XXIV

Sobre números frontera y dominios de conjuntos Nuevas investigaciones sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos

Título original: Über Grenzzahlen und Mengenbereiche
Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre
Von Ernst Zermelo (Freiburg i. Br)

Math. Ann. **25**(1930), 261-281.

Este trabajo investiga los "dominios", consistentes en conjuntos y elementos primitivos, en los que se satisfacen los axiomas "generales" de la teoría de conjuntos (los "axiomas de Zermelo-Fraenkel" con un complemento), y también provee que tal "dominio normal" está determindado, módulos aplicaciones isomorfas, por dos números: por la cardinalidad de su "base", es decir, la totalidad de sus "elementos primitivos" (que no son conjuntos propios) y por su "característica", es decir, el tipo ordinal de las "sucesiones fundamentales" contenidas en él o de los ordinales representados en él por conjuntos. Se mostrará que estos dos números se pueden elegir en forma arbitraria e independiente uno del otro, en tanto la "característica" satisfaga las propiedades de ser un "número frontera", a saber, ser simultáneamente un "número núcleo" o un "número inicial regular" y "valor propio" o "número crítico" de cierta "función normal ". La extensión sin restricciones de la sucesión de números transfinitos permite la representación de la teoría de conjuntos como una sucesión también ilimitada de "modelos " distinguibles. Y esta notable diferencia entre distintos modelos del sistema axiomático (¡no categórico!) nos permite eludir las "paradojas ultrafinas", haciendo que los "no conjuntos" de un modelo se representen como "conjuntos" en el siguiente modelo y en todos los superiores.

Como auxiliares de nuestra investigación se brindan las "sucesiones fundamentales", a saber, los representantes más simples, presentes en cualquier domino normal, de distintos números ordinales, y el "desarrollo" del domino normal, su descomposición en una sucesión bien ordenada de "capas" separadas, donde los conjuntos pertenecientes a una capa siempres están "enraizados" en la capa previa, de tal suerte que sus elementos están en esas capas y sirven como material para las siguientes.

§1. Los axiomas constituyentes

El sistema axiomático base de nuestra investigación es esencialmente el "Zermelo-Fraenkel", a saber, el sistema de mis axiomas de 1908[1] complementado por el "axioma de remplazo" de Fraenkel con la modificación de que se elimina mi "axioma de infinito" porque no pertenece a la teoría de conjuntos "general" y por otro lado se añade el "axioma de fundación", con lo que se excluyen conjuntos "circulares" y "no fundados". Según esto llamamos a los siguientes axiomas "sistema ZF complementado" o brevemente "sistema ZF' "

B) **Axioma de determinación**: cada conjunto está determinado por sus elementos, en tanto posea elementos.

A) **Axioma de separación**: mediante cada función proposicional $\mathfrak{f}(x)$ se separa de cualquier conjunto m un subconjunto $m_{\mathfrak{f}}$ que comprende a todos los elementos x para los que $\mathfrak{f}(x)$ es verdadera. O: a cada parte de un conjunto corresponde un conjunto que contiene los elementos de esa parte.[2]

P) **Axioma de par**: si a, b son dos elementos, existe un conjunto que los contiene a ambos.

U) **Axioma de potencia**: a cada conjunto m corresponde un conjunto $\mathfrak{U}m$, que contiene como elementos todos los subconjuntos de m, incluyendo al conjunto vacío y m mismo. En lugar del conjuto vacío aparece aquí un "elemento primitivo" u_0 elegido arbitrariamente.

V) **Axioma de unión**: a cada conjunto m corresponde un conjunto $\mathfrak{S}m$, que contiene a los elementos de sus elementos.

E) **Axioma de remplazo**: si se remplaza el elemento x de un conjunto m en forma unívoca por un elemento arbitrario x' del domino, éste contiene un conjunto m' que tiene a todos estos x' como elementos.

F) **Axioma de fundación**: cada cadena (decreciente) de elementos, en la que cada miembro es elemento del previo, se estaciona en un índice finito en un elemento primitivo. O, lo que es equivalente, todo subdominio T contiene al menos un elemento t_0 que no contiene ningún elemento t en T.

Este último axioma que excluye "circularidad", conjuntos "miembros de sí mismos", en general, conjuntos "sin raíces", se satisface en todas las aplicaciones hasta ahora de la teoría de conjuntos y no propicia ninguna restricción esencial en la teoría.

No nos concierne la "independencia" de los axiomas: en un marco apropiado, se puede derivar A) de E) o P) de U) y E). El "axioma de elección" no se formula aquí explícitamente, pues tiene otro caracter, distinto al del resto y no sirve para acotar los dominios. No obstante, estará en la base de toda nuestra investigación como un principio lógico general, y por este principio se podrá suponer bien ordenado cada conjunto que aparezca en lo sucesivo.

Este sistema axiomático **BAPUVEF**, que llamaremos *sistema ZF'*, será tomado como punto de partida y denotamos "dominio normal" a un dominio de "conjuntos" y "elementos primitivos", que satisfacen

[1]Math. Ann. **65**, págs. 261-281.

[2]La función proposicional $\mathfrak{f}(x)$ puede ser aquí totlamente *arbitraria*, lo mismo que la función remplazo en E), y todas las consecuencias de restringirla a una clase particular de funciones dejan de tener efecto por el punto de vista aceptado aquí. En otro lugar consideraré con más detalle la cuestión de "definición" [En inglés *definiteness*, que quizá pueda traducirse como inequívoco, definido, explícito, definido. N. del T.] en conexión con mi último trabajo en esta revista (Fund. Math. Vol. XIV, págs. 339-344) y con la crítica del Sr. Th. Skolem (mismo lugar Vol. XV págs. 337-341).

nustro sistema ZF' mediante la relación $a \in b$. "Los dominios" de este tipo, sus "elementos", sus "subdominios", su "suma e intersección" serán tratados exactamente como conjuntos, de los que no se distinguen en forma sustancial, en las nociones generales de teoría de conjuntos y en los axiomas. Pero siempre los llamaremos "dominios" y no "conjuntos" para diferenciarlos de los "conjuntos" que son elementos de los dominios en cuestión.

§2. Las sucesiones fundamentales de un dominio normal y su característica.

Como "sucesión fundamental" denoto un *conjunto bien ordenado en el que cada elemento (con excepción del primero, que debe ser un "elemento primitivo"), es idéntico con el conjunto de sus predecesores*.

A partir del elemento primitivo u se generan las sucesiones fundamentales:

$$g_0 = u, g_1 = \{u\}, g_2 = \{u, \{u\}\}, g_2 = \{u, \{u\}, \{u, \{u\}\}\},$$

y se continua según la regla

$$g_{\alpha+1} = g_\alpha + \{g_\alpha\} \quad \text{y} \quad g_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} g_\beta \text{ cuando } \alpha \text{ es un número límite.}$$

En general, una sucesión fundamental es *un conjunto ordenado mediante la $\in$-relación*, que por F) también debe ser *bien ordenado*, y se se cumplen para él los siguientes teoremas fáciles de verificar:

1. Todo elemento contenido en una sucesión fundamental es elemento de las sucesivas y contiene como elementos las previas.

2. Cada elemento y toda scción de una sucesión fundamental son sucesiones fundamentales.

3. De cada sucesión fundamental se origina una nueva si se añade a sus elementos como elemento final al conjunto mismo: $g' = g + \{g\}$, donde su tipo ordinal se incrementa exactamente por 1.

4. De cada conjunto T de sucesiones fundamentales con elemento inicial u idéntico se origina mediante unión una nueva sucesión fundamental $\mathfrak{S}T$, que contiene los elementos de T como segmentos y, exceptuando a él mismo, también como elementos. También aquí el tipo ordinal de la nueva sucesión fundamental es el sucesor de el de la dada.

5. De dos sucesiones fundamentales distintas con elemento inicial idéntico, una siempre esta contenida en la otra como elemento y segmento. A saber, aquella con menor tipo ordinal, que llamaremos simplemento "la menor".

6. Si u es un elemento primitivo y r un conjunto bien ordenado en tipo ρ en un dominio normal, este dominio contiene también una sucesión fundamental g_ρ similar con u como elemento inicial a r.

   Supongamos cierto el teorema para los ordinales $\rho < \alpha$, también se cumple para $\rho = \alpha$. Pues, ya sea $\alpha = \beta + 1$ y g_β tiene tipo β, en cuyo caso, por 3), g' tiene tipo $\beta + 1 = \alpha$. O α es un número límite, en tal caso la unión $\sum g_\beta$ de los $g_\mathfrak{b}$ para $\beta < \alpha$ es una sucesión fundamental por 4) y, de hecho, de tipo α, que cada uno de sus segmentos propios es un $g_\beta < g_\alpha$.

7. La totalidad de las sucesiones fundamentales g_α contenidas en un dominio normal P con elemento inicial común u conforman un subdominio G_α de P, y los correspondientes números ordinales α forman un segmento bien definido Z_π de la sucesión de números de tipo de orden π, pero el dominio no contiene un "conjunto" $\mathfrak{w}$ que contenga como elementos todas estas sucesiones fundamentales, y menos aún un conjunto bien ordenado de tipo de orden π, sino que π es la cota superior de los números ordinales representados en P por conjuntos. De lo contrario, se originaría la conocida "paradoja de Burali-Forti".

   El ordinal así definido π, que aquí se llamará "número frontera" o "característica" del dominio normal, no es arbitrario, sino que debe tener "caracter de número frontera", satisfacer ciertas condiciones. Éstas son las siguientes:

I) Todo número frontera tiene "caracter de número núcleo", es decir, es un "número inicial regular", a saber, no es "cofinal" con ninguno menor.[1]

En efecto, si π fuese cofinal en $\rho < \pi$, el segmento Z_π de la sucesión de números contendría una subsucesión, de tipo ordinal ρ consistente en números $\alpha_\nu < \pi$, que no pertenece a ningún segmento propio $Z_\alpha < Z_\pi$. A cada uno de estos números α_ν le correspondería en P una sucesión fundamental g_{α_ν} de mismo tipo ordinal, y también la unión de estas g_{α_ν} sería por 4) a su vez una sucesión fundamental g_α del dominio normal, mientras que su tipo ordinal debería ser por hipótesis $\alpha = \lim \alpha_\nu = \pi$. Así, π es un "número núcleo" o un "número inicial regular", y de hecho, como veremos, uno de "segundo tipo", un número "exorbitante". (Hausdorff loc. citus pág. 131). A saber, si cumpliese $\pi = \omega_{\nu+1}$, se tendría $\omega_\nu < \pi$, y el dominio contendría una sucesión fundamental g_{ω_ν} de este tipo así como el correspondiente conjunto potencia $m = \mathfrak{U}g_{\omega_\nu}$ de número cardinal $\mathfrak{m} > \overline{\omega}_\nu$, así $\mathfrak{m} \geq \overline{\omega}_{\nu+1} = \overline{\pi}$, en oposición a la definición de π.

Si se hubiese demostrado la hipótesis de Cantor que el conjunto potencia $\mathfrak{U}m$ siempre es la siguiente cardinalidad mayor, de $\mathfrak{m} < \overline{\pi}$ se seguiría $2^{\mathfrak{m}} < \pi$ y todo número "exorbitante" π sería también un "número frontera" de un dominio normal.[2] Dado que, como se sabe, esta pregunta está aun sin resolver, para caracterizar a los "números frontera" requerimos una condición adicional, que aquí se establecerá con ayuda de cierta "función normal".[3]

Si ξ es un ordinal representado en dominio normal arbitrario, éste contiene, por U), aparte de la sucesión fundamental g_ξ, una sucesión fundamental con índice $\xi^* = \varphi(\xi)$, el número inicial de la clase de números, a la que pertenece al número cardinal $2^{\overline{\xi^*}}$. [4] Esta función $\varphi(\xi)$ no es todavía un función normal, pues argumentos distintos ξ pueden corresponder al mismo valor funcional. Pero podemos lograr tal función iterando φ de la siguiente forma, si hacemos

$$1)\psi(0) = 0, \quad 2)\psi(\xi+1) = \psi(\xi)^* = \varphi\psi(\xi), \quad 3)\psi(\alpha) = \lim_{\xi<\alpha} \psi(\xi),$$

[1]Véase F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, 1. Aufl. Kap. IV §4.

[2]Véase R. Baer, *Zur Axiomatk der Kardinalzahlaritmetik*, Math. Zeitschr. **29**, págs. 382 y siguiente, y la nota 8 pág. 382.

[3]Hausdorff, loc. citus, Kap. V, 2 pág. 130. Respecto a la función normal particular $\psi(\xi)$ aquí empleada véase A. Tarski, Fund. Math. VII, págs. 1-15.

[4]Parece un error de Zermelo, debería ser $2^{\overline{\xi}}$ N. del T.

si α es un número límite. Así, la función ψ está determinado en forma unívoca para argumento arbitrarios ξ, y también satisface las condiciones para ser una función normal. Porque de $\alpha < \beta$ se sigue $\alpha + 1 \leq \beta$ y con esto por recursión transfinita

$$\psi(\alpha) < \psi(\alpha)^* = \psi(\alpha + 1) \leq \psi(\beta),$$

y de 3) se deduce que en general $\lim \psi(\alpha_\nu) = \psi(\lim \alpha_\nu)$, por lo que la función también es "continua". Mediante nuestra función $\psi(\xi)$ se aplica en forma similar y continua no sólo la sucesión de números completa sobre una parte de la misma, sino que todo segmento Z_π de un dominio normal se aplica en una parte de él mismo. A saber, si $\alpha < \pi$, entonces $\psi(\alpha) < \pi$, como se muestra por inducción. Supongamos que $\psi(\xi) < \pi$ para todo $\xi < \alpha$, entonces $\psi(\xi + 1) = \psi(\xi)^* < \pi$, pues el dominio normal contiene junto con cada conjunto m su conjunto potencia $\mathfrak{U}m$, así $\psi(\alpha) < \pi$, cuando α es de la primera clase. Pero si α es un número límite, los elementos de la sucesión fundamental g_α, que de hecho son sucesiones fundamentales g_ξ de tipo menor, corresponden unívocamente a las sucesiones fundamentales $g_{\psi(\xi)} < g_\pi$; esta últimas son, según E), elementos de un conjunto en P, y su unión $\sum g_{\psi(\xi)}$ es ella misma, de acuerdo con 4), una sucesión fundamental g_ρ del dominio normal. Aquí, $\rho = \lim_{\xi<\alpha} \psi(\xi) = \psi(\alpha)$, por lo que, como se afirmo, $\psi(\alpha) < \pi$. Si ocurriese $\pi < \psi(\pi) = \lim_{\alpha<\pi} \psi(\alpha)$, existiría $\alpha < \pi$ para el que $\psi(\alpha) > \pi$, en oposión a lo ya demostrado. Con ello se origina la segunda condición:

II) *todo "número frontera" o "característica" de un dominio normal es simultáneamente un "valor propio" o "número crítico" de nuestra función normal arriba definida $\psi(\xi)$.*

Estas dos condiciones, que cada "número frontera" debe satisfacer, son esencialmente independients entre sí, en tanto en I) se postule exclusivamente el caracter de número núcleo. Dado que no se puede ser número núcleo de primera clase, se sigue inmediatamente de la segunda condición: para dos números iniciales (transfinitos) sucesivo uno del otro ω_ν y $\omega_{\nu+1}$ se cumple $\omega_\nu < \omega_\nu + 1 < \omega_{\nu+1}$, por lo que

$$\omega_{\nu+1} \leq \omega_\nu^* \leq \psi(\omega_\nu)^* = \psi(\omega_\nu + 1) < \psi(\omega_{\nu+1}),$$

y ciertamente $\omega_{\nu+1}$ no puede ser un valor propio de la función normal. Por otro lado, según la hipótesis de Cantor, para cada número "exorbitante", todo "número núcleo" satisfaría la segunda condición.[1] Porque en este caso se tendría $\psi(\xi) = \omega_\xi$ para cualquier transfinito ξ y si $\xi < \pi$, ocurre $\omega_\xi < \pi$, la función normal ω_ξ tendría valores propios $< \pi$, y π como límite de estos valores propios sería él mismo un valor propio $\pi = \omega_\pi$. Aunque por lo pronto debemos considerar que la prtegunta no se decide, en lo siguiente se puede demostrar que las dos condiciones para "números núcleo" también son suficientes, a saber, que cualquier número π que satisfaga ambas condiciones aparece, de hecho, como la carcterística de un dominio normal.

§3. El desarrollo del dominio normal.

Por "dominio normal" entendemos todo dominio de "conjuntos" y "elementos primitivos" que satisfaga el sistema de axiomas ZF'. Tal dominio normal puede poseer también subdominios que por sí

[1] Véase Baer loc. citus, como en la nota en pág. 198.

mismos satisfacen los axiomas respecto a la $\in$-relación entre sus elementos, esto es, son dominios normales. A este respecto se cumple:

Lema. *Un subdominio M de un dominio normal P es un dominio normal cuando él 1) junto con cada uno de sus conjuntos m, contiene los elementos de m, y 2) contiene a cada conjunto m del dominio normal P, cuyos elementos x estén en M. Si, además, M comprende a toda la "base" del dominio total P, entonces es idéntico con P.*

En efecto, en el caso supuesto, se cumplen los axiomas ZF' en M, en tanto se satisfagan en P, en particular U), V) se cumplen por 2). Naturalmente, el "axioma de remplazo" E) se debe entender aquí de tal forma que los elementos x', que deben remplazar a los elementos x, deben pertenecer al subdominio M. En el caso especial, donde M incluye a toda la base, el dominio resto $R = P - M$ no contiene ningún elemento primitivo, y cada uno de sus elementos sería un conjunto r, cuyos elementos, que por la hipótesis no todos están en M, al menos parcialmente deben aparecer en R, en oposición al axioma F).

En cambio, es posible que un dominio normal con base más pequeña $Q' \subset Q$ esté contenido en uno mayor. Uno así se origina de P mediante restricción a aquellos conjuntos cuyas cadenas decrecientes de elementos $m \ni m_1 \ni m_2 \ni m_3 \cdots$ terminen exclusivamente en elementos primitivos de Q', de acuerdo con F).

Primer teorema de desarrollo. *Cada dominio normal P de característica π se puede descomponer en una sucesión bien ordenada en tipo π de "estratos" Q_α no vacíos y ajenos entre sí, de tal suerte que cada estrato Q_α contiene a los elementos de P que no han aparecido en estratos previos y pertenezcan al segmento correspondiente P_α, es decir a la suma de los estratos previos. El primer estrato Q_0 contiene a todos los elementos primitivos.*

Los subdominios *o "segmentos"* P_α se definen por recursión transfinita mediante la prescripción:

1. $P_1 = Q_0 = Q$ contiene la base completa, la totalidad de los elementos primitivos.
2. $P_{\alpha+1} = P_\alpha + Q_\alpha$ debe contener todos los elementos de P "enraizados", esto es, aquellos cuyos elementos están en P_α.
3. Si α es un número límite, entonces P_α es la suma o unión de los P_β previos con índice menor $\beta < \alpha$.

Mediante esta prescripción cada P_α, y por tanto también $P_\pi = \sum_{\alpha<\pi} P_\alpha$ están totalmente determinados por los previos y satisfacen las hipótesis del teorema, en tanto se puede comprobar que P es idéntico a P_π. Aquí cada capa $Q_\alpha = P_{\alpha+1} - P_\alpha$ contiene siempre a las sucesiones fundamentales g_α de mismo índice, como se verifica por inducción. Porque $g_0 = u$ está en $Q_0 = P_1$, y si la afirmación se cumple para todos los índices menores $\beta < \alpha$, entonces los elementos de g_α, que de hecho son sucesiones fundamentales g_β, pertenecen a las capas previas Q_β y por ende en P_α, g_α mismo sin falta está en $P_{\alpha+1}$, pero no en P_α, pues de estar, pertenecería a una capa Q_β, que contiene a g_β, así, un elemento de g_α, en oposición a la construcción. Así, g_α también está en Q_α, y esta capa no es vacía.

Para emplear el lema previo en el subdominio P_π de P, consideramos un conjunto r del dominio normal, cuyos elementos están en P_π, digamos r_ν en la capa Q_{α_ν}. Estos números ordinales α_ν, que no necesariamente son distintos, conforman un conjunto bien ordenado en tipo $\rho < \pi$, ya que su cardinalidad no puede ser mayor a la de r. Puesto que π no es cofinal en uno menor según I), siendo un "número núcleo", entonces todos estos α_ν tienen una cota superior $\alpha < \pi$, y todos los r_ν, los elementos de r, están contenidos en P_α, r mismo en $P_{\alpha+1}$ y por tanto en P_π. Por lo tanto, el subdominio contiene a todos los conjuntos de P "enraizados" en él, así como todos los elementos de sus elementos, y como contiene a toda la base, es idéntico al dominio normal en construcción, lo que concluye la demostración de nuestro teorema.

Llamamos "dominio unitario" a un dominio normal con "número base" 1, es decir, aquel que se origina de un sólo elemento primitivo, entonces se cumple en su desarrollo el siguiente teorema:

Segundo teorema de desarrollo. *En la construcción de un dominio unitario cada segmento P_α tiene cardinalidad $\psi(\alpha)$, contiene sólo conjuntos de menor cardinalidad, mientras que la capa correspondiente Q_α contiene conjuntos de esta cardinalidad. Todo segmento de primer tipo $P_{\beta+1}$ contiene como conjuntos todos los subdominios del $P_{\beta+1}$ previo inmediato P_β, cada segmento de segundo tipo contiene los segmentos previos y sus subdominios. El dominio unitario mismo tiene la cardinalidad de su característica π y contiene como conjuntos de sus subdominios de menor cardinalidad.*

La demostración se efectúa otra vez por inducción transfinita con la suposición de que la afirmación se cumple para P_α para todo índice menor $\beta < \alpha$, lo que seguro se cumple para $\beta = 1$, $P_1 = Q$, $\psi(1) = 1$. Sea ahora $\alpha = \beta + 1$ de primer titpo y por hipótesis P_β tendría la cardinalidad de $\psi(\beta) < \psi(\pi) = \pi$ y sólo contiene conjuntos de menor cardinalidad que $\psi(\beta)$, a saber, todos los segmentos menores y sus subconjuntos. Entonces $P_\alpha = P_\beta + Q_\beta$ contiene todos los subconjuntos de P_β y sólo esos, pues cada subconjunto de uno menor también es parte de uno mayor. Así, $P_\alpha = P_{\beta+1}$ tiene cardinalidad $\mathfrak{p}_\alpha = 2^{\overline{\psi(\beta)}} = \overline{\psi}(\beta+1) = \overline{\psi(\alpha)}$, contiene sólo conjuntos con cardinalidad $\leq \overline{\psi(\beta)} < \overline{\psi(\alpha)}$. En cambio, la capa correspondiente Q_α contiene, como conjunto, uno de esa cardinalidad $\overline{\psi(\alpha)} < \overline{\pi}$, a saber, P_α mismo, que por el axioma de remplazo debe estar presente en P; pero tampoco contiene uno mayor, ya que Q_α se formó sólo con subconjuntos de P_α. Si α es límite $< \pi$, así $P_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} P_\beta$ es la suma de los segmentos menores P_β, que por hipótesis poseen las propiedades de la afirmación, por lo que P_α contiene como elementos sólo subconjuntos de tales dominios P_β y de hecho, todos esos subconjuntos, pues cada subconjunto de P_β está contenido en el siguiente segmento $P_{\beta+1}$ como elemento. Todos estos conjuntos tienen cardinalidad no mayor que $\overline{\psi(\beta)} < \overline{\psi(\alpha)}$, y la cardinalidad del segmento P_α mismo está dada por

$$\mathfrak{p}_\alpha = \lim_{\beta<\alpha} \mathfrak{p}_\beta = \lim_{\beta<\alpha} \overline{\psi(\beta)} = \overline{\psi(\alpha)} \leq \overline{\pi}$$

Para cada $\alpha < \pi$ tiene entonces la capa Q_α también la propiedad requerida, contiene conjuntos de cardinalidad $\overline{\psi(\alpha)}$, pero no mayores, a saber P_α mismo y sus subconjuntos. Para $\alpha = \pi$ se obtiene como cardinalidad de P el valor $\lim_{\alpha<\pi} \overline{\psi(\alpha)} = \overline{\psi(\pi)} = \overline{\pi}$. En consecuencia, a cada subdominio de menor cardinalidad que π corresponde en P una sucesión fundamental equivalente y por E) también un conjunto que incluye a todos sus elementos. Para dominios unitarios, pero de ninguna manera para dominios generales, se cumple el "axioma" de Von Neumann, donde tales subdominios sería "tan grandes", que no pueden aparecer como "conjuntos", y tiene la misma cardinalidad que la del dominio total.[1] No obstante, la teoría de conjuntos perdería en gran medida su aplicabilidad al restringirnos a "dominios unitarios".

Basándonos en los conocimientos adquiridos podemos modificar el desarrollo de un dominio normal arbitrario de tal forma que en cada "capa" Q_α sólo se incorporan aquellos conjuntos de P cuya cardinalidad no es mayor que la del caso del dominio unitario, a saber, $\leq \overline{\psi(\alpha)}$. Al final, a todos los conjuntos de P les toca su turno, ya que para $\alpha < \pi$ siempre ocurre $\psi(\alpha) < \psi(\pi) = \pi$ y como $\pi = \lim_{\alpha<\pi} \psi(\alpha)$ cada número $\rho < \pi$ es sobrepasado por un valor $\psi(\alpha)$. El desarrollo "canónico" así elaborado tiene la ventaja de que la separación de cada capa individual Q_α es independiente del dominio total y su característica, sólo se determina por su índice y la "base" del dominio normal, y por tanto, para una base dada el desarrollo para distintos números frontera siempre coincide al principio.

Tercer teorema de desarrollo (Teorema del desarrollo canónico). *Cada dominio normal con base Q admite una descomposición en una sucesión bien ordenada, que inicia con Q, de "capas" separadas Q_α, donde a su vez la suma de las previas corresponde a un segmento y toda Q_α contiene como conjuntos a todos aquellos subdominios del segmento correspondiente P_α y que no están en el segmento mismo y tienen cardinalidad no mayor a la de $\psi(\alpha)$. Esta última restricción se elimina en el caso de "dominios unitarios", donde los desarrollos "libre" y "canónico" coinciden. En el desarrollo "canónico" cada uno de tales segmentos P_τ es en sí mismo un dominio normal, cuyo índice τ satisface las condiciones I, II de un "número frontera".*

La demostración es análoga a la del primer teorema de desarrollo. Al igual que ahí, primero se definen por inducción los segmentos P_α y capas Q_α mediante la prescripción:

1. $P_1 = Q_0 = Q$.
2. $P_{\alpha+1} = P_\alpha + Q_\alpha$ contiene todos los conjuntos del dominio normal P, cuyos elementos estén en P_α y cuya cardinalidad es $\leq \overline{\psi(\alpha)}$.
3. Para cada número límite α siempre ocurre $P_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} P_\beta$, la suma de los P_β menores.

Así quedan unívocamente determinadas los segmentos P_α y las correspondientes capas $Q_\alpha = P_{\alpha+1} - P_\alpha$ para cada índice $\alpha \leq \pi$, y P_π es un subdominio de P bien determinado, que es idéntico a P según el lema, porque contiene a toda la base, los elementos de sus elementos y todos los conjuntos de P enraizados en él. La última condición se satisface aquí también, pues cada conjunto r de P enraizado en P_α de cardinalidad $\overline{\rho} < \overline{\psi}$ aparece a más tardar en la capa Q_ρ ya que $\rho \leq \psi(\rho)$.

Ahora, sean $\tau \leq \pi$ un número de caracter número frontera y P_τ el segmento correspondiente del desarrollo canónico de P. Entonces él contiene por construcción conjuntos de cardinalidad $\overline{\rho} \leq \overline{\psi(\alpha)} < \overline{\psi(\tau)} = \overline{\tau}$, pues cada uno debe pertenecer a una capa Q_α para $\alpha < \tau$. Recíprocamente todo conjunto r enraizado en P_τ de cardinalidad $< \overline{\tau}$, pues τ es un "número frontera", debe esta enraizado en un segmento menor P_α y pertenecer a uno mayor P_γ, donde γ no tiene por que ser mayor que

[1] J. v. Neumann, La axiomatización de la teoría de conjuntos, Math. Zeitschr. Vol. 26 págs. 669-752, 1928. Aquí se trata del axioma IV. 2, que se explica en la pág. 677, entre otras.

el tipo ordinal ρ de r, ya que $\rho \leq \psi(\rho)$. Así, P_τ contiene todos los conjuntos de P enraizados en él cuya cardinalidad sea menor que $\overline{\tau}$, en particular aquellos formados por remplazo dentro de P_τ. Si r es un conjunto arbitario en P_τ y bien ordenado según $\rho < \tau$, entonces $\psi(\rho) < \psi(\tau) = \tau$, así como $2^{\overline{\rho}} \leq 2^{\overline{\psi(\rho)}} = \overline{\psi}(\rho + 1) < \overline{\tau}$ y junto con r, también $\mathfrak{U}r$ son elementos de P_τ. Finalmente, si r_ν es una sucesión bien ordenada en tipo $\sigma < \tau$ de números cardinales $< \overline{\tau}$, entonces tiene una cota superior $\overline{\mathfrak{r}'} < \overline{\tau}$, pues de lo contrario τ sería cofinal en σ y no sería un número núcleo, y también $\sum_\nu \mathfrak{r}_\nu \leq \overline{\sigma}\mathfrak{r}' < \overline{\tau}$, es decir, también se satisface el axioma V) en segmentos P_τ, de hecho este es un dominio normal. Con ello se ha demostrado a su vez que las condiciones I, II en §2 para la característica de un dominio normal también son suficientes, y que todo número ordinal τ que cumpla esas condiciones puede aparecer como "número frontera" de un dominio normal. Por cierto, ahí se presupone que este número τ pertenece a un dominio que satisface los axiomas ZF'.

§4. Isomorfismos y automorfismos de los dominios normales.

Dos dominios normales P, P' son "isomorfos", cuando los elementos de uno se pueden aplicar en formma inyectiva sobre los elementos x' del otro, de tal suerte que cada relación primitiva $a \in b$ en uno implica la correspondiente $a' \in b'$ en el otro y viceversa. Así, en dominios isomorfos cada elemento primitivo u corresponde a un elemento primitivo u', todo conjunto m se asocia a un conjunto equivalente m', cada sucesión fundamental g_α corresponde a una sucesión fundamental g'_α del mismo índice, la "base" Q se aplica en una base equivalente Q' y el "número frontera" o la "característica" π se aplica en sí mismo. Que estas dos últimas condiciones para isomorfía también son suficientes, lo afirma el siguiente teorema.

Primer teorema de isomorfía. *Dos dominios normales de la misma característica y bases equivalentes son isomorfos, de hecho, la aplicación isomorfismo entre ambos está totalmente determinada por su efecto en las bases.*

Para probarlo nos auxiliamos de los "teoremas de desarrollo", donde podemos basarnos arbitrariamente en el "dearrollo canónico" o "libre". Así, consideramos que las bases Q y Q' de ambos dominios normales se aplican inyectivamente ua sobre la otra, de tal suerte que cada elemento primitivo u corresponde a uno determinado u', y probamos por inducción que cada segmento P_α del desarrollo de P se asocia a un segmento isomorfo P'_α en el desarrollo del otro, y de hecho en forma unívoca para todo $\alpha \leq \pi$. Dos segmentos P'_α, P'_β con índices diferentes no pueden ser, por tanto, isomorfos, pues el mayor contiene siempre sucesiones fundamentales que no corresponden a ninguna en el menor. Ahora supongamos que P_α se aplica isomórficamente sobre P'_α, lo que se presupone para $P_1 = Q, P'_1 = Q'$. Entonces se aplican simultáneamente todos los segmentos menores sobre tales segmentos de P', y para estas aplicaciones un determinado elemento x se aplica siempre en el mismo elemento x' de P'. Si r es un conjunto de A_α, sus elementos r_ν están en P_α, y los elementos correspondientes a ellos r'_ν en P'_α son por E) los elementos de un conjunto equivalente r', ya que por $\pi = \pi'$ el dominio normal P' sin duda contiene elementos de esa cardinalidad. Este conjunto r' debe aparecer en $P_{\alpha+1}$ aun en el caso del "desarrollo canónico", pero no en P'_α, de lo contrario, por la isomorfía, el conjunto correspondiente r estaría en P_α y no en Q_α. Por tanto, a cada elemento r de Q_α corresponde unívocamente un r' de Q'_α y recíprocamente, también el segmento $P_{\alpha+1} = P_\alpha + Q_\alpha$ se aplica isomórficamente sobre el segmento $P'_{\alpha+1}$ del otro dominio normal. Sea α un número límite, y se supondrá que para cada $\beta < \alpha$ el segmento

P_β se aplica isomórficamente sobre el segmento P'_β. Ya que aquí cada elemento x de P_α pertence a un P_β, él corresponde, para cada aplicación entre P'_β, P_β, a un elemento determinado x' de P'_α y cada vez que ocurre $a \in b$, también se tiene $a' \in b'$, pues siempre existe un segmento P_β que contiene a ambos elementos. Por ello P_α es isomorfo a P'_α para números límite arbitrarios $\alpha \leq \pi$, y como $P_\pi = P$, $P'_\pi = P'$, como se afirmó, ambos dominios normales son isomorfos.

Segundo teorema de isomorfismo. *Para dos dominios normales con bases equivalentes y números frontera distintos π, π', uno siempre es isomorfo a un segmento canónico del otro.*

En efecto, si $Q \sim Q'$ y $\pi' > \pi$, por el "tercer teorema de desarrollo" pág. 202, el "segmento canónico" P'_π es un dominio normal, ya que π es un número frontera, que tiene la misma característica que P y una base equivalente con él, por lo que según el teorema previo es isomorfo a P.

Tercer teorema de isomorfismo. *De dos dominios normales con la misma característica siempre es uno isomorfo a un subdominio (propio o impropio) del otro.*

Sean P un dominio normal y $Q' \subset Q$ una parte de su base. Consideremos la totalidad de aquellos elementos de P para los que una cadena decreciente de elementos $m \ni m_1 \ni m_2 \ni m_3 \cdots$ termina en un elemento primitivo de Q' según el axioma F), así que este subdominio P' de P satisface las condiciones de nuestro lema en §3. Él es entonces un dominio normal con la misma característica π, porque contiene todas las sucesiones fundamentales de P generadas por Q', y es isomorfo a cada dominio normal P'' de la misma característica π, cuya base Q'' sea equivalente con Q'. De la comparabilidad supuesta de conjuntos arbitrarios Q, Q'' se sigue inmediatamente la afirmación.

La "estructura" de un dominio normal, es decir, lo que tiene en común con cualquier dominio isomorfo, o su "tipo de modelo" se determina, de acuerdo con lo demostrado, por dos números, mediante la cardinalidad $\mathfrak{q}$ de su base y mediante su característica π, de los que el primero, el "ancho" del dominio normal, se puede elegir arbitrariamente, mientras que el otro, su "altura" debe poseer las propiedades de un "número frontera" descritas en §2. Estos "tipos de modelo" conforman una variedad doblemente bien ordenada de tal forma que un tipo de modelo es isomorfo a una componente de otro, $\mu \leq \mu'$, cuando simultáneamente $\mathfrak{q} \leq \mathfrak{q}'$ y $\pi \leq \pi'$, es decir, cuando ambos números de uno son menores o iguales que los del otro.

Ya que la aplicación isomorfa entre dos dominios normales, cuando existe, está unívocamente determinada por su aplicación entre las bases según el primer teorema de isomorfismo, se sigue que un isomorfismo de un dominio normal sobre sí mismo, esto es, un "automorfismo", sólo es posible mediante una "permutación" de su base; para "dominios unitarios", que sólo contiene un sólo elemento, esto es imposible. Igualmente obtenemos una aplicación isomorfa de un dominio normal sobre una parte P' de sí mismo a partir de cada aplicación equivalente de la base Q sobre una de sus partes Q', cuando la base misma es infinita. Como vimos en la demostración del último teorema, cada subbase corresponde a un subdominio normal P' de la misma característica π, en particular, a cada elemento primitivo u se asocia un "dominio unitario", y a subbases equivalentes corresponden subdominios equivalentes que, en analogía a la teoría de campos, se llaman "conjugados". Con esto se obtiene el siguiente:

Teorema de automorfismo. *Automorfismos, es decir, aplicaciones isomorfas de un dominio normal sobre sí mismo corresponden en forma inyectiva a aplicaiones equivalentes de la base en sí misma, por lo que sólo es posible para una número base $\mathfrak{q} > 1$; todos los dominios unitarios son "monomorfos". El grupo de los automorfismos es isomorfo al grupo de permutaciones asociado a la base. También los "meromorfismos", esto es, aplicaciones isomorfas del dominio normal sobre una parte de sí mismo, corresponden en forma inyectiva a aplicaciones de la base (infinita) sobre una parte equivalente.*

§5. Cuestiones de existencia, consistencia y categoricidad.

Hasta ahora, nuestras consideraciones suponen la existencia de "dominios normales" de diversa naturaleza y, en cualquier caso, se basan en la suposición de la consistencia de los axiomas de la teoría de conjuntos. No se intentará aquí demostrar esta consistencia lógicamente. En cambio, examinaremos la existencia (matemática, es decir, ideal) de tipos de modelos hasta ahora considerados, bajo la hipótesis general de la consistencia de la teoría de conjuntos. Suponemos entonces la existencia de dominios de conjuntos que satisfacen los axiomas ZF, para una base arbitraria. Entonces, en cualquier caso, existen aquellos que satisfacen además el "axioma de fundación" F). Porque si M es un dominio de conjuntos de la naturaleza supuesta, entonces los elementos de este dominio que satisfacen F), entre los cuales están por supuesto los elementos primitivos, conforman un subdominio bien definido N de M, que por sí mismo satisface los axiomas de ZF', por lo que representa un "dominio normal" con la base dada Q.

Que mediante reducción de la base se originan otra vez dominios normales como subdominios del primero, lo hemos demostrado en §4 en la demostración del "tercer teorema de isomorfismos". Por el contrario, no es claro sin más, si mediante una reducción o aumento de la característica se logran nuevos tipos de dominios normales. Porque cada "número frontera" deben satisfacer las condiciones I) y II) de §2 y queda la pregunta de si existen tales números de "caracter de número frontera" y cuántos de ellos existen. Pero ω, el número inicial de la segunda clase de números, es ciertamente uno de tales números: un "valor propio" de la función $\psi(\xi)$ y no es cofinal en ninguno menor. De hecho, ω es la característica del menor dominio normal que se origina de la siguiente forma: del dominio normal dado M eliminamos aquellos conjuntos para los cuales alguna "cadena decreciente" $m \ni m_1 \ni m_2 \ni m_3 \cdots$ contiene un conjunto "infinito". Este dominio, que sólo contiene conjuntos finitos, satisface las condiciones de un dominio normal y a su vez es el segmento P_ω correspondiente al índice ω del "desarrollo canónico" del dominio normal original. Este domino "finitario", que incluso los "intuicionistas" poco tienen que objetar a pesar de su propia infinitud, al menos puede servir para comprobar, por su simple existencia, la consistencia de los axiomas ZF'. En cambio, dado que no contiene conjuntos infinitos, no se puede considerar como un "modelo" real de la teoría de conjuntos de Cantor. De él nos aleja mi "axioma del infinito", que postula la existencia de al menos un conjunto "infinito". El menor dominio normal que satisface esta condición, y que llamo "Cantoriano", tendría la característica π_1, a saber, el menor valor propio de la función ψ con caracter de número núcleo, en cualquier caso un "número inicial regular del segundo tipo", aunque no es necesariamente el menor número "exorbitante", al menos mientras no se corrobore la hipótesis de Cantor.

Pero, ¿existen además de ω tales números con caracter de número frontera? Ciertamente, en tanto exista un a teoría de conjuntos "infinitaria", es decir, en tanto exista un dominio normal con conjuntos infinitos. Porque la totalidad de las "sucesiones fundamentales" en uno de tales dominios tiene uno de tales tipos ordinales π, aun cuando dentro del dominio no pueda aperecer ningún conjunto de este tipo π. Si existen "números frontera" $\pi > \omega$, entonces existe uno menor entre ellos π_1. Por supuesto, no es posible "demostrar", es decir derivar de los axiomas ZF' su existencia o inexistencia, sencillamente porque, por ejemplo, el número frontera ω existe en el dominio "Cantoriano", pero no en el "finitario". En otras palabras se puede responder la pregunta en forma distinta en distintos "modelos" de la teoría de conjuntos, esto es, no se decide con tan sólo los axiomas. Así, nuestro sistema axiomático no es siquiera categórico, que en este caso, no es una desventaja, sino una ventaja. Porque precisamente en este hecho se basa el enorme significado e ilimitada aplicabilidad de la teoría de conjuntos. Naturalmente, añadiendo "axiomas" adicionales siempres se puede forzar artificialmente la categoricidad deseada, pero a costa de la generalidad. Tales nuevos postulados, como han sido propuestos por Fraenkel[1], Finsler[2], Neumann[3], entre otros, no conciernen de ningún modo a la propia teoría de conjuntos, sino simplemente caracterizan un modelo muy especial elegido por el autor respectivo. Por lo regular se privilegian los "dominios unitarios", cuyo costo es sacrificar la aplicabilidad de la teoría de conjuntos, como ya se dijo pág. 202. Más aún, se acostumbra restringirse al menor dominio infinitario, al "Cantoriano", en lo que menos veo alguna ventaja. Por el contrario, la teoría de conjuntos como una ciencia se debe primero desarrollar en toda su generalidad, donde la investigación comparativa de los modelos individuales se debe tratar como un problema particular.

Ahora, ¿en qué difieren los diversos modelos con base común, en particular los distintos "dominios unitarios" ? Como vimos, mediante su "característica", esto es, mediante la totalidad de los números ordinales representados en ellos por conjuntos, o mediante la totalidad de las "sucesiones fundamentales", que comienzan con el mismo elemento primitivo, contenidas en ellos. Dado que sólo "números frontera" pueden servir como "característica", todo "modelo unitario" esta unívocamente determinado por la totalidad de las sucesiones fundamentales con tipo número frontera presentes (o no presentes) en él. Mediante su especificación, posible en distintos casos a través de postulados adecuados, queda establecida la "categoricidad" del tipo de modelo y simultáneamente junto con la de su característica π (por el segundo teorea de desarrollo de §3) también la de la cardinalidad $\overline{\pi}$ del dominio unitario corespondiente. Si introducimos la hipótesis general de que cualquier dominio categóricamente determinado de alguna manera se puede considerar como "conjunto", es decir que aparece como elemento de un dominio normal (elegido adecuadamente), se deduce que corresponde a todo dominio normal uno mayor con igual base, a cada dominio unitario un dominio unitario mayor, y por tanto a cada "número frontera" π un número frontera mayor π'. Igualmente, un dominio de conjuntos categóricamente determinado se origina por unión y fusión a partir de cualquier sucesión infinta de distintos dominios normales con base común, donde uno siempre contiene al otro como segmento canónico. Este dominio de conjuntos categóricamente deteminado se puede completar a su vez para converstirse en un dominio normal de mayor característica. A toda totalidad de "números frontera" categóricamente determinada le sigue a su vez una mayor, y la sucesión de "todos" los números frontera tambíen es ilimitada como la sucesión de números misma, de tal suerte que a cada índice transfinito se asocia en forma uívoca un número frontera determinado. Que esto sea "demostrable" por los axiomas ZF' es otra vez imposible, ya que el comportamiento propuesto nos aparta de cualquier dominio normal. Más bien, se debe postular la existencia de

[1] Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl. §18. 5. pág. 355. "*Axioma de limitación*".

[2] Finsler, Über die Grundlegung der Mengenlehre. Math. Zeitschr. 25, págs. 683-713. Aquí véase también R. Baer, Über ein Vollständigkeitaxiom in der Mengenlehre. Math. Zeitschr. Vol. 27, págs. 536-539, 1928.

[3] J. v. Neumann como en pág. 202.

una sucesión no acotada de números frontera como un nuevo axioma "meta teórico" , donde la pregunta sobre la consistencia requiere una investigación más detallada. Mientras que aquí me debo restringir a este bosquejo provisional, y referirme a una elaboración posterior, lo siguiente debe ilustrar lo que debe considerarse como el resultado esencial de la investigación presente:

Las "paradojas ultrafinitas de la teoría de conjuntos", a las que apelan con tanta pasión los reaccionarios y anti matemáticos en su lucha contra la teoría de conjuntos, estas aparentes "contradicciones" se basan exclusivamente en una confusión entre la teoría de conjuntos misma que no esta categóricamente determinada por sus axiomas y la de sus modelos individuales: lo que en un modelo aparece como "conjunto ultrafinito o subconjunto o supraconjunto", es en otro un "conjunto" totalmente válido con cardinalidad y tipo ordinal y él mismo sirve de punto de partida para formar nuevos dominios. A la sucesión no acotada de los números ordinales Cantorianos corresponde una sucesión doble igualmente no acotada de modelos teórico conjuntistas esencialmente distintos, en cada uno de los cuales se expresa la teoría clásica completa. Las dos formas de pensamiento totalmente opuestas, la idea del progreso creativo y la del resumen concluyente que forman también la base de las antinomias de Kant, encuentran su representación y reconcialición simbólica en la sucesión de números transfinitos basada en la noción de buen orden, que aunque carece de una compleción verdadera dado su ilimitado crecimiento, posee asideros, precisamente los "números frontera", que separan los modelos inferiores de los superiores. Así, las "antinomias" de la teoría de conjuntos también conducen, correctamente interpretadas, a un desarrollo y enriquecimiento impredecible de las matemáticas, en lugar de a opresión y mutilación.

Para finalizar este trabajo quisiera expresar mi agradecimiento más sincero a mi colega Dr. Arnold Scholz que me apoyó con valiosos consejos y amistosas sugerencias durante la escritura y corrección de esta obra.

Freiburg i. Br. 13 de abril de 1930.