

Teoría de conjuntos, lógica y temas afines I

Max Fernández de Castro
Departamento de Filosofía

Luis Miguel Villegas Silva
Departamento de Matemáticas y mathematische Logik Abteilung

**Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa,
Mathematisches Institut, Universität Freiburg**





*Zur Ehre unseren Eltern
und zulässiger Ergötzung
des Geistes*

Prefacio

El proyecto TECOLOTE (Teoría de Conjunto, Lógica y Temas afines) se propone presentar dos volúmenes que cubran diversos aspectos de la lógica matemática (teoría de modelos clásica, lógica modal, lógicas no clásicas, incompletud de la lógica de primer orden), de la teoría de conjuntos (teoría de modelos en teoría de conjuntos, teoría de modelos núcleo), así como algunas aplicaciones al álgebra tanto de la lógica, como de la teoría de conjuntos. Ambos volúmenes son, hasta cierto punto, continuación de [FerVill11] y [FerVill11b]. En este primer volumen consideraremos la teoría de modelos clásica y sus aplicaciones (privilegiando el Álgebra), los teoremas de incompletud de Gödel y sus extensiones mediante lógica modal.

Existen numerosos libros sobre teoría de modelos accesibles y que cubren la materia desde varias puntos de vista; desde el libro clásico de Chang y Keisler [CK93] hasta textos modernos con diversas tendencias como lo son [Roth00] y [Mar02] que tratan aspectos de la teoría usual de modelos, pero también asuntos no del todo estándar. Algunos de ellos tienen predilección por las aplicaciones al álgebra u otras disciplinas. Por otro lado, los teoremas de incompletud de la aritmética ha sido explicados en detalle en algunas textos, entre los cuáles destaca el de Smullyan quien presenta diversas demostraciones del mismo. En cuanto a sus extensiones a través de la lógica modal, hay dos libros que desarrollan el tema de manera accesible y son los de Boolos y Smorynski.

Estos volúmenes cumplen, al menos así lo esperamos, diversas expectativas. Quizá la más importante sea presentar el material en forma más accesible para los lectores hispanohablantes, sin por ello rebajar el nivel académico. Con esto queremos cubrir una deficiencia en la literatura en español disponible actualmente, pero no por ello hemos renunciado a llevar al lector, en algunos temas, hasta los resultados más recientes. Sin embargo, hemos procurado presentar el material de forma tal, que cualquier lector dispuesto a dedicarle el tiempo suficiente tanto a la lectura como a la resolución de ejercicios, pueda salir adelante por sí mismo e incorporarse a la investigación de alto nivel y de frontera.

Otro de los objetivos que nos planteamos es poner en contacto al estudioso con diversas ramas que no son fáciles de encontrar en otros textos; tal es el caso de, por ejemplo, la teoría de juegos, la teoría de Ehrenfeucht-Fraïsse, lógica de la demostrabilidad y forcing en teoría de modelos.

En la exposición de los resultados de Gödel, hemos hecho énfasis en la línea que va de los problemas para los que existen algoritmos de solución, hasta los sistemas axiomáticos con enunciados indecidibles, pasando por los conjuntos no decidibles, pero cuyos elementos pueden ser algorítmicamente enumerados. El objetivo es doble. Por una parte, la calculabilidad parece ser uno de esos conceptos clave en las matemáticas, profundamente vinculado con la naturaleza de cierto tipo de pruebas y con cuestiones filosóficas relativas a la naturaleza de la mente. De la misma forma, el que los sistemas axiomáticos que formalizan la aritmética y que cumplen ciertas condiciones mínimas de adecuación sean fatalmente incompletos, arroja una sombra de misterio sobre la naturaleza de la verdad matemática y es, sin duda, uno de los resultados lógicos que ha generado mayor cantidad de litratura filosófica. De él se sigue que las dificultades que habían encontrado en su desarrollo dos de los grandes programas de fundamentación de la matemática, el logicismo de Dedkind, Frege y Russell y el programa formalista de Hilbert, no eran accidentales. Cualquier intento de revivir las ideas de estos pensadores en torno a la naturaleza de las matemáticas tiene que adaptarlas a la nueva situación revelada por los teoremas de Gödel. Es por ello que éstos resultados representan un parteaguas en la filosofía de las matemáticas y su comprensión cabal es obligatoria para cualquier estudiante de ésta disciplina y otras afines, como la filosofía de la mente. Por otro lado, es interesante, desde un punto de vista matemático cómo una serie de teoremas importantes (tal vez no tan inmediatamente relacionados entre sí) dependen de ciertos métodos de demostración. Tanto la solución del problema de la parada y cuestiones relacionadas (la insolubilidad el décimo problema de Hilbert, por ejemplo), como los teoremas de Tarski y Gödel dependen en última instancia de la capacidad para producir enunciados o procesos auto-referenciales. La clave para la producción de estos enunciados de manera consistente y seria depende a su vez de dos recursos: la aritmetización y el método diagonal. A través del orden que hemos dado el texto queremos que el lector perciba estas relaciones. Más adelante, hemos expuesto una introducción a la lógica de la demostrabilidad para que el lector aprecie cómo esta herramienta arroja luz sobre el fenómeno de la auto-referencia que es un tema de especial importancia para la lingüística y la filosofía del lenguaje.

De una u otra forma prevalece cierta división entre los profesionales de la teoría de modelos: aquellos que recurren muy a su pesar a la teoría de conjuntos (manteniendo su presencia en el

mínimo indispensable), y los que incorporan sin reparos incluso los métodos más sofisticados a su investigación. En los textos más recientes prevalece el primer punto de vista, por lo que nosotros hemos tratado de recuperar el espíritu innovador de [CK93] y no sólo aprovechar las enormes posibilidades de la teoría de conjunto, sino estudiar y desarrollar ésta mediante la teoría de modelos, meta que se realiza en el segundo volumen. Pero ya en éste el lector podrá apreciar numerosas incursiones de la combinatoria infinita en la solución de diversos problemas de la teoría de modelos y el álgebra; sin embargo, será hasta el volumen dos, en el que demos rienda suelta a nuestra fascinación por la maravillosa teoría originada por G. Cantor.

Otra meta que perseguimos es despertar en el lector el deseo de dedicarse a la investigación en estas áreas. Con este fin, hemos dedicado numerosas páginas a los ejercicios propuestos; el nivel de éstos varía enormemente, desde aquellos que requieren una simple verificación, hasta los que pueden servir como punto de partida de una investigación susceptible de publicarse en una revista de alto nivel. No obstante, ninguno de los ejercicios encierra un problema abierto, pero el debilitamiento de una hipótesis o la generalización de una conclusión pueden conducir al lector a territorios inexplorados. No consideramos pertinente clasificar los ejercicios en cuanto a su grado de complejidad, pues tal distinción, siendo mayormente subjetiva, puede confundir más que facilitar la solución de los problemas en libros de este nivel. Quisieramos remarcar una y otra vez que es absolutamente indispensable que el lector emprenda la tarea de resolver ejercicios, pero que la dificultad de algunos de ellos no sea el motivo para interrumpir la lectura del texto *De nihilo nihilum*; en muchas ocasiones, la imposibilidad de resolver algún ejercicio se desvanece al considerar nuevos temas o perspectivas, al enfrentar nuevas ideas o desarrollos, o simplemente, al permitir que el cerebro elabore razonamientos más sofisticados conforme se avanza en el texto. Recomendamos al lector tratar de resolver varios ejercicios al concluir la lectura de un capítulo, persistiendo lo suficiente para desarrollar las habilidades necesarias y adquirir nuevos conocimientos, pero no empecinarse, si algún problema se manifiesta especialmente elusivo *Aequam memento rebus in arduis servare mentem*. También debe saber el lector que la mayoría de los problemas pueden admitir más de un método de solución; con esto queremos ilustrar el hecho de que el lector puede requerir resultados de otros capítulos para resolver un problema o mejor aun, necesite consultar alguna obra de la bibliografía. Esto viene a cuento, no sólo para advertir al lector de esta situación, sino para darle mayor libertad a la hora de enfrentar los ejercicios, y no constreñirlo al uso de ciertos teoremas, lemas, etc. Aquellos ejercicios que pudieran considerarse excesivamente demandantes están acompañados de sugerencias detalladas para su resolución, donde estas indicaciones pueden contener los pasos a seguir

para la solución, o bien una referencia a la literatura donde se encuentre el resultado o uno análogo.

Consideramos de enorme importancia que el lector manifieste una gran iniciativa al trabajar esta obra y adquiera las habilidades recién mencionadas, pues de esta forma será más sencillos su incorporación a la investigación *Dente lupus, cornu taurus petit*. En esto adquiere mayor relevancia en los capítulos VI y VII, sobre los cuales vale la pena abundar un poco más. Como es natural, muchas nociones, construcciones, líneas de investigación, etc. relacionadas con el material que aquí presentamos no las hemos podido incorporar por falta de espacio *Copia ciborum, subtilitas impeditur*; para remediar un poco esta situación ciertas nociones excepcionalmente importantes, por ejemplo de la teoría de modelos, las ilustramos en el reino de la teoría de módulos. Tal es el caso de la teoría de la estabilidad y lo mismo ocurre con algunas series de ejercicios que convocan al lector a trabajar cierto material que puede resultar atractivo, importante y con grandes posibilidades de generalizarse.

Todos los volúmenes de este proyecto presuponen que el lector tiene la formación necesaria en lógica matemática (la que se puede obtener de [FerVill11] y [FerVill11b]) y en teoría de conjuntos (por ejemplo la que se obtiene de [Le02]). Los autores han organizado el material aquí presentado de la manera que consideran más adecuada para llevar a buen puerto el estudio de estas disciplinas; disponemos de numerosas obras excelentes que nos han permitido elegir los resultados, la presentación, los ejercicios y, en ocasiones, remediar errores y deficiencias, pero que han sido de invaluable ayuda para nosotros; es difícil sobrestimar la contribución de diversos trabajos en esta obra. Las bibliografía al final del libro indica las referencias que hemos consultado para formar este volumen.

Sería de enorme ayuda para los autores conocer las opiniones de colegas, lectores, estudiantes, etc. acerca de este libro, por lo que mucho agradeceríamos nos enviaran sus comentarios a la dirección de correo electrónico:

tecolote2000@gmail.com

Versiones preliminares de este libro han sido utilizadas en varios cursos y seminarios. Los autores agradecen los comentarios, sugerencias y correcciones de los estudiantes involucrados *Homines, dum docent discunt*.

Algunas aclaraciones importantes debemos hacer *ab initio*. Hemos buscado facilitar al máximo la lectura del texto y ello nos ha llevado a suprimir en muchos casos, cuando no hay riesgo de confusión, las diferencias entre uso y mención de expresiones. Como podrá advertirse con mucha frecuencia empleamos un símbolo de manera autónoma, es decir, como su propio nombre; y una expresión como nombre de la concatenación de los símbolos que la

conforman. Asimismo, cuando se trata del desarrollo de teoremas al interior de un sistema formal y de su aritmetización hemos empleado diferentes estándares de rigor en la escritura de las fórmulas. En el primer caso, nos hemos permitido a veces ciertas licencias, la eliminación de ciertos paréntesis o el uso de símbolos más conocidos, por ejemplo, todo ello para agilizar la lectura. En cambio, cuando se trata de la aritmetización es necesario que la sintaxis sea plenamente respetada. Además algunas veces un mismo símbolo puede tener significados distintos en el texto pero estrechamente relacionados. Tal es el caso, por ejemplo, de la operación aritmética que corresponde a la concatenación de expresiones. Aparece tanto en la aritmetización de las máquinas de Turing como en la de la aritmética. Estrictamente hablando debimos usar símbolos diferentes porque no usamos la misma correspondencia entre expresiones y números en los dos casos, pero contamos con que ésto no producirá ninguna confusión, y en cambio no introducimos más notación engorrosa.

Verba volant scripta manent.

Freiburg-México D.F., junio del 2012.



Índice

I	Recursividad	1
	<i>I.1. Calculabilidad, 1 – I.2. Funciones Recursivas, 25 – I.3. La máquina de turing universal y predicados semicalculables, 49 – I.4. Predicados semicalculables, 51 – I.5. Otra caracterización de las funciones recursivas, 58 – I.6. Tres problemas indecidibles, 61 – I.7. La indecidibilidad del cálculo de predicados, 71 – I.8.  Ejercicios, 96</i>	
II	Los teoremas de incompletud de Gödel	111
	<i>II.1. La incompletud de la aritmética, 111 – II.2. Representabilidad en sistemas aritméticos, 119 – II.3. El sistema Q, 124 – II.4. El primer teorema de incompletud de Gödel, 130 – II.5. El Teorema de Rosser, 144 – II.6. El segundo teorema de Gödel, 146 – II.7. Lógica modal y enunciados auto-referenciales, 150 – II.8. Métodos de decisión. Árboles semánticos, 161 – II.9. La completud aritmética de GL, 187 – II.10.  Ejercicios, 191</i>	
III	Las construcciones elementales en teoría de modelos: Maitines	199
	<i>III.1. Relaciones entre estructuras, 200 – III.2. Operaciones entre estructuras, 225 – III.3. Límites directos e Inversos, 241 – III.4. Sistemas inverso-directos, 270 – III.5. Funciones de Skolem, 275 – III.6. Clases axiomatizables y finito axiomatizables, 278 – III.7. Juegos en lógica, 284 – III.8.  Ejercicios, 300</i>	
IV	Teoría de modelos básica: Laudes	329
	<i>IV.1. Herramientas útiles, 329 – IV.2. El diagrama de una estructura, 337 – IV.3. Teoría de Ehrenfeucht-Fraisse, 358 – IV.4. Modelo completud, 378 –</i>	

IV.5. Axiomatización de clases modelo completas, 381 – IV.6. Eliminación de cuantificadores, 388 – IV.7. Amalgamación y clases de estructuras, 395 – IV.8. Ejercicios, 398

V Teoría de modelos avanzada: Prima 439

V.1. Saturación, 439 – V.2. El teorema de omisión de tipos, 463 – V.3. Modelos homogéneos, 479 – V.4. Estructuras existencialmente cerradas y genéricas, 486 – V.5. Forcing en teoría de modelos, 494 – V.6. Modelo completud y modelos comparsas, 505 – V.7. Anillos conmutativos existencialmente cerrados, 510 – V.8. Anillos Semiprimos, 515 – V.9. Grupos existencialmente cerrados, 526 – V.10. Ejercicios, 539

VI Ad maiorem Modŭlus gloriam 565

VI.1. Preliminares, 566 – VI.2. Anillos coherentes, 568 – VI.3. Módulos Injectivos, 572 – VI.4. Fórmulas positivo primitivas (pp) e invariantes, 577 – VI.5. La retícula de pp-fórmulas y pp-Tipos, 589 – VI.6. Realizaciones Libres, 604 – VI.7. Dualidad en pp-fórmulas, 608 – VI.8. Pureza, 615 – VI.9. pp Eliminación de Cuantificadores, 618 – VI.10. Teorías y sus duales, 641 – VI.11. Otras consecuencias de pp eliminación de cuantificadores, 650 – VI.12. Ejercicios, 654

VII Teoría de modelos en módulos Tiotlak 681

VII.1. Estabilidad en módulos, 682 – VII.2. R-módulos sobre anillos coherentes, 694 – VII.3. Eliminación general de cuantificadores en módulos, 699 – VII.4. Atomicidad y saturación, 713 – VII.5. Módulos puro proyectivos, 720 – VII.6. Módulos Mittag Leffler, 726 – VII.7. Ejercicios, 743

VIII Glosario 773

Bibliografía 779

Índices 786



VIII

Glosario

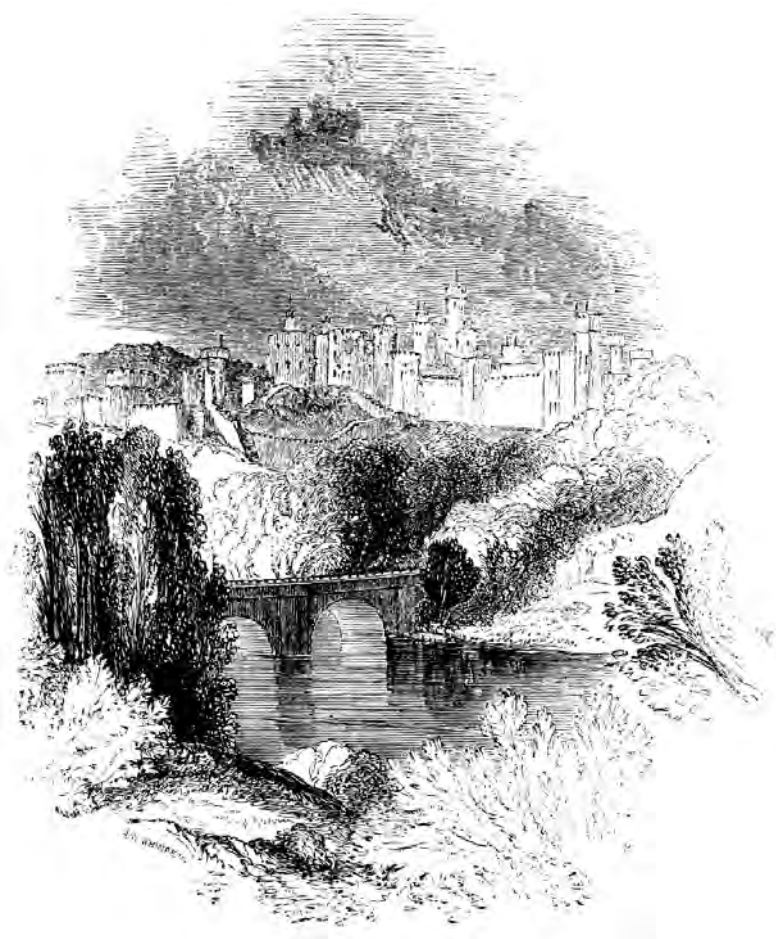
<i>Finis coronat opus</i>	<i>El fin corona el esfuerzo realizado</i>
<i>Intelligenti pauca</i>	<i>Al inteligente, pocas (razones)</i>
<i>Aequam memento rebus in arduis servare mentem</i>	<i>Recuerda conservar la mente serena en los momentos difíciles</i>
<i>Copia ciborum, subtilitas impeditur</i>	<i>Las comidas abundantes embotan la inteligencia</i>
<i>De nihilo nihilum</i>	<i>De la nada, nada puede salir</i>
<i>De gustibus et coloribus non disputandu</i>	<i>Los gustos y los colores nose discuten</i>
<i>Et lux in tenebris Lucet</i>	<i>Y laluz brilla en las tinieblas</i>
<i>Experientia doce</i>	<i>La experiencia enseña</i>
<i>Homines, dum docent discunt</i>	<i>Los hombres aprenden mientras enseñan</i>
<i>Intelligenti pauca</i>	<i>Al inteligente, pocas (razones)</i>
<i>Labor omnia vincit</i>	<i>El trabajo todo lo vence</i>
<i>Pacta sunt servanda</i>	<i>De lo pactado somos esclavos</i>
<i>Post nubila, Phoebus</i>	<i>Después de las nubes, sale el sol</i>
<i>Pro Mundi beneficio</i>	<i>Para beneficio del mundo</i>
<i>Vanitas vanitatum et omnia vanitas</i>	<i>Vanidad de vanidades, todo es vanidad</i>
<i>Verba volant scripta manent</i>	<i>Las palabras vuelan, lo escrito permanece</i>
<i>De omni re scibili...et quibusdam aliis</i>	<i>Acerca de todo lo que se puede saber... y de otras cosas más</i>
<i>Dente lupus, cornu taurus petit</i>	<i>El lobo ataca con el diente y el toro con el cuerno</i>
<i>Et cognoscetis veritatem et Veritas liberabit</i>	<i>Y conoceran la verdad y la verdad los hará libres</i>
<i>Indocti discant, et ament meminisse periti</i>	<i>Apréndanlo los ignorantes, y recuérdenlo los entendidos</i>
<i>infra</i>	<i>después</i>
<i>ab initio</i>	<i>desde el inicio</i>
<i>ad libitum</i>	<i>a voluntad, al gusto</i>

Las horas canónicas

Maitines	antes de amanecer
Laudes	al amanecer
Prima	a las siete de la mañana
Tercia	alas nueve de la mañana
Sexta	a mediodía
Nona	a las tres de la tarde
Visperas	al anochecer
Completas	ya entrada la noche

Nahuatl

Amo oui	Fácil
kualkan	de medianoche hasta mediodia
tiotlak	de las doce hasta las siete de la noche
tlayoua	de las site hasta las doce de la noche



Bibliografia

- [AnFu92] F. Anderson, K. Fuller, Rings and Categories of Modules, 2nd Ed., Springer-Verlag, 1992.
- [Av84] A. Avron, On modal systems having arithmetical interpretations, *J. Symb. Logic* **49**(1984), 935-942.
- [AzuFa89] G. Azumaya, A. Facchini, Rings of Pure Global Dimension Zero and Mittag-Leffler Modules, *J. Pure Appl. Algebra*, **62**(1989), 109-122.
- [Azu92] G. Azumaya, Locally pure-projective modules, *Contemp. Math.* **124**(1992), 17-22.
- [BeSl69] J. L. Bell, A. B. Slomson, Models and Ultraproducts: An Introduction, North-Holland, Amsterdam, 3rd. revised Printing, 1969.
- [Bar77] J. Barwise, Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, 1977.
- [BarFef85] J. Barwise, S. Feferman (Eds.), Model-Theoretic Logics, Springer-Verlag, 1985.
- [Ba60] H. Bass, Finitistic global dimension and homological generalizations of semiprimary rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **95**(1960), 466-488.
- [BaRo83] A. Baudisch, P. Rothmaler, Vorlesung zur Einführung in die Theorie des Shelah'schen Forking, 1. Semester, Berlin, Humboldt Universität zu Berlin, Deutsche Demokratische Republik, 1984.
- [BaRo84] A. Baudisch, P. Rothmaler, Vorlesung zur Einführung in die Theorie des Shelah'schen Forking, 2. Semester, Berlin, Humboldt Universität zu Berlin, Deutsche Demokratische Republik, 1984.
- [Bau75] W. Baur, $\aleph_0$ -Categorical Modules, *J. Symb. Logic* **40**(1975), 213-220.
- [Bj69] J. E. Björk, Rings satisfying a minimum condition for principal ideals, *J. Reine Angew. Math.* **236**(1969), 112-119.

- [Bl11] P. Bland, *Rings and Their Modules*, W. De Gruyter, Berlín, 2011.
- [Boo79] G. Boolos, *The Unprovability of Consistency, An Essay in Modal Logic*, Cambridge Univ. Press, 1979.
- [Boo82] G. Boolos, Extremely undecidable sentences, *J. Symb. Logic* **47**(1982), 191-196.
- [Boo93] G. Boolos, *The Logic of Provability*, Cambridge Univ. Press, 1993.
- [BooJe80] G. Boolos, R. Jeffrey, *Computability and Logic*, Cambridge Univ. Press, 2nd. Ed., 1980.
- [Bou61] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap.1 y Chap. 2, Herman, París, 1961.
- [Ca37] R. Carnap, *Logische Syntax der Sprache*, Springer-Verlag, Wien, 1937. Trad. Inglesa *The Logical Syntax of Language*, Routledge, London, 1937.
- [CK93] C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory*, Third Ed., North-Holland, 1993.
- [Che76] G. Cherlin, *Model Theoretic Algebra*, *Lecture Notes Math.* 521, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [CheRo78] G. Cherlin, J. Rosenstein, On $\aleph_0$ -Categorical Abelian by Finite Groups, *J. Algebra* **53**(1978), 188-226.
- [Chu36] A. Church, A note on the Entscheidungsproblem, *J. Symb. Logic* **1**, 40-41.
- [Cori-Lascar] R. Cori, D. Lascar *Mathematical Logic. A Course with Exercises*, I, II, Oxford University Press, 2000.
- [Dauns08] J. Dauns, *Modules and Rings*, Cambridge University Press, 2008.
- [Da58] M. Davis, *Computability and Unsolvability*, Dover, New York, 1958.
- [Da65] M. Davis (Ed.), *The Undecidable, Basic papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems, and Computable Functions*, Raven Press, 1965.
- [Da73] M. Davis, Hilbert's tenth problem is unsolvable, *Am. Math. Monthly* **80**, 233-269.
- [DaPuRo61] M. Davis, H. Putnam, J. Robinson, The decision problem for exponential diophantine equations, *Ann. Math.* **74**(1961), 425-435.
- [DugGob79] M. Dugas, R. Göbel, Algebraische kompakte Faktorgruppen, *J. reine Angew. Math.* **307/308** (1979), 341-352.
- [DuFo04] D. S. Dummit, R. M. Foote, *Abstract Algebra*, 3rd Ed., Wiley and Sons, 2004.

-
- [EFT84] H. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Mathematical Logic*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [EFT07] H. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Einführung in die mathematische Logik*, Spektrum Akademischer Verlag, 5. Auflage, 2007
- [EkMek02] P. Eklof, A. Mekler, *Almost Free Modules, Revised Ed.*, North-Holland, N. Y. 2002.
- [Enoch76] E. Enoch, A note on absolutely pure modules, *Canad. Math. Bull.* **19**(1976), 361-362.
- [Fa73-76] C. Faith, *Algebra I, II*, Springer-Verlag, Berlín, 1973, 1976.
- [Facch91] A. Facchini, Mittag-Leffler Modules, Reduced Products, and Direct Products, *Rediconditi Sem. Matematico della Università di Padova*, **85**(1991), 119-132.
- [Facch98] A. Facchini, *Module Theory: Endomorphism Rings and Direct Sum Decompositions in Some Classes of Modules*, Birkhäuser, Basel, 1998.
- [FaUt64] C. Faith, Y. Utumi, Quasi-injective modules and their endomorphism rings, *Arch- Math.* **15** (1964), 166-174.
- [FerVill11] M. Fernández De Castro Tapia, L. M. Villegas Silva, *Lógica Matemática I Lógica Proposicional, Intuicionista y Modal*, UAMI, 2011
- [FerVill11b] M. Fernández De Castro Tapia, L. M. Villegas Silva, *Lógica Matemática II Lógica clásica, Intuicionista y Modal*, UAMI, 2011.
- [Fl00] J. Flum, *Mathematische Logik*, Skript, sin publicar.
- [FlGR06] J. Flum, M. Grohe, *Parametrized Complexity Theory*, Springer-Verlag, 2006.
- [Fran81] B. Franzen, Algebraic compactness of filter quotients, *Proc. Abelian Group Theory, Lect. Notes Math.* 874, Springer-Verlag, 1981, 228-241.
- [Fuchs73] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups, Vol. I, II*, Academic Press, New York, 1970, 1973.
- [FuGoSa10] L. Fuchs, R. Göbel, L. Salce, On inverse-direct systems of modules, *J. Pure App. Algebra*, **214**(2010), 322-331.
- [FuSa01] L. Fuchs, L. Salce, *Modules over Non-Noetherian Domains*, American Math. Soc., 2001.
- [Ga79] S. Garavaglia, Direct product decomposition of theories of modules, *J. Symb. Logic* **44**(1979), 77-88.

- [Ga80] S. Garavaglia, Decomposition of totally trascendental modules, *J. symb. Logic* **45**(1980), 155-164.
- [Gl89] S. Glaz, Commutative Coherent Rings, *Lect. Notes Math. 1371*, Springer-Verlag, 1989.
- [Go31] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica un verwandter Systeme I, *Monat. Math. Phys.* **38**(1931), 173-198.
- [Gra78] G. Grätzer, General Lattice Theory, *Academic Press*, 1978
- [Gr07] P. A. Grillet, Abstract Algebra, 2nd Ed., *Springer-Verlag, Berlin*.
- [GrJe73] L. Gruson, C. U. Jensen, Modules Algébriquement compacts et foncteurs dérivés $\lim^{(i)}$, *C. R. Acad. Sci. Paris* **A276**(1973), 1651-1653.
- [GrJe76] L. Gruson, C. U. Jensen, Deux applications de la notion de L -dimension, *C. R. Acad Sci. Paris Ser. A* **282**(1979), 23-24.
- [HaGK05] M. Hazewinkel, N. Gubareni, V. Kirichenko, Algebras, Rings and Modules, Vol. I, *Kluwer Acad. Pub.*, 2005.
- [Hen52] L. Henkin, Aproblem concerning provability, *J. Symb. Logic* **17**(1952), pág. 60.
- [HeHuTr09] D. Herbera, L. Hügel, J. Trlifaj, Baer and Mittag-Leffler Modules over Tame Hereditary Modules, *Math. Zeitschrift* **265**(2009), 1-19.
- [Her10] C. Hernández Domínguez, Modelando a Mittag-Leffler, *Tesis de Maestría, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa*, 2010.
- [HerRoth92] I. Herzog, P. Rothmaler, Modules with Regular Generic Types. Part IV, *Journal of Symb. Logic* **57**(1992), 193-199.
- [Hod97] W. Hodges, Model Theory, *Cambridge Univ. Press*, 1993.
- [Ig91] K. Ignatiev, On strong provability predicates and the associated modal logics, *J. Symb. Logic* **58**(1991), 249-290.
- [Jens72] C. U. Jensen, Les Foncteurs Dérivés de $\varinjlim$ et leurs Applications en Théorie Des Modules, *LNM 254*, Springer-Verlag, 1972.
- [JenVa79] C. U. Jensen, P. Vamos, On the Axiomatizability of Certain Classes of Modules, *Math. Zeitschrift* **167**(1979), 227-237.
- [JenLen89] C. U. Jensen, H. Lenzig, Model Theoretic Algebra, *Gordon and Breach*, 1989.

-
- [Jech06] T. Jech, *Set Theory*, 3rd. Ed., Springer-Verlag, 2006.
- [Kap58] I. Kaplansky, Projective Modules, *Annals of Mathematics* **68**(1958), 372-377.
- [Kap70] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, Allyn and Bacon, 1970.
- [Ka91] R. Kaye, *Models of Peano Arithmetic*, Clarendon Press, Oxford, 1991.
- [Ku85] E. Kunz, *Introduction to Commutative Algebras and Algebraic Geometry*, Birkhäuser, 1985.
- [LaPo79] D. Lascar, B. Poizat, An Introduction to Forking, *J. Symb. Logic* **44**(1979), 330-350.
- [La99] Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [La07] Y. Lam, *Exercises in Modules and Rings*, Springer-Verlag, Berlín, 2007.
- [Lambek66] J. Lambek, *Lectures on Rings and Modules*, Waltham, 1966
- [Lang93] S. Lang, *Algebra*, 3rd Ed., Addison-Wesley, 1993.
- [Le02] A. Levy, *Basic Set Theory*, Dover, 2002.
- [Lob55] M. Löb, Solution of a problem of Leon Henkin, *J. Symb. Logic* **20**(1955), 115-118.
- [Mar02] D. Marker, *An Introduction to Model Theory*, Springer-Verlag, 2002.
- [Mat58] E. Matlis, Injective modules over noetherian rings, *Pacific J. Math.* **8**(1958), 511-528.
- [Mcco87] J. C. McConnell, J. C. Robinson, *Noncommutative Noetherian Rings*, Wiley, 1987.
- [MeNiVi09] P. Mendoza, J. Nido, L. Villegas, *Weakly Compact Cardinals and κ -Torsionless Modules*, *Rev. Colombiana de Matemáticas*, 2009.
- [MyRy68] J. Mycielski, C. Ryll-Nardzewski, Equationally compact algebras II, *Fund. Mathematicae* **61**(1968), 271-281.
- [Neu73] B. H. Neumann, The isomorphism problem for algebraic closed groups, In Boone et. al., *Word Problem, Studies in Logic*, North-Holland, Amsterdam 1973.
- [Ok77] F. Okoh, Systems that are purely simple and pure injective, *Can. J. Math.* **29**(1977), 696-700.

- [Pill83] A. Pillay, *An introduction to Stability Theory*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1983.
- [Po85] B. Poizat, *Cours de Théorie des Modèles*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villersurbanne 1985.
- [Pot81] K. Potthof, *Einführung in die Modelltheorie und ihre Anwendungen*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1981.
- [Prest78] M. Prest, Some model-theoretic aspects of torsion theories, *J. Pure Appl. Algebra*, **12**(1978), 295-310.
- [Prest79] M. Prest, Model-Completions of some theories of modules, *J. London Math. Soc.* **20**(1979), 369-372.
- [Prest88] M. Prest, *Model Theory and Modules*, London Mathematical Society, Lecture Notes Series 130, Cambridge University Press, 1988.
- [Prest09] M. Prest, Purity, Spectra and Localization, *Encyclopedia of Mathematics*, Cambridge University Press, 2009.
- [Pre92] A. Prestel, *Einführung in die mathematische Logik und Modelltheorie*, Vieweg, 1992.
- [PuRo05] G. Puninski, P. Rothmaler, Pure-projective Modules, *J. London Math. Soc.* **71**(2)(2005), 304-320.
- [Rau06] W. Rautenberg, *A Concise Introduction to Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 2006.
- [RayGr71] M. Raynaud, L. Gruson, Critères de platitude et de projectivité, *Seconde partie*, *Invent. Math.* **13**(1971), 52-89.
- [Rob71] A. Robinson, Infinite forcing in model theory, *Proceed. Second Scandinavian Logic Symp.*, Oslo, 1970, North-Holland, 1971.
- [Rob71b] A. Robinson. Forcing in model theory, *Proceed. Int. Conf. on Math.*, Nice 1970 (1971).
- [Robi96] D. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, 1996.
- [Ros78] S. K. Rososhek, Purely correct modules, *Russian Math. Surveys* **33**(3)(1978)
- [Ross36] J. B. Rosser, Extension of some theorems of Gödel and Church, *J. Symb. Logic* **1**(1936), 87-91.

-
- [Roth81] P. Rothmaler, Zur Modelltheorie der Moduln (Unter besonderer Berücksichtigung der flachen Moduln), *Dissertation A, Humboldt Universität zu Berlin, Deutsche Demokratische Republik*, 1981.
- [Roth83] P. Rothmaler, Some Model Theory of Modules I: On Total Transcendence of Modules, *Journal of Symb. Logic* **48**(1983), 570-574.
- [Roth83b] P. Rothmaler, Some Model Theory of Modules II: On Stability and Categoricity of Flat Modules, *Journal of Symb. Logic* **48**(1983), 970-985.
- [Roth84] P. Rothmaler, Some Model Theory of Modules III: On infiniteness of Sets Definable in Modules, *Journal of Symb. Logic* **49**(1984), 32-46.
- [Roth94] P. Rothmaler, Mittag-Leffler modules and positive atomicity, *Habilitationsschrift, Kiel Universität*, 1994.
- [Roth97] P. Rothmaler, Mittag-Leffler modules, *Ann. Pure App. Logic* **88**(1997), 227-239.
- [Roth00] P. Rothmaler, Introduction to Model theory, *Gordon and Breach*, 2000.
- [Row91] L. H. Rowen, Ring Theory, *Academic Press*, 1991.
- [Sa70] G. Sabbagh, Aspects logiques de la pureté dans les modules, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A* **271**(1970), 909-912.
- [Sa71] G. Sabbagh, Sous modules purs, existentiellement clos et élémentaires, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A* **272**(1971), 1289-1292.
- [SaEk71] G. Sabbagh, P. Eklof, Definability Problems for Modules and Rings, *J. Symb. Logic* **36**(1971), 623-649.
- [SaVa82] G. Sambin, S. Valentini, The modal logic of provability. The sequential approach, *J. Symb. Logic* **11**(1982), 311-342.
- [Schu79] H. W. Schülting, Über die Erzeugendenzahl invertierbarer Ideale in Prüfertringen, *Comm. Algebra* **7**(1979), 1331-1349.
- [She75] S. Shelah, The lazy model-theoretician's guide to stability, *Logique et Analyse* **71-72**(1975), 241-308.
- [Smo85] C. Smorynski, Self-reference and Modal Logic, *Springer-Verlag*, 1985.
- [Smu68] R. Smullyan, First Order Logic, 4th. Ed., *Springer-Verlag*, 1968.
- [Smu92] R. Smullyan, Gödel Incompleteness Theorems, *Oxford University Press*, 1992.

- [Smu87] R. Smullyan, *Forever Undecided: A Puzzle Guide to Gödel*, Knopf, New-York, 1987.
- [So76] R. Solovay, Provability interpretation of modal logic, *Israel J. Math.* **25**(1976), 287-304.
- [Ste75] B. Stenström, *Rings of quotients*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [Ta56] A. Tarski, *Logic, Semantics, Metemathematics*, Oxford Univ. Press, 1956.
- [Tyu82] L. V. Tyukavin, Model completeness of certain theories of modules, *Algebra i Logika* **21**(1982), 73-83; translated in *ALgebra and Logic* **21**(1982).
- [Va83] S. Valentini, The modal logic of provability, *J. Philos. Logic* **12**(1983), 471-476.
- [Vi00] L. M. Villegas Silva, et. al., *Conjuntos y Modelos: un curso avanzado*, Universidad Autónoma Metropolitana, 2000.
- [Weis96] V. Weispfenning, *Algebraische Modelltheorie, Skriptum einer Vorlesung*, Universität Passau, 1995-96.
- [Zi84] M. Ziegler, Model theory of Modules, *Ann. Pure App. Logic* **26**(1984), 149-213.
- [Zimmer77] W. Zimmermann, Rein injektive direkte Summen von Moduln, *Comm. Algebra* **5**(1977), 1083-1117.
- [Zimmer02] W. Zimmermann, On locally pure-injective modules, *J. Pure Appl. Algebra* **166**(2002), 337-357.
- [Zimmer76] B. Zimmermann-Huisgen, Pure submodules of direct products of free modules, *Math. Ann.* **224**(1976), 233-245.
- [Zi-Hu79] B. Zimmermann-Huisgen, Rings whose modules are direct sums of indecomposable modules, *Proceed. Am. Math. Soc.* **77**(1979), 191-197.

Índice de símbolos

$(I_j : j \leq m) : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$, 372

$(I_n : n \in \omega) : \mathfrak{A} \cong_f \mathfrak{B}$, 362

$(\mathfrak{A}, B) \equiv_{\Phi} (\mathfrak{C}, B)$, 390

$*$, 7

$A = \bigcup_{i \in I} A_i$, 230

$AX(y)$, 138

$AXI(x)$, 137

$AXL(x)$, 137

AXP_{1-6} , 137

A^+ , 647

$A^{\perp}$, 643

$Alf(y, z)$, 46

$At(\mathcal{L})$, 332

$Ax_i(x)$, 136

$B(R)$, 699

$BeWND(x_0, x_1)$, 144

$BewD(x, y)$, 138

$C(X, K)$, 517

$C0_x$, 63

$CFR(x)$, 134

$CLA_{\mathfrak{A}}(X)$, 303

$C \Vdash^* \varphi$, 498

$C \Vdash_{\mathcal{K}}^* \varphi$, 498

C_n , 550

$Calc(\omega, y, z)$, 47

$Conf(z)$, 44

$Conf\,fin(x, z)$, 47

$Conf\,in(x, z)$, 46

$D(\mathfrak{A}, B)$, 344

$D(u, v)$, 86

$D(x)$, 30

$D_{\Phi}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, 344

$Dim(\geq k, \varphi, \psi)$, 650

$Div(x, y)$, 30

$E(M)$, 576

$E(x)$, 133

EF_n , 294

$EI(x)$, 42

$End(H)$, 272

$Enun(\mathcal{L})$, 332

$FB(x)$, 135

$FMAT(x)$, 134

$F^{\top}$, 643

$Fml(\mathcal{L})$, 332

$Fml_1(\mathcal{L})$, 306

GL , 153

GLS , 171

$GN(x)$, 133

$G^M(p)$, 654

$Gen(x, k)$, 134

$Geni(x, k)$, 134

HBi , 147

$Hp(X)$, 276

$I(\aleph_{\alpha}, \aleph)$, 683

$I(\aleph_{\alpha}, \kappa)$, 683

$I(x, y)$, 28

$I_{\equiv}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, 453

$Imp(x, y)$, 134

$Inv(M, \varphi, \psi)$, 630

$J(M)$, 640

$J(x, y)$, 50

K , 150

- $K(z)$, 50
 $K4$, 151
 $L(z)$, 50
 $LIB(X, y)$, 135
 LM , 151
 $MP(x, y, z)$, 138
 $MT(z)$, 43
 $MULT(x, y)$, 134
 $M\alpha$, 157
 M^* , 272
 M^+ , 642
 M^{**} , 272
 $M_1 \amalg M_2$, 567
 M_{S4} , 155
 $Max(x, y)$, 29
 $Min(x, y)$, 29
 $Mod(\Phi)$, 333
 $Mov(x)$, 42
 $NP(n)$, 33
 $NUM(x)$, 134
 N_X , 62
 $Num(n)$, 115
 $OP(n)$, 33
 $Op(j)$, 114
 $PB(x)$, 138
 PP_n , 591
 $PR(y, x)$, 138
 $Part(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, 359
 $Pase_i$, 44
 $Pd(x)$, 27
 $Pos(\mathcal{L})$, 340
 $Pot_{10}(y)$, 47
 $Pr(n)$, 30
 Q , 124
 $Quint(x)$, 43
 $Quint_6$, 42
 $Quint_i$, 43
 $R(x)$, 133
 R_Σ^π , 62
 R_H^n , 170
 $Res(y, x)$, 29
 ST_M^n , 64
 $SUBST_i(x)$, 135
 $SUCC(x)$, 134
 $SUM(x, y)$, 133
 $S_1^T(A)$, 684
 S_T , 70
 $S_\Phi(\mathcal{K})$, 347
 $S_n^{\mathfrak{M}}(A)$, 452
 $Sim(x)$, 42
 $Spec(R)$, 519
 $Su(e, n)$, 117
 $Suc\ conf(x)$, 47
 $Sucquint$, 43
 TA , 149
 $TERM(x)$, 134
 $T^{(n)}(x^{(n)}, y, z)$, 48
 $T_i(u)$, 77
 T_{eX} , 62
 $Teo(M)$, 668
 $Teo(Mod-R)^*$, 642
 $Teo(\mathfrak{A}, B)$, 344
 $Teo(\mathcal{K})$, 333
 $Teo(\mathbb{N})$, 210
 Th_M , 68
 $Tr(\alpha)$, 173
 $VAR(x)$, 133
 $VARE(x)$, 133
 W^c , 56
 W_z , 56
 $[A]$, 69
 $[[(n_1, \dots, n_m)]]$, 46
 $[\alpha; n]$, 132
 $[a]_{\mathcal{F}}$, 236
 $[n]$, 46
 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, 201
 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, 201
 $\mathfrak{A} \cong_f \mathfrak{B}$, 362
 $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$, 371
 $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, 362
 $\mathfrak{A} \cong_p^\alpha \mathfrak{B}$, 403
 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, 207
 $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$, 494
 $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi$, 494

- $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$, 222
- $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, 217
- $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, 217
- $\mathfrak{A} \preceq_{\varphi} \mathfrak{C}$, 340
- $\mathfrak{A} \preceq_{\Phi} \mathfrak{B}$, 351
- $\mathfrak{A} \preceq_{\Phi} \mathfrak{C}$, 338
- $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, 226
- $\mathfrak{A} \Vdash^* \varphi$, 499
- $\mathfrak{A} \Vdash^{\mathcal{K}} \varphi$, 499
- $\mathcal{A}(\mathcal{K})$, 510
- $Ba(\mathcal{L})$, 332
- $\Box$, 4
- $\Box^{\infty}$, 4
- $\mathfrak{D}\varphi$, 608
- $\Delta(\Lambda)$, 730
- $\mathcal{E}(\mathcal{K})$, 490
- $\mathcal{E}_n(\mathcal{K})$, 490
- $\mathcal{G}$, 526
- $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, 365
- $\mathcal{G}(\mathcal{K})$, 488
- $\mathcal{G}^f(\mathcal{K})$, 499
- $\mathcal{G}_{\infty}(\mathcal{K})$, 488
- $\mathcal{G}_n(\mathcal{K})$, 488
- $\mathfrak{G}(p)$, 654
- $\mathcal{H}^{\Pi_n}$, 489
- $\mathcal{I}$, 510
- $\mathcal{J}$, 397
- $\mathcal{J}(\mathcal{M}_R)$, 572
- $\mathcal{KR}$, 510
- $\mathcal{K}_{\Phi}$, 496
- $\mathcal{K}_{\infty}$, 391
- $\mathcal{Ka}$, 387, 510
- $\mathcal{Kac}$, 508
- $\mathfrak{K}^{\infty}$, 308
- $\mathcal{L}(B)$, 329
- $\mathcal{M}_R$, 566
- $\mathcal{M}_R^+$, 699
- $\Phi \Vdash^* \varphi$, 500
- $\Pi_1(\mathcal{L})$, 332
- Π_i^n , 13
- $\Pi_m(\mathcal{L})$, 333
- $\Psi \leqslant_T \Phi$, 726
- $\Psi \leqslant_{\mathcal{K}} \Phi$, 726
- $\mathcal{S}(\mathcal{K})$, 542
- $\mathcal{SKR}^*$, 522
- $\mathbf{T}(A)$, 557
- $\mathbf{T}^*$, 642
- $\mathbf{T}_R$, 566
- $\mathbf{T}_{Rf}$, 755
- $\Theta(n) = 0$, 25
- $\mathbb{Z}_{(p)}$, 598
- $\bar{n}$, 112
- $\mathbf{M}'$, 16
- $\doteq$, 634
- η_0 , 451
- η_1 , 451
- η_{α} , 450
- $\exists_{\bar{u}}$, 611
- $\exists_{y < m}$, 31
- $\Vdash_{\mathcal{K}}$, 494
- $\forall_{y < m}$, 31
- $\Delta(B)$, 703
- $\Gamma(B)$, 703
- Λ , 7
- $\Sigma_1(\mathcal{L})$, 332
- $\Sigma_1^+(\mathcal{L})$, 339
- $\Sigma_m(\mathcal{L})$, 333
- α^f , 207
- $\alpha^{\bar{x}/\bar{a}}$, 215
- $\varphi(M, \bar{b})$, 586
- $\varphi + \psi$, 590
- $\varphi \upharpoonright \mathfrak{M}$, 684
- $[E]$, 117
- $\lim_{\rightarrow} \mathfrak{M}_i$, 244
- $\lim_{\rightarrow} \mathbb{M}$, 244
- $\leqslant_T$, 648
- $\lim M_i$, 262
- $\mathbb{A}^*$, 8
- $\mathcal{L}_{AR}$, 111
- $\mathcal{U}_{\bar{u}}$, 611
- $|$, 4
- $|^{n+1}$, 6
- $\mu_{y < z}$, 32
- $\neg p^-$, 686

- $\odot$, 111
- $\oplus$, 111
- $\overline{Bew}$, 132
- $\overline{sg}(x)$, 27
- $\dot{-}$, 27
- $\psi \leq \varphi$, 590
- $\psi \leq \Phi$, 594
- $\psi \leq_{\kappa} \varphi$, 648
- $\sim I(x, y)$, 43
- $\langle Y \rangle_{\mathfrak{A}}$, 202
- $\langle \Phi \rangle$, 366
- q_0 , 5
- q_f , 5
- $\mathbf{A}^*$, 8
- C_p , 12
- C_R , 13
- $M_1 \circ M_2$, 15
- M_γ , 19
- M_C , 17
- M_F , 19
- M_i , 18
- $c_1 \rightarrow_M c_2$, 9
- $c_1 \rightarrow_M^* c_2$, 9
- $c_1 \vdash_M c_2$, 10
- $sg(n)$, 14
- $\hat{f}$, 34
- $\vdash_X y$, 62
- $\mathbb{A}$, 559
- $_R Zg$, 677
- $_R \mathbf{T}$, 566
- $con(n, m)$, 115
- $dcl(A)$, 545
- $e(x, i)$, 33
- $f(\varphi)$, 557
- $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, 208
- $f : \mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{B}$, 200
- $f_{\mathfrak{D}T}$, 642
- $f_{\mathbf{T}}$, 641
- g , 114
- $long(z)$, 41
- $neg(x)$, 134
- $ng(x)$, 40
- p^+ , 686
- p^- , 686
- $pp_n(M)$, 592
- $pp_n(R\text{-Mod})$, 591
- $s(n)$, 111
- $sop(a)$, 234
- $sub(y, t, v)$, 138
- $tp_M^+(\bar{a})$, 593
- $tp_M^+(\bar{a}/B)$, 593
- $uni(z, x)$, 49
- xEy , 41
- $x < y$, 120
- xFy , 41
- xPy , 42
- $x \otimes y$, 41
- $x \in_q y$, 43
- $Teo(R\text{-Mod})^*$, 642
- qf**, 332
- $\overline{Bew}$, 132
- $BS\alpha$, 177
- cm , 756
- cmd , 756
- G , 139
- $G1$, 488
- $G2n$, 488
- $G3n'$, 493

Índice alfabético

- $\mathfrak{A}$ -base, 304
- $\mathfrak{A}$ -dimensión, 305
- Φ admite negación, 349
- aec, 392
- alfabeto, 7
 - semithue, 62
- alfabeto (de cinta), 3
- álgebra de Weyl, 587
- anillo
 - artiniano, 709
 - coherente, 568
 - coherente derecho, 750
 - coherente izquierdo, 655
 - con división, 705
 - indiscreto, 678
 - inf, 709
 - local, 588
 - mínimo, 706
 - no singular, 709
 - reducido, 516
 - regular, 699, 750
 - semiprimo, 516
 - semisimple, 706
 - Von Neuman regular, 516
- anti-isomorfismo de retículas, 590
- aplicación
 - elemental, 338
 - polinomial, 457
- árbol, 341
- $\mathfrak{A}/\mathcal{F}$ -asignación, 237
- asignación inducida, 207
- automorfismo, 201
- axioma
 - de elección, 220
 - del supremo, 222
- axiomas
 - orden
 - acotado, 374
 - discreto, 374
 - teoría
 - de grupos, 216
 - teoría de módulos, 566
- base, 304
- bifurcación, 557, 766
- cabeza lectora, 4
- cadena
 - de estructuras, 230, 382
 - elemental, 230, 382
- cálculo de una cinfiguración, 10
- cápsula inyectiva, 576
- character, 647
- casi variedad, 391
- centralizador, 537
- cerradura
 - algebraica, 303
 - de Skolem, 276
 - respecto a un conjunto de conectivos, 338
- cíclo, 341
 - propio, 341
- clase
 - axiomatizable, 278

- relativa, 377
- cerrada
 - respecto a límites directos, 257
 - respecto a subestructuras, 391
- cerrada respecto a expansiones, 352
- cofinal, 488
- completa, 387
- Δ -elemental, 308
- elemental, 308, 333
- elementalmente cerrada, 542
- finito axiomatizable, 280
- inductiva, 383
- modelo Completa, 378
- simple, 542
- Σ_n -cerrada, 490
- coheredero, 562
- composición libre, 526
- concatenación de expresiones, 7
- condición
 - de anulación, 584
 - de cadena decreciente, 693
 - de divisibilidad, 584
 - decide φ , 499
 - mínima, 756
 - mínima débil, 756
- configuración, 8
 - adecuada, 10
- conjunto
 - abierto-cerrado, 516
 - de enunciados
 - independiente, 309
 - de fórmulas
 - simétrico, 495
 - total, 495
 - denso, 242
 - diofantino, 74
 - genérico, 501
 - GL-consistente, 156
 - GL-satisfacible, 160
 - hereditario, 354
 - Hintikka, 169
 - =-cerrado, 282
 - independiente, 304
 - κ -codirigido, 241
 - κ -dirigido, 241
 - máximo consistente, 335
 - ordenado
 - inductivamente, 244
 - recursivo enumerable, 51
 - semithue, 62
 - T-expresable, 114
- η_α , 450
- cono, 263
 - límite, 263
- Φ contiene ecuaciones, 349
- correspondencia de Galois, 309
- cre, 352
- criterio
 - de Baer, 572
 - de Tarski-Vaught, 218
 - de Van den Dries, 390
 - de Vaught, 336
 - TV, 218
- crs, 391
- definición
 - por composición, 15
- denotación de una fórmula, 114
- derivar, 9
 - directamente, 9
- diagrama
 - de una estructura, 344
 - elemental, 344
 - lineal, 257
- dimensión, 305
- divisor primo, 305
- dominio entero, 303
- ec, 487
- elemento
 - algebraico, 303
 - definible, 312
 - infinito, 307
 - mínimo, 154
 - nilpotente, 510

- potencialmente nilpotente, 512
- regular, 512
- eliminación
 - de cuantificadores, 392
 - de cuantificadores infinitaria, 618
- emparedado, 353
- encaje, 200
 - elemental, 222
 - puro, 615
- endomorfismo, 201
- enunciado, 113
 - iletrado, 172
 - modalizado, 178
 - en p , 183
 - siempre demostrable, 151
 - siempre verdadero, 151
 - traza, 173
 - valor de verdad, 152
- epimorfismo
 - puro, 616
- epimorfismo puro, 616
- equivalencia elemental, 207
- espacio
 - cero dimensional, 516
 - de Stone, 516
 - totalmente desconexo, 516
- espectro de Ziegler, 677
- estrategia ganadora, 284
- estructura
 - algebraicamente cerrada, 509
 - atómica, 471
 - existencial cerrada, 447
 - existencialmente
 - cerrada, 487
 - existencialmente cerrada, 490
 - genérica, 488
 - finita, 499
 - κ -homogénea, 479
 - homogénea, 479
 - κ -saturada, 441
 - κ -universal, 483
 - ω -saturada, 444
 - prima, 387
 - producto, 229
 - saturada, 441, 443
 - simple, 267
- estructuras
 - elementalmente equivalentes, 207
 - isomorfas, 201
 - ω -homogéneas, 458
 - parcialmente isomorfas, 362
- expansión de Skolem, 276
- expresión, 7
 - de clase, 132
- extensión, 201
 - booleana, 235
 - elemental, 217
- filtro, 590
- fin-extensión, 399, 466, 467
- forcing, 494
 - condición, 498
 - finito, 498
- forking, 557, 766
- forma normal, 531
 - de Davis, 83
- fórmula, 111
 - Π_2 , 233
 - $\forall \exists$, 233
 - 1-primitiva, 393
 - atómica, 112
 - básica de Horn, 229
 - cerrada, 113
 - de Horn, 229
 - existencial, 214
 - positiva, 339
 - h -persistente, 338
 - Λ -atómica, 659
 - lógicamente
 - existencial, 214
 - universal, 214
 - positivo primitiva, 310
 - preserva
 - hacia abajo, 215

- hacia arriba, 215
 - preserva en productos, 228
 - preserva en uniones, 233
 - primitiva, 380
 - primitivo positiva, 577
 - Σ_0 , 141
 - Σ_1 , 142
 - universal, 214
 - valor de verdad, 152
- $\aleph$ -fuerza, 494
- función
 - compleción, 57
 - de Skolem, 275
 - incorporada, 277
 - definida por minimalización, 37
 - definida por recursión, 21
 - diofantina, 76
 - fuertemente representable, 119
 - parcial recursiva, 38
 - recursiva, 38
 - regular, 37
 - respeto fórmulas, 216, 222
 - T -expresable, 114
 - Turing-calculable, 11
- función de Ackerman, 35
- función definición de una teoría, 641
- funciones
 - recursivas iniciales, 25
 - recursivo primitivas, 25
- G_{3n} , 488
- Γ -factoriza, 726
- Γ -tipo, 726
- gavilla infinita, 402
- GL -árboles, 162
- grado de un vértice, 292
- gráfica, 291
 - completa, 293
 - inducida, 224
 - libre de ciclos, 341
- grupo
 - casi abeliano, 356
 - de caracteres, 647
 - de exponente acotado, 746
 - de torsión, 240
 - divisible, 346
 - dual, 275
 - ordenable, 357
 - ordenado, 357
 - reflexivo, 272, 275
 - sin torsión, 272, 337
- heredero, 560
- homomorfismo, 200
 - fuerte, 201, 244
 - puro, 615
- ideal, 590
 - crítico, 669
 - principal, 590
- idempotente, 510
 - ortogonal, 707
 - primitivo, 707
- imagen homomórfica, 301
- infinitesimal, 307
- invariante, 631
 - cardinal, 630
 - dual de, 642
- isomorfismo, 201
 - parcial, 359
- jep, 398
- juego, 284
 - abierto, 290
 - cerrado, 290
 - de Ehrenfeucht, 365
 - determinado, 289
 - Ehrenfeucht-Fraïssé, 294
 - infinito, 289
 - información perfecta, 284
 - suma cero, 284
- lema
 - del diagrama, 344
 - McKinsey, 313

- lenguaje
 - cardinalidad, 202
 - teoría de módulos, 202, 565
- límite
 - directo, 244
 - inverso, 258, 262
 - inverso-directo, 315
- localización, 598
- longitud de una expresión, 7
- main gap, 683
- máquina de Turing, 2, 8
- marco, 154
 - validez, 154
- modelo
 - atómico, 471, 480
 - comparsa, 506
 - compleción, 507
 - de Kripke, 152
 - de la aritmética, 210
 - κ -homogéneo, 479
 - homogéneo, 479
 - κ -saturado, 481
 - κ -universal, 483
 - $M\alpha$, 157
 - monstruo, 684
 - primo, 470
 - saturado, 483
 - universal, 483
- módulo
 - absoluto puro, 544
 - α -inyectivo, 543
 - algebraicamente compacto, 542, 714
 - α -plano, 543
 - atómico positivo, 713
 - β -inyectivo, 549
 - construible positivo, 713
 - E -libre de torsión, 661
 - estable, 685
 - FP-inyectivo, 544
 - inyectivo, 572
 - inyectivo puro, 542
 - $\mathcal{K}$ -Mittag-Leffler, 728
 - κ -inyectivo, 694
 - localmente proyectivo, 742
 - Mittag-Leffler, 728
 - Mittag-Leffler estricto, 742
 - ω -estable, 685
 - plano, 749
 - $+$ -construible, 713
 - positivo saturado ($+$ -saturado), 713
 - $+$ -atómico, 713
 - prueba, 740
 - punteado, 762
 - puro absoluto, 655
 - puro inyectivo, 713, 718
 - puro proyectivo, 720
 - Σ -inyectivo, 661
 - semisimple, 706
 - separable, 742
 - Σ -puro inyectivo, 717
 - Σ -inyectivo, 542
 - superestable, 685
 - totalmente trascendente, 685
 - tt , 685
 - voluminoso, 696
- mundo adecuado, 182
- numeral, 112
- número
 - de Gödel, 47
- ocurrencia de una variable, 112
- operador cerradura, 334, 489
- orden
 - inductivo, 244
 - lineal denso, 337, 483
- pa, 395
- pec, 398
- pif, 240
- Π_1 -axiomatización, 308
- posición en el juego, 290
- pp fórmula, 577
 - con parámetros, 586

- derecha, 578
- dual de, 608
- infinitaria, 618
- izquierda, 578
- pp subgrupo, 584
- pp tipo, 592
 - completo, 592
 - completo de $\bar{a}$, 593
 - sobre B , 593
 - finitamente generado, 594
- predicado
 - diofantino, 74
- predicado semicalculable, 55
- primer teorema de preservación, 349
- principio
 - de inclusión-exclusión, 619
 - de Sylvester, 619
- problema
 - de Hilbert, 73
- problema de laparada, 57
- producción semithue, 61
- producto
 - cartesiano, 226, 229
 - de estructuras, 226, 229
 - directo, 226
 - libre, 527
 - reducido, 236
- propiedad
 - de amalgamación, 395, 566
 - de Heine-Borel, 278
 - de la intersección finita, 240
 - del encaje común, 398
 - expresable, 119
 - Turing calculable, 12
- prueba
 - semithue, 62
- prueba de Shoenfield, 394
- rama fiel, 167
- rango
 - cuantificable de una fórmula, 293
 - sistema invariantes, 682
- realización aritmética, 151
- realización libre de una pp fórmula, 604
- recursión
 - por curso de valores, 33
- relación
 - expresable, 146
 - recursivo primitiva, 27
 - Σ_1 , 142
 - terminal, 154
- relación negativa, 307
- relación Turing calculable, 13
- representación del uno, 708
- retícula, 589
 - de Galois, 334
 - pp-retícula, 591
- retracción, 301
- retracto, 301
- segundo teorema de preservación, 388
- semi campo, 705
- semigrupo, 68
- sistema
 - Q , 124
 - consistente, 548
 - de invariantes, 682
 - dirigido, 244
 - dual, 269
 - GL , 153
 - GLS , 171
 - inverso, 259
 - inverso-directo, 271
 - K , 150
 - LM , 151
 - local, 265
 - normal, 151
 - PA , 130
 - R , 129
 - RR , 129
 - semithue, 62
- Σ_1 -axiomatización, 308
- sML, 762
- soporte de un elemento, 234

- subconjunto
 - abierto, 290
 - cerrado, 290
- subestructura, 201
 - elemental, 217
 - generada, 202
 - κ -generada, 256
- subfórmula, 113
- subgráfica, 224
- subgrupo
 - complemento ortogonal de, 643
 - definible, 584
- submódulo
 - completamente invariante, 315
 - puro, 615
- subretícula, 589
- sucesión
 - exacta, 255
 - pura-exacta, 616
- suma
 - directa, 234
 - fibrada, 248, 567
 - órdenes, 375
- T -tipo, 440
- τ_0 -término, 141
- teorema
 - de Łoś-Suszko-Chang, 383
 - de Łoś-Tarski, 348
 - de Baldwin-Lachlan, 391
 - de Baur-Monk, 625
 - de Cantor, 363
 - de compacidad, 240
 - de Ehrenfeucht, 370
 - de estructura para anillos Von Neumann, 519
 - de estructura para grupos, 346
 - Łoś, 237
 - de Lyndon, 384
 - de omisión de tipos, 464
 - de preservación de Łoś, 352
 - de Rosser, 145
 - de Ulm, 682
 - de Wedderburn-Artin, 709
 - Gale-Stewart, 291
 - Keisler-Shelah, 281
 - Löwenheim-Skolem, 219
 - ascendente, 219
 - pp eliminación de cuantificadores, 625
 - semithue, 62
- teoría, 333
 - axiomatizable, 308
 - κ -categórica, 336
 - completa, 335, 480
 - de Skolem, 275
 - de una estructura, 344
 - dual de, 642
 - $\exists_1$ -axiomatizable, 308
 - κ -estable, 684
 - $\forall_1$ -axiomatizable, 308
 - inestable, 685
 - ω -estable, 685
 - ω -consistente, 138
 - superestable, 685
 - totalmente trascendente, 685
 - tt, 685
- término, 111
 - cerrado, 113
- tesis de Church, 38
- tipo, 439
 - aislado, 463
 - completo, 452
 - de un elemento, 440
 - de un grupo, 354
 - incompleto, 452
 - irracional, 558
 - $\mathcal{K}$ generado, 726
 - omisión, 440
 - racional, 558
 - realización, 439
- I -tipo, 557
- transformación
 - prueba, 740
- trayectoria, 341

cerrada, 341
hamiltoniana, 402

ultrafiltro, 590
ultrapotencia, 236
ultraproducto, 236

valor de verdad de una fórmula, 113

vértice

aislado, 292
sociable, 292



El centro y los cuatro rumbos del mundo
Código Fejérváry-Mayer

América, no invoco tu nombre en vano. Cuando sujeto al corazn la espada, cuando aguantando en el alma la gotera, cuando por las ventanitas un nuevo da tuyo me penetra, soy y estoy en la luz que me produce, vivo en la sombra que me determina, duermo y despierto en tu esencial aurora: dulce como las uvas, y terrible, conductor del azcar y el castigo, empapado en esperma de tu especie, amamantado en sangre de tu herencia.

P. Neruda

Der Einzelne hat zwei Augen Die Partei hat tausend Augen. Die Partei sieht sieben Staaten Der Einzelne sieht eine Stadt. Der Einzelne hat seine Stunde, Aber die Partei hat viele Stunden. Der Einzelne kann vernichtet werden, Aber die Partei kann nicht vernichtet werden. Denn sie ist der Vortrupp der Massen Und fhrt ihren Kampf Mit den Methoden der Klassiker, welche geschpft sind Auf der Kenntnis der Wirklichkeit.

Es ist schlimm, in einem Lande zu leben, in dem es keinen Humor gibt. Aber noch schlimmer ist es, in einem Lande zu leben, in dem man Humor braucht.

Englisch das Land, das Helden ntig hat!

Auf Schlimmste ist nicht: Fehler haben, nicht einmal sie nicht befehlen, ist schlimm. Schlimm ist, sie zu verstehen.

B. Brecht

Den Unterdrckten von fnf Erdtellen, denen, die sich schon befreit haben, und allen, die fr den Weltfrieden kmpfen, mu der Herzschlag gestockt haben, als sie brten, Stalin ist tot. Er war die Verkperung ihrer Hoffnung. Aber die geistigen und materiellen Waffen, die er herstellte, sind da, und da ist die Lehre, neue herzustellen.

B. Brecht

Das Proletariat ist diejenige Klasse der Gesellschaft, welche ihren Lebensunterhalt einzig und allein auf dem Verkauf ihrer Arbeit und nicht auf dem Profit irgendeines Kapitals zieht; deren Wohl und Wehe, deren Leben und Tod, deren ganze Existenz von der Nachfrage nach Arbeit, also von dem Wechsel der guten und schlechten Geschftzeiten, von den Schwankungen einer zgellosen Konkurrenz abhngt. Das Proletariat oder die Klasse der Proletarier ist, mit einem Worte, die arbeitende Klasse des neunzehnten Jahrhunderts.

Er Sklave ist ein fr allemal verkauft; der Proletarier mu sich tglich und stndlich selbst verkaufen.

Die sogenannten Sozialisten teilen sich in drei Klassen. Die erste Klasse besteht aus Anhangern der feudalen und patriarchalischen Gesellschaft, welche durch die groe Industrie, den Welthandel und die durch beide geschaffene Bourgeoisgesellschaft vernichtet worden ist und noch tglich vernichtet wird. Diese Klasse zieht auf den beln der jetzigen Gesellschaft den Schlu, da die feudale und patriarchalische Gesellschaft wieder hergestellt werden mfe, weil sie von diesen beln frei war. Alle ihre Vorschlge gehen auf geraden oder krummen Wegen diesem Ziele zu. Diese Klasse reaktionrer Sozialisten wird trotz ihrer angeblichen Teilnahme und heien Trnen fr das Elend des Proletariats dennoch stets von den Kommunisten energisch angegriffen werden.

F. Engels

Das Proletariat wird seine politische Herrschaft dazu benutzen, der Bourgeoisie nach und nach alles Kapital zu entreien, alle Produktionsinstrumente in den Hnden des Staats, d. h. des als herrschende Klasse organisierten Proletariats zu zentralisieren und die Masse der Produktionsfrste mglichst rasch zu vermehren.

Die Kommunisten sind keine besondere Partei gegenber den andern Arbeiterparteien. Sie haben keine von den Interessen des ganzen Proletariats getrennten Interessen. Sie stellen keine sektiererischen Prinzipien auf, wonach sie die proletarische Bewegung modeln wollen.

Die Kommunisten erfinden nicht die Einwirkung der Gesellschaft auf die Erziehung; sie verndern nur ihren

Charakter, sie entreien die Erziehung dem Einfluß der herrschenden Klasse.

Nosotros el comunismo no es un estado que debe implantarse, un ideal al que haya de sujetarse la realidad. Nosotros llamamos comunismo al movimiento real que anula y supera el estado de cosas actual. Las condiciones de este movimiento se desprenden de las premisas actualmente existentes el mercado mundial. Por lo tanto, el proletariado sólo puede existir en un plano historia-mundial, lo mismo que el comunismo, su acción, sólo puede llegar a cobrar realidad como existencia histórico-universal.

No de los problemas más difíciles para los filósofos, es descender del mundo del pensamiento al mundo real.

La realidad inmediata del pensamiento es el lenguaje y como los filósofos han proclamado la independencia del pensamiento, debieran proclamar también el lenguaje como un reino propio y soberano. En esto reside el secreto del lenguaje filosófico, en el que los pensamientos encierran, como palabras, un contenido propio. El problema de descender del mundo de los pensamientos al mundo real se convierte así en el problema de descender del lenguaje a la vida... Los filósofos no tendrán más que reducir su lenguaje al lenguaje corriente, del que aquí se abstrae, para darse cuenta y reconocer que ni los pensamientos ni el lenguaje forman por sí mismos un reino aparte, sino que son, sencillamente expresiones de la vida real.

R. Marx

The rising of the Moon

Oh then, tell me Seán O'Farrell, tell me *why* you hurry so?
'Hush a bhuachaill, hush and listen', and his cheeks were all aglow,
'I bear orders from the captain:- get you ready quick and soon
For the pikés must be together by the rising of the moon'
By the rising of the moon, by the rising of the moon,
For the pikés must be together by the rising of the moon
'And come tell me Seán O'Farrell where the gath'rin is to be?'
'In the old spot by the river, right well known to you and me.
One more word for signal token:- whistle out the marchin' tune,
With your pike upon your shoulder, by the rising of the moon.'
By the rising of the moon, by the rising of the moon
With your pike upon your shoulder, by the rising of the moon.
Out from many a mud wall cabin eyes were watching through the night,
Many a manly chest was throbbing, for the blessed morning light.
Murmurs ran along the valleys like the banshee's lonely croon
And a thousand pikés were flashing at the rising of the moon.
At the rising of the moon, at the rising of the moon.
And a thousand pikés were flashing by the rising of the moon.
There beside the singing river that black mass of men was seen,
High above their shining weapons flew their own beloved green.

'Death to every foe and traitor! Forward strike the marching tune.'

And hurrah my boys for freedom; 'tis the rising of the moon'.
'Tis the rising of the moon, tis the rising of the moon
And hurrah my boys for freedom; 'Tis the rising of the moon'.

Well they fought for poor old Ireland, and full bitter was their fate,
Oh what glorious pride and sorrow, fills the name of ninety-eight!

Yet, thank God, e'en still are beating hearts in manhood burning noon,

Who would follow in their footsteps, at the risin' of the moon

At the rising of the moon, At the rising of the moon
Who would follow in their footsteps, at the risin' of the moon.

