface entonces la condición $\mathfrak{B}_4$. Por el lema 19 de $\mathfrak{D}_3$ se infiere además que se cumple la condición $\mathfrak{B}_6$. Ahora podemos emplear el teorema 14: se reconoce que $\mathfrak{m}$ es un número inaccesible en sentido estricto. Ya que finalmente $N \in M$, por $\mathfrak{D}_2$ ocurre:

$$\underset{Y}{\mathrm{E}}[Y \subset N] \subset M;$$

de donde se sigue que $\mathfrak{m} = |M|$ es mayor que $\mathfrak{n} = |N|$. El número $\mathfrak{m}$ tiene en consecuencia las propiedades requeridas y el teorema queda demostrado en abas direcciones.

Teorema 21. $\mathfrak{m}$ *es un número distinto de 2 (respectivamente infinito) inaccesible en sentido estricto si y sólo si existe un sistema de conjuntos* M *de cardinalidad* $|M| = \mathfrak{m}$ *que cumple las condiciones* $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$.

Las condiciones $\mathfrak{D}_1$ *y* $\mathfrak{D}_3$ *se pueden sustir en ese caso por* $\mathfrak{D}_4$.

Demostración. Para comprobar la primera parte del teorema, basta hacer $\mathfrak{n} = 0$ en el teorema 20. En cambio, mostraremos que se pueden remplazar las condiciones $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_3$ por $\mathfrak{D}_4$, para lo que se apela al lema 18 con $N = 0$: la afirmación de este lema asegura que el sistema M cumple no sólo las condiciones $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$, sino también $\mathfrak{D}_4$. Por otro lado, claramente $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ son consecuencia de $\mathfrak{D}_4$; si M satisface $\mathfrak{D}_2$ y $\mathfrak{D}_4$, entonces $\mathfrak{m}$ debe ser un número distinto de 2 inaccesible en sentido estricto (por la primer parte del teorema).

§2. **Introducción axiomática de los números inaccesibles.** En relación con los teorema 4 y 6 surge en forma natural la pregunta si existen cardinales inaccesibles $> \aleph_0$ en sentido estricto, o al menos en sentido amplio. Este problema permanece indecidible hasta hoy y probablemente no se puede decidir.

Cuando se trata de cardinales inaccesibles en sentido estricto, se puede probar formalmente que su existencia no se puede verificar basándonos en el sistema axiomática de Zemelo-Fraenkel [3]. Si admitimos la existencia de cardinales inaccesibles en el sentido estricto arbitrariamente grandes, debemos enriquecer el sistema de Zermelo-Fraenkel con un nuevo "principio generador", formalmente, con un nuevo axioma. Considerando el teorema 20 podemos formular este axioma de la siguente forma:

Axioma $\mathfrak{A}$. (Axioma de los conjuntos inaccesibles). Para cada conjunto N existe un conjunto M con las siguientes propiedades:

$\mathfrak{A}_1$. *$N \in M$;*

$\mathfrak{A}_2$. *Si $X \in M$ y $Y \subset M$, entonces $Y \in M$;*

$\mathfrak{A}_3$. *Si $X \in M$ y Z es el conjunto de todos los conjuntos $Y \subset X$ y no contiene ningún otro, entonces $Z \in M$;*

$\mathfrak{A}_4$. *Si $X \subset M$ y los conjuntos X y M no son equipotentes, entonces $X \in M$.*

Son conocidas diferentes formulaciones de este axioma. Por ejemplo, las condiciones $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_4$ se pueden remplazar por las siguientes condiciones (de hecho, cada condición independiente de las otras):

$\mathfrak{A}_{1'}$ $N \subset M$;

$\mathfrak{A}_{2'}$ Si $X \in M$ y $Y \in X$, entonces $Y \in M$ (con otras palabras: si $X \in M$, entonces $X \subset M$);

$\mathfrak{A}_{3'}$ Si $X \in M$, existe un conjunto $Z \in M$, que contiene como elementos a todos los conjuntos $Y \subset X$;

$\mathfrak{A}_{4'}$ Si $X \subset M$ y M no es equipotente a ningún $Y \subset X$, entonces $X \in M$.

El axioma $\mathfrak{A}$ es lógicamente tan fuerte, que permite intercalar diversas simplificaciones del sistema de axiomas: algunos otros axiomas se convierten así en teoremas demostrables, por lo que se pueden eliminar. Por ejemplo, es claro que el axioma de potencia se puede derivar de los axiomas $\mathfrak{A}_1$, de hecho de $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ con ayuda del axioma de separación (como se sabe, el axioma de separación se puede obtener del axioma de remplazo [15]); algo similar concierne al axioma de infinito; más aún, el axioma de par es una consecuencia del axioma $\mathfrak{A}$ y del axioma de remplazo. Si en $\mathfrak{A}$ se remplazan $\mathfrak{A}_2$ y $\mathfrak{A}_3$ por $\mathfrak{A}_{2'}$ y $\mathfrak{A}_{3'}$, entonces el axioma de unión es derivable, lo mismo que los axiomas ya mencionados.

Todas estas derivaciones son triviales. Más interesante es el hecho de que el axioma de elección se vuelve demostrable basándonos en el nuevo sistema axiomático. La derivación del axioma de elección no es sencilla. Por ello bosquejamos aquí la demostración [16].

Como es sabido, el axioma de elección es una consecuencia del principio del buen orden [17]; basta por tanto, derivar el principio del buen orden del sistema $\mathfrak{A}$ sin emplear el axioma de elección. Sabemos que Zermelo dió dos pruebas de este teorema, que se basan en el axioma de elección [16]. Si se analiza la segunda prueba de Zermelo, se obtiene el siguiente lema, que se puede comprobar sin el axioma de elección:

I. *Si M es un conjunto arbitrario y F es una función, que a cada subconjunto propio X de M asocia un elemento $F(X) \in M - X$ unívocamente, entonces el conjunto M se puede bien ordenar.*

Este lema se puede mejorar de la siguiente forma:

II. *Si M es un conjunto arbitrario y F es una función que a cada subconjunto $X \subset M$ no equipotente con M asocia un elemento $F(X) \in M - X$ en forma unívoca, entonces el conjunto M se puede bien ordenar.*

La idea básica de la demostración queda sin cambio. La diferencia radica en lo siguiente: si se cumplen las hipótesis de I, entonces se puede definir "efectivamente" una relación binaria mediante la cual se puede bien ordenar al conjunto M; en la prueba del teorema II sólo se puede construir "efectivamente" un subconjunto bien ordenado $P \subset M$, del que se puede verificar es equipotente con M (de esto se sigue inmediatamente que también el conjunto M es bien ordenable, pero no se está en la posibilidad de hacer esto "efectivamente").

De II se deduce el siguiente lema:

III. *Cada conjunto M que satisfaga $\mathfrak{A}_4$ se puede bien ordenar.*

Para mostrar esto, consideremos la función F, determinada por la fórmula:

$$F(X) = \underset{Y}{\mathrm{E}}[Y \in X \text{ y } Y \notin Y]$$

(si la posibilidad $Y \in Y$ se excluye por un axioma particular [15], simplemente hacemos $F(X) = X$). Esta función F asocia a cada conjunto X un subconjunto $F(X) \subset X$, donde se puede mostrar que $F(X) \notin X$ [17]. Ahora, si $X \subset M$ y $X \neq M$, también ocurre $F(X) \subset M$ y $|F(X)| \neq |M|$ (claramente se requiere aquí el teorema de equivalencia de Cantor-Bernstein; si se quiere evitarlo, se debe sustituir $\mathfrak{A}_4$ por $\mathfrak{A}_{4'}$); por $\mathfrak{A}_4$ se cumple $F(X) \in M$, por lo que $F(X) \in M - X$. La función F satisface por tanto las hipótesis de II y el conjunto M se puede bien ordenar.

Por el axioma $\mathfrak{A}$ estamos en posibilidad de derivar el axioma de elección general a partir de III:

IV. *Cada conjunto N se puede bien ordenar.*

En efecto, sea N un conjunto arbitrario. Según el axioma $\mathfrak{A}$ existe un conjunto M que satisface $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_4$ (por cierto, $\mathfrak{A}_3$ no se requiere en esta demostración; incluso $\mathfrak{A}_2$ es superfluo, si remplazamos $\mathfrak{A}_1$ por $\mathfrak{A}_{1'}$). Por el teorema III, M se puede bien ordenar. Por otro lado, de $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ se infiere que N es equipotente con un subconjunto de M, de hecho, con el conjunto

$$P = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset N \text{ y } |X| = 1].$$

De esto deducimos inmediatamente que N se puede bien ordenar.

Para concluir se debe observar lo siguiente. Basándonos en los resultados obtenidos en los últimos años en el área de la metamatemática, sería erroneo suponer que el axioma de los cardinales inaccesibles puede desempeñar algún papel exclusivamente en las investigaciones abstractas teórico-conjuntistas. Se puede construir en la teoría de conjuntosde Zermelo-Fraenkel todo el análisis, en particular la teoría de números pura. Por tanto, por los métodos desarrollados por Gödel se pueden desarrollar cietos teoremas que se pueden formular totalmente en términos de la teoría de números pura y que no se pueden probar o refutar en el sistema de Zermelo-Fraenkel; estos teoremas se vuelven decidibles, cuando se inserta el axioma $\mathfrak{A}$ en el sistema [18].

Por otro lado, sería ingenuo pensar que axiomatizar totalmente la teoria intuitiva de conjuntos de Cantor se resuelve finalmente, o al menos se anima drásticamente, mediante la introducción de los números inaccesibles; sin más, se pueden definir nuevas clases de números cardinales, cuya existencia no se puede demostrar en el sistema axiomático extendido, y sólo nuevos "principios generadores" se pueden garantizar. El problema de la axiomatización del "absoluto de Cantor" (un problema que incluso su formulación precisa involucra dificultades considerables) permanece, como antes, abierto, si es que se puede resolver.

Observaciones

El autor relató los resultados contenidos en este trabajo el 18 de junio de 1937 en la Sociedad Matemática Polaca, sección Varsovia.

[1] Debió ser F. Hausdorff quien por primera vez, en su trabajo *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*, Math. Ann. **65**(1908), pág. 443, planteó la pregunta sobre la existencia de números iniciales ω_α regulares con índice límite α. Los álef $\aleph_\alpha$ asociados a estos números inicials coinciden con los números cardinales, que en este trabajo se designan como inaccesibles en sentido amplio (sin contar el número $\aleph_0$, respectivamente ω_0, que aquí sí se incluyen, mientras no ocurre lo mismo con Hausdorff; véase más adelante la definición 1, así como los teoremas 3 y 4). La expresión "número cardinal inaccesible" ("*nombres cardinaux inaccessibles*"") fue propuesta por C. Kuratowski. La noción de número cardinal inaccesible en sentido estricto fue intoducida por mi, por lo que yo sé, y se definió por primera vez en mi trabajo conjunto con W. Sierpiński: *Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles*, Fund. Math. **15**, 1930, pág. 292.

[2] Véase F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, pág. 131 (se debe tener en cuenta la nota previa, en particular lo relativo al número $\aleph_0$).

[3] Véase (junto con el trabajo de Sierpiński y Tarski citado [1]): C. Kuratowski, *Sur l'état actuel de l'aximatique de la théorie des ensembles*, Ann. Soc. Pol. Math. **3**, pág. 146 y siguientes; A. Tarski, *Sur les principes de l'aritméthique des nombres ordinaux (transfinis)*, ibid., pág 148 y siguientes; A. Lindenbaum et A. Tarski, *Communication sur les reserches de la Théorie des Ensembles*, C. R. Soc. Sc. Vars. **19**, Cl. III, 1926, pág. 322 y siguientes; R. Baer, *Zur Axiomatik der Kardinalzahlen*, Math. Zeitschr. **29**, 1929, pág. 380 y siguientes, en particular pág. 382 y siguientes; E. Zermelo, *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche*, Fund. Math. **16**, 1930, pág. 29 y siguientes, en particlar págs. 43-47 (los números frontera (Granzzahlen) considerados por Zermelo coinciden con los números iniciales ω_α, que corresponden a los álef $\aleph_\alpha$ inaccesibles en sentido estricto).

[4] Véase el trabajo de Sierpiński y Tarski antes citado [1] así como los siguientes trabajos: S. Banach, Über additive Maßfunktionen in abstrakten Mengen, Fund. Math. **15**, 1930, pág. 97 y siguientes;

A. Koźniewski et A. Lindenbaum, *Sur les opérations d'addition et de multiplication dans les classes d'ensembles*, ibid., pág. 342 y siguientes; S. Ulam, *Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math., **16**, 1930, pág. 140 y siguientes; W. Sierpiński, *Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles*, Fund. Math. **20**, 1933, pág. 214 y siguientes; S. Ulam, *Über gewisse Zerlegungen von Mengen*, ibid., pág. 221 y siguientes; A. Tarski, Über additive un multiplikative Mengenkörper und Mengenfunktionen, C. R. Soc. Sc. Vars. **30**, 1937, pág. 151 y siguientes. Véase también el libro de Siepiński , *Hypothése du continu*, Monogr. Matem. **4**, Warszawa-Lwów 1934, en particular pág. 107 y pág. 152 y siguientes. En este contexto se deben considerar también ciertas investigaciones de la teoría de los conjuntos ordenados, a saber, el trabajo de Hausdorff citado [1], por ejemplo pág. 477 y siguientes, así como el trabajo de P. Mahlo, *Über lineare transfinite Mengen*, Leipz. Ber. Math.-phys. Kl. **63**, (1911), pág. 187 y siguientes.

[5] Véase, por ejemplo, A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, Berlín 1928, pág. 268 y siguientes.

[6] Véase el trabajo citado [1] de Sierpiński y Tarski, pág. 292 y siguientes (definición 1, teorema 1 y teorema 2); aquí no se supondra conocimiento de este trabajo.

[7] El símbolo "$cf(\alpha)$" denota al índice del menor número inicial ω_α cofinal. Para (1) véase A. Tarski, *Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires*, Fund. Math. **16**, 1930, pág. 185, Lema 2a.

[8] Esto concierne, por ejemplo, los teoremas 10 y 13, así como el teorema principal del trabajo citado [1] de Sierpiński y Tarski (pág. 300, teorema 5; véase el trabajo mencionado [4] de Koźniewski y Lindenbaum, pág. 354 y siguientes).

[9] Véase A. Tarski, *Quelques théor'emes sur les alephs*, Fund. Math. **7**, 1925, pág. 7 (teorema 7a).

[10] Véase, por ejemplo, A. Schoenflies, *Entwiclung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*, Leipzig und Berlin 1913, pág. 136 y siguientes.

[11] Ibidem, pág. 66 y siguiente.

[12] Véase, por ejemplo, mi trabajo citado [7], pág. 194.

[13] Ibidem, pág. 195, Lema 10b.

[14] Ibidem, pág. 185 y siguiente, Lema 3c.

[15] Véase, por ejemplo, el trabajo citado [3] de Zermelo, pág. 31.

[16] Véase, por ejemplo, el trabajo citado [2] de Hausdorff, pág. 133 y siguientes. Para lo siguiente véase la derivación del principio del buen orden y del axioma de elección en el trabajo de J. v. Neumann, *Die Axiomatisierung der Mengenlehre*, Math. Zeitschr. **27**, 1928, pág. 726 y siguientes.

[17] Véase E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, I, Math. Ann. **65**, 1908, pág. 264 y siguientes.

[18] Véase K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatsh. Math. Phys. **1**, 1931, pág. 187 y siguientes, así como A. Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, Stud. Phil. **1**, 1935, en particular pág. 397, nota 106, y pág. 400 y siguientes.