# XXI

## Sobre la teoría de la medida en la teoría general de conjuntos

**Título original: Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre**
**Von Stanisław Ulam (Lwow)**
Fundamenta Mathematicae (1930), 140-15016



El Sr. Banach planteó el siguiente problema que pude concebirse como una generalización del conocido problema de Lebesgue sobre medida:

¿Existe una función real $f$ definida en todos los subconjuntos del intervalo $(0,1)$ que satisfaga las siguientes condiciones?

1. Existe un conjunto Q para el que $f(Q) > 0$.

2. Para cualquier punto $p$ se cumple $f(p) = 0$.

3. Si $\{A_n\}$ es una sucesión de conjuntos ajenos entre sí, entonces $f(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots) = f(A_1) + f(A_2) + \cdots + f(A_n) + \cdots$

La inexistencia de tal función fue demostrada por Banach y Kuratowski suponiendo válida la hipótesis del continuo.[2] Con ello fue generalizado el conocido teorema de Vitali, que establece la existencia de conjuntos no medidbles en el sentido de Lebesgue. [Las condiciones de Lebesgue comprenden, como es sabido, además de las condiciones 1-3 el postulado de la igualdad de medida entre conjuntos congruentes].

Además demostró Banach el siguiente teorema general,[3] suponiendo válida la hipótesis de Cantor: $2^{\aleph_\xi} = \aleph_{\xi+1}$:

[2]Fund. Math. XIV.
[3]Fund. Math. XV.

Si $f$ es una función aditiva de tipo $\aleph_\xi$, entonces $\aleph_\xi$ es un cardinal inaccesible;[1] aquí se llama a una función $f$ aditiva de cardinalidad $\aleph_\xi$ cuando para conjuntos $A_\eta$ ajenos entre sí se cumple

$$f\left(\sum_\eta A_\eta\right) = \sum_\eta f(A_\eta); \quad 0 < \eta < \omega_\xi$$

donde $\omega_\xi$ denota al primer ordinal de cardinalidad $\aleph_\xi$; la función $f$ es de tipo $\aleph_\xi$, cuando es aditiva para cada cardinalidad menor que $\aleph_\xi$, pero no lo es con la cardinalidad $\aleph_\xi$.

En este trabajo se demostrará principalmente:

(I) *En el teorema de Banach es prescindible la hipótesis* $2^{\aleph_\xi} = \aleph_{\xi+1}$.

(II) *Para el resultado de Banach-Kuratowski basta suponer la validez de la siguiente hipótesis más débil:*

(I) *Entre los números cardinales* $\leq \mathfrak{c}$ *(*$\mathfrak{c}$ *denota la cardinalidad del continuo) no existe un inaccesible.*

Permítase al autor agradecer calurosamente aquí al Sr. Prof. Kuratowski por el interés que tuvo en este trabajo, así como por sus valiosos consejos.

## §1.

Primero demostramos el siguiente resultado fundamental

**Teorema (A).** *Sea $Z$ un conjunto de cardinalidad $\mathfrak{m}$, tal que entre los cardinales $\leq \mathfrak{m}$ no aparece un cardinal inaccesible. Afirmación: $\mathfrak{m}$ "no es medible", es decir, no se puede definir ninguna función en el conjunto $Z$ que satisfaga las condiciones (1)-(3).*

(De este teorema se sigue directamente la validez de la afirmación II).

1. Demostración. Cuando la cardinalidad de $Z$ es $\aleph_0$ o menor, la afirmación es trivial. Probaremos el teorema por recursión transfinita. Para una mejor aplicación del método, probaremos la validez del teorema en el caso en el que la cardinalidad es $\aleph_1$.

La imposibilidad de dar la $f$, la "medida" en $Z$, se obtiene del siguiente hecho:

Se puede construir una matriz infinita de subconjuntos de $Z$:

$$\begin{array}{c}
A_1^1, A_2^1, \ldots A_n^1 \ldots A_\alpha^1 \ldots \\
A_1^2, A_2^2, \ldots A_n^2 \ldots A_\alpha^2 \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_1^n, A_2^n, \ldots A_n^n \ldots A_\alpha^n \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

[1] El número cardinal $\aleph_\xi$ se llama inaccesible, cuando $\xi$ es un número límite, $\aleph_\xi > \aleph_0$ y no se puede representar como la suma de números cardinales menores que $\aleph_\xi$ de tal suerte que la cantidad de sumandos es menor que $\aleph_\xi$. No se sabe si existen tales cardinales. Véase Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, pág. 181, Leipzig 1914.

para $n < \infty$, $\alpha < \Omega$, es decir, con $\aleph_0$ renglones y $\aleph_1$ columnas con las propiedades:

a) Cualesquier dos conjuntos del mismo renglón son ajenos, esto es $A^n_{\alpha_1} \cdot A^n_{\alpha_2} = 0$, para cada $n$, cuando $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

b) El conjunto unión de cada columna proporciona "casi" todo $Z$, esto es, con excepción de a lo sumo una cantidad numerable de elementos. En otras palabras: para cada $\alpha$, $(Z - \sum_{n=1}^{\infty} A^n_\alpha)$ es a lo sumo numerable.

Ya que la existencia de la medida (de la función $f$) es un invariante respecto a transformaciones biunívocas del conjunto $Z$, podemos suponer que el conjunto $Z$, con cuyos elementos se construyó la matriz, es aquel conjunto $Q$ para el que, según la condición (1), $f(Q) > 0$. Puesto que además, todo conjunto numerable, según (3) y (1), sólo pueden tener medida 0, se deduce que el conjunto unión de cada columna debe ser un conjunto de medida positiva: para cad $\alpha$, $f(\sum_{n=1}^{\infty} A^n_\alpha) > 0$.

Pero en cada columna debe aparecer un conjunto que contenga un conjunto para el cual $f > 0$.

El conjunto $\sum_{n=1}^{\infty} A^n_\alpha$ se puede representar en la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A^n_\alpha = A^1_\alpha + [A^2_\alpha - A^1_\alpha] + [A^3_\alpha - (A^1_\alpha + A^2_\alpha)] + \cdots [A^n_\alpha - \sum_{k=1}^{\infty} A^k_\alpha] + \cdots$$

donde claramente todos los conjuntos son ajenos entre sí. Cuando el conjunto unión se obtiene de una cantidad numerable de conjuntos ajenos entre sí, por la condición 3, al menos uno de esos conjuntos tiene medida positiva.

Ya que no obstante $A^n_\alpha - \sum_{k=1}^{n-1} A^k_n \subset A^n_\alpha$, ciertamente existe en cada columna un conjunto que contiene un conjunto de medida positiva.

Nuestra matriz tiene una cantidad innumerable de columnas y sólo $\aleph_0$ renglones, por lo que existe al menos un renglón en el que aparecen una cantidad innumerable de tales conjuntos. Pero esto es imposible, porque según b) los elementos del mismo renglón son ajenos entre sí y sólo pueden existir una cantidad numerable de conjuntos ajenos entre sí de medida positiva.

Resta construir la matriz. El conjunto $Z$ tiene cardinalidad $\aleph_1$, de acuerdo con la hipótesis. Por tanto, sus elementos se pueden poner como una sucesión transfinita:

$$p_1, p_2, \ldots, p_\alpha, \ldots \qquad \alpha < \Omega.$$

Para cada número ordinal $\alpha < \Omega$, formamos una sucesión de números naturales distintos de tipo $\alpha$:

$$n^\alpha_1, n^\alpha_2, \ldots, n^\alpha_\xi, \ldots \qquad \xi < \alpha.$$

El elemento $p_\alpha$ se agrega a los conjuntos:

$$p_\alpha \in A_\xi^{n^\alpha_\xi}, \quad \text{para cada } \xi < \alpha.$$

(Los conjuntos $A^\alpha_\xi$ son, en este sentido, imágenes inversas de la función que a cada par de números ordinales $\xi$, $\alpha$ asocia un número natural $n^\alpha_\xi$, de tal suerte que la asociación de $\alpha$ o, con más precisión, del elemento $p_\alpha$ se puede escribir: $p_\alpha \in A^n_\xi = \{n = n^\alpha_\xi\}$ para $\xi$ fijo).

Los superíndices, para un elemento de distintos números naturales, determinan los renglones. Cada elemento aparece por tanto, a lo sumo una vez en cada renglón; los conjuntos del mismo renglón son por consecuencia ajenos.

Con esto queda demostrado la primera propiedad de nuestro esquema: a).

En lo que a la segunda concierne, se deduce directamente de la formación de los elementos que todos los elementos cuyo número en la sucesión es $> \alpha$, se encuentran en la $\alpha$-ésima columna, esto es, todos con excepción de a lo sumo una cantidad numerable de ellos.

La matriz está construida y el teorema queda demostrado para $\aleph_1$.

2. Como se reconoce fácilmente, para cada conjunto $Z$ de cardinalidad arbitraria $\aleph_\xi$, cuando $\xi$ no es límite, se puede construir una matriz en forma similar; la matriz tiene entonces $\aleph_{\xi-1}$ renglones y $\aleph_\xi$ columnas. Cualesquier dos conjuntos del mismo renglón son ajenos, el conjunto unión de cada columna proporciona $Z$ con excepción de a lo sumo $\aleph_{\xi-1}$ elementos.

Podemos suponer que nuestra afiramción se ha demostrado para conjuntos de cardinalidad $< \aleph_\xi$. La probaremos para $\aleph_\xi$. Primero sea $\xi$ un número límite.

Podemos suponer que nuestra afirmación se demostró para conjuntos de cardinalidad $< \aleph_\xi$ y debemos probarla para $\aleph_\xi$. Primero consideramos que $\xi$ no es límite.

Distinguimos los dos únicos casos posibles:

$\alpha$) En la descomposición de $Z$ en $\aleph_{\xi-1}$ conjuntos, siempre existe alguno que contiene un conjunto de medida positiva.

$\beta$) Existe al menos una descomposición de $Z$ en $\aleph_{\xi-1}$ conjuntos en la que todos sus elementos tienen medida[1] 0.

Cuando $\alpha$ ocurre, definimos la matriz recién mencionada. Cada columna representa entonces una descomposición de $Z$ en $\aleph_{\xi-1}$ conjuntos. Así que entre ellos existe uno que contiene un conjunto de medida positiva. En vista de que existen más columnas que renglones, esto nos conduce, como ya sabemos, a una contradicción.

En el segundo caso existe una descomposición de $Z$ en $\aleph_{\xi-1}$ conjuntos, que no contienen subconjuntos de medida positiva.

La no existencia de la medida se obtiene aquí de la hipótesis de que los conjuntos que tengan cardinalidad menor a $\aleph_\xi$, sólo pueden tener medida 0, por lo que:



**Lema 1.** *Sean $m$ un cardinal no medible, $n$ un número cardinal que se puede representar como la suma de $m$ cardinales no medibles. Entonces $n$ tampoco es medible.*[2]

El lema se puede reformular ası: si el conjunto $Z$, en el que esta definida una función medida $f$ se descompone en $m$ conjuntos $A_\alpha$, donde $m$ no es medible, entonces, para al menos uno de esos conjuntos ocurre $f(A_\alpha) \neq 0$.

En efecto, si los sumandos tiene sólo medida 0, podríamos considerarlos como elementos de una nueva variedad, que entonces tendría cardinalidad no medible $m$. Una medida en $n$ definiría automáti-

[1] La posibilidad de medidas negativas, resulta totalmente simétrica a $\alpha$), por lo que no tenemos necesidad de tratarla por separado.

[2] El método de prueba está contenido en el trabajo de Banach citado.

camente una medida[1] en $\mathfrak{m}$, lo que contradice nuesta hipótesis.

En el caso $\beta$) se satisface claramente la hipótess del lema, por lo que queda demostrada la afirmación para $\beta$).

También en el caso, donde $\xi$ es un número límite accesible, el mismo lema conduce a la meta.

La accesibilidad garantiza una posibilidad de descomposición de $Z$ en $\aleph_\eta$ conjuntos de cardinalidad $< \aleph_\xi$, tal que $\aleph_\eta < \aleph_\xi$. Por la hipótesis para recursión transfinita todos estos álef no son medibles, así que se puede volver a aplicar el lema. Con esto (A) está demostrado.

**Observación.** *Note que hemos demostrado al mismo tiempo la siguiente afirmación por recursión transfinita: si $\aleph_\xi$ no es medible, tampoco lo es $\aleph_{\xi+1}$.*

Puede resultar de interés obtener la demostración de un hecho que hasta cierto punto tiene el carácter de un teorema de cubierta abstracto, que para la cardinalidad $\aleph_1$ afirma:

*(B) Si todos los subconjuntos de un conjunto $Z$ de cardinalidad $\aleph_1$ se reparten en dos clases $M$ y $N$, de tal suerte que en $M$ existen a lo sumo una cantidad numerable de conjuntos ajenos entre sí, entonces en $N$ están presentes una cantidad numerable de conjuntos $\{A_n\}$ tales que $(Z - \sum_{n=1}^{\infty} A_n)$ es a lo sumo numerable.*

Esto se desprende de la existencia de la matriz para $\aleph_1$: Dado que en $M$ sólo existen una cantidad numerable de conjuntos ajenos entre sí, en la matriz debe existir una columna que sólo contiene elementos de $N$. (En otro caso existiría en cada columna un conjunto de $M$. Entonces esos conjuntos aparecerían en cantidad innumerable en un renglón, así ajenos entre sí, lo cual es imposible). Las columnas proporcionan la cantidad numerable buscada de conjuntos que cubren a $Z$, con la posible excepción de una cantidad numerable de elementos.

Un teorema correspondiente se cumple para cardinalidades mayores.

Queda abierta la pregunta, de si el teorema de cubierta en su versión para $\aleph_1$ sigue siendo válido para todas las cardinalidades.

La condición de que $f$ sea una función real no se utilizo completamente en la demostración.

La demostración tanscurre casi sin cambios cuando a $f$ se le exige que su rango recorra un cuerpo de números, donde sólo se admite la suma de una cantidad numerable de elemntos distintos de "cero".

Para $\aleph_1$ esto se sigue directamente del "teorema de cubierta", cuando $M$ significa la clase de los conjuntos con medida distinta de cero.

El teorema afirma, a saber, que existe una cantidad numerable de otros conjuntos así de medida 0, que juntos producen un conjunto de medida $\neq 0$, lo que esta en contradicción con la condición 3.

**Observación 2.** *Si un número cardinal $\mathfrak{m}$ no es medible, entonces ningún cardinal $\mathfrak{n}$ menor es medible.*

Demosración. Cuando existe una media en el conjunto $Z$, podemos definir la función medida $f$ en cada conjunto $Y$ que contenga a $Z$ de la siguiente manera: un subconjunto $Y'$ de $Y$ contiene siempre un subconjunto (quizá vacío) $Z' = ZY'$ de $Z$. Hacemos simplemente: $f(Y') = f(Z')$.

[1]Basta asignar la medida a un subconjunto de la variedad, que tiene la unión de los conjuntos que contienen a los elementos de ese subconjunto.

Se verifica fácilmente que se satisfacen las condiciones 1-3. Hemos mostrado: si $n$ es medible, entonces así lo es cualquier cardinal $m > n$, lo que naturalmente es equivalente con la observación 2.

Después de una sencilla reflexión se deduce que de (A), del lema 1 y de la observación 1 se logra la formulación de Banach mencionada al inicio.

## §2.

Queremos demostrar algunos teoremas sobre una medida de una estructura muy especial. Se trata de una función que sólo toma los valores 0, respectivamente 1, una medida "bivaluada". Probamos el:

**Teorema 1.** *De no poder definirse en un conjunto de cardinalidad $m$ una medida bivaluada, entonces tampoco es posible definir tal medida para conjuntos $N$ de cardinalidad*[1] $2^m$.

Demostración. Pimero notamos que no puede existir una descomposición del conjunto $N$ en $m$ subconjuntos ajenos de medida 0, de existir una medida bivaluada en $N$. Mediante la aplicación de las leyes de De Morgan esta observación da lugar a que la intersección de $m$ conjuntos de medida 1 es a su vez un conjunto de medida 1. A saber, esta observación se corrobora por el lema 1 de §1, reformulado para medidas bivaluadas.

Podemos representar al conjunto $N$ de cardinalidad $2^m$ como el conjunto de sucesiones tranfinitas del mismo tipo de cardinalidad $m$ cuyos meimbros son 0 o 1.

Descomponemos el conjunto en dos subconjuntos ajenos, si para alguna posición colectamos las sucesiones transfinitas que tiene cero, respectivamente 1, en esa posición. Cuando efectuamos esta descomposición para todas las posiciones de la sucesión, logramos $m$descomposiciones en dos conjuntos ajenos. Ya que nuestra media debe ser bivaluada, uno de estos subconjuntos debe tener medida 1, mientras el otro tiene medida 0.

De cada descomposición escogemos el conjunto de medida 1 y formamos la intersección de los $m$ conjuntos así obtenidos. Esta intersección consta de un único elemento, como se verifica con facilidad – una sola sucesión, por lo que debe tener medida 0. Pero cada intersección de $m$ conjuntos de medida 1 debe tener medida 1. Suponer que existe una medida bivaluada en $N$ nos condujo a una contradicción.

**Teorema 2.** *Si se puede definir una función medida $f$ en un conjunto $Z$, pero no una medida bivaluada, entonces para cada natural $n$ se puede descomponer el conjunto $Z$ en una cantidad finita de partes, cada una de medida $\leq \frac{1}{n}$.*

Demostración. Primero probamos (a): Si en el espacio $Z$, donde está definida una función medida $f$, se satisface la condición:

($\delta$) No existe conjunto alguno de medida positiva $\delta$ tal que cada subconjunto de ese conjunto tenga medida $\delta$ o 0, entonces se cumple: para cada $\varepsilon > 0$ se puede descomponer $Z$ en una cantidad

[1]este teorema fue encontrado en forma independiente por A. Tarski.

finita de conjuntos:

$$Z = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$$

de tal suerte que[1]

$$f(E_i) \leq \varepsilon \qquad (i = 1 \ldots k).$$

Por simplicidad imponemos $f(Z) = 1$. Basta probar el teorema para $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Porque cuando $Z = E_1 + E_2 + \cdots + E_k$ con $f(E_i) \leq \frac{1}{2}$, dado que en cada $E_i$ se cumple también la condición de $\delta$, podemos emplear el teorema otra vez en cada $E_i$, de tal forma que cada $E_i$ se puede descomponer en una cantidad finita de conjuntos con medida $\leq \frac{1}{2^2}$; con ello, queda claro que $Z$ mismo se puede descomponer en tales conjuntos, y así sucesivamente.

Mostramos: de la invalidez de la afirmación (a) se garantiza la existencia de una sucesión transfinita: $P_1 \supset P_2 \supset \cdots \supset P_\alpha \supset \cdots \ \alpha < \Omega$, tal que (1): $f(P_\xi) < f(P_\eta)$ para $\xi > \eta$, (2): $f(P_\alpha) > \frac{1}{2}$ para cada $\alpha < \Omega$.

Esto es claramente imposible; una sucesión decreciente de números reales no puede tener cardinalidad $\aleph_1$.

Definimos la sucesión $P_\alpha$ por inducción transfinita: sea $P_1 = Z$ y supongamos ya se construyó la sucesón $P_1, P_2, \ldots, P_\xi, \ldots \ \xi < \eta < \Omega$.

Formamos la intersección $R = \Pi_{\xi<\eta} P_\xi$. Por la aditividad numerable se cumple $f(R) \geq \frac{1}{2}$. Si $f(R) = \frac{1}{2}$, entonces $E = R + (E - R)$ (¡$f(E - R) = \frac{1}{2}$!) en oposición a la hipótesis de la invalidez de nuestra afirmación. Así que $f(R) > \frac{1}{2}$. Sea $R = R_1 + R_2$, donde $f(R_1) \geq f(R_2) > 0$, una descomposición de $R$ (tal descomposición siempre existe, pues se satisface $(\delta)$). Debe ocurrir $f(R_1) > \frac{1}{2}$: de lo contrario la descomposición $E = (E - R) + R_1 + R_2$ nos pondría otra vez en contradicción con nuestra hipótesis. Hacemos $P_\eta = R_1$. Ya qe $f(R_2)$ es positivo, así lo es

$$f(R_1) + f(P_\eta) < f(R) = f\left(\Pi_{\xi<\eta} P_\xi\right) \leq f(P_\xi), \qquad (\xi < \eta).$$

Con esto se satisfacen los requisitos (1) y (2). Se ha construido la sucesión transfinita, por lo que la demostración de la afirmación (a) concluye.

Ahora para la prueba del teorema 2, claramente basta comprobar la validez de la condición $(\delta)$ a partir de la inexistencia de la medida bivaluada.

Si existiese, contrario a $(\delta)$, un conjunto $Y$ con medida $\delta$, tal que cada subconjunto de este conjunto tiene medida $\delta$ o 0, entonces se puede definir una medida bivaluada en $Z$: para un conjunto $Z' \subset Z$:

$$f(Z') = \frac{f(Z'Y)}{\delta}.$$

Ahora derivamos algunas consecuencias de la hipótesis (I).

Como ya dijimos, de la validez de (I) se obtiene una generalización del resultado de Vitali: no se puede definir una función medida en el intervalo $(0, 1)$.

**Teorema 3.** *Si se puede definir una medida en un conjunto Z, entonces se puede definir una medida bivaluada en Z (con la hipótesis I).*

[1] El teorema se puede formular también así: cuando $Z$ no contiene ningún subconjuntos con medida positiva “irreducible”, entonces $Z$ se puede cubrir con una cantidad finita de conjuntos tan “delgados” como se quiera.

Demostración: de no poderse definir un medida bivaluada, según el teorema 2 de este párrafo, podríamos encontrar, para cada $n$, una descomposición de $Z$:

$$
\begin{array}{l}
Z = A_1^1 + A_2^1 + \cdots A_{m(1)}^1 \\
Z = A_1^2 + a_2^2 + \cdots A_{m(2)}^2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Z = A_1^n + A_2^n + \cdots A_{m(n)}^n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

de tal forma que $f(A_k^n) \leq \frac{1}{n}$ para $k = 1, 2, \ldots m(n)$.

Formamos la intersección

$$Z = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m(n)} A_k^n = \sum_{k_n \leq m(n)} A_{k_1}^1 \cdot A_{k_2}^2 \cdots A_{k_n}^n \cdots$$

a la derecha tenemos el continuo $\mathfrak{c}$ de conjuntos, todos de medida 0, siendo la intersección de conjuntos de medida arbitrariamente pequeña.

Si notamos que por la primera consecuencia de la hipótesis (I) $\mathfrak{c}$ no es medible, y aplicamos el lema 1, obtenemos que $Z$ tampoco es medible, contrario a nuestra hipótesis.

De la validez de (I) se infiere además:

**Teorema 4.** *De no ser $\mathfrak{m}$ medible, tampoco lo es $2^{\mathfrak{m}}$.*

Por ejemplo $\mathfrak{f} = 2^{\mathfrak{c}}, 2^{\mathfrak{f}}$, etc. Según el teorema 3, es suficiente demostrar la inexistencia de la medida bivaluada. Pero esto es el teorema 1 de este párrafo.

En resumen: la "clase" de los álef no medibles contiene: (1) $\aleph_0$; (2) junto con $\aleph_\xi$ también a $\aleph_{\xi+1}$; (3) junto con $\mathfrak{m}$ a los álef $< \mathfrak{m}$ (observación 1); (4) junto con $\mathfrak{m}$ toda unión de $\mathfrak{m}$ conjuntos que pertenezcan a la clase (por el lema 1); finalmente (5): suponiendo la hipótesis (I) por el teorema 4, junto con $\mathfrak{m}$ a $2^{\mathfrak{m}}$.

En lo que respecta al producto de números cardinales, se observa que, como cada producto se puede acotar mediante una sumas y potencias, (el producto de $\mathfrak{m}$ números cardinales:

$$\aleph_{\xi_1} \times \aleph_{\xi_2} \times \cdots \aleph_{\xi_\alpha} \times \cdots \text{ es } \leq 2^{\aleph_{\xi_1} + \aleph_{\xi_2} + \cdots + \aleph_{\xi_\alpha} + \cdots})$$

y la cota es, de acuerdo con nuestra observación, no medible, a la clase de los álef no medibles pertenecen aquellos, que se pueden representar como producto de una cantidad no medible de cardinales no medibles. Por lo tanto, bajo la hipótesi (I), aquellos números cardinales que no acotan inaccesibles en el sentido de Sierpiński y Tarski[1] no son medibles.

[1]Véase el trabajo de estos autores en Fund. Math., Vol. XV, pág. 292.