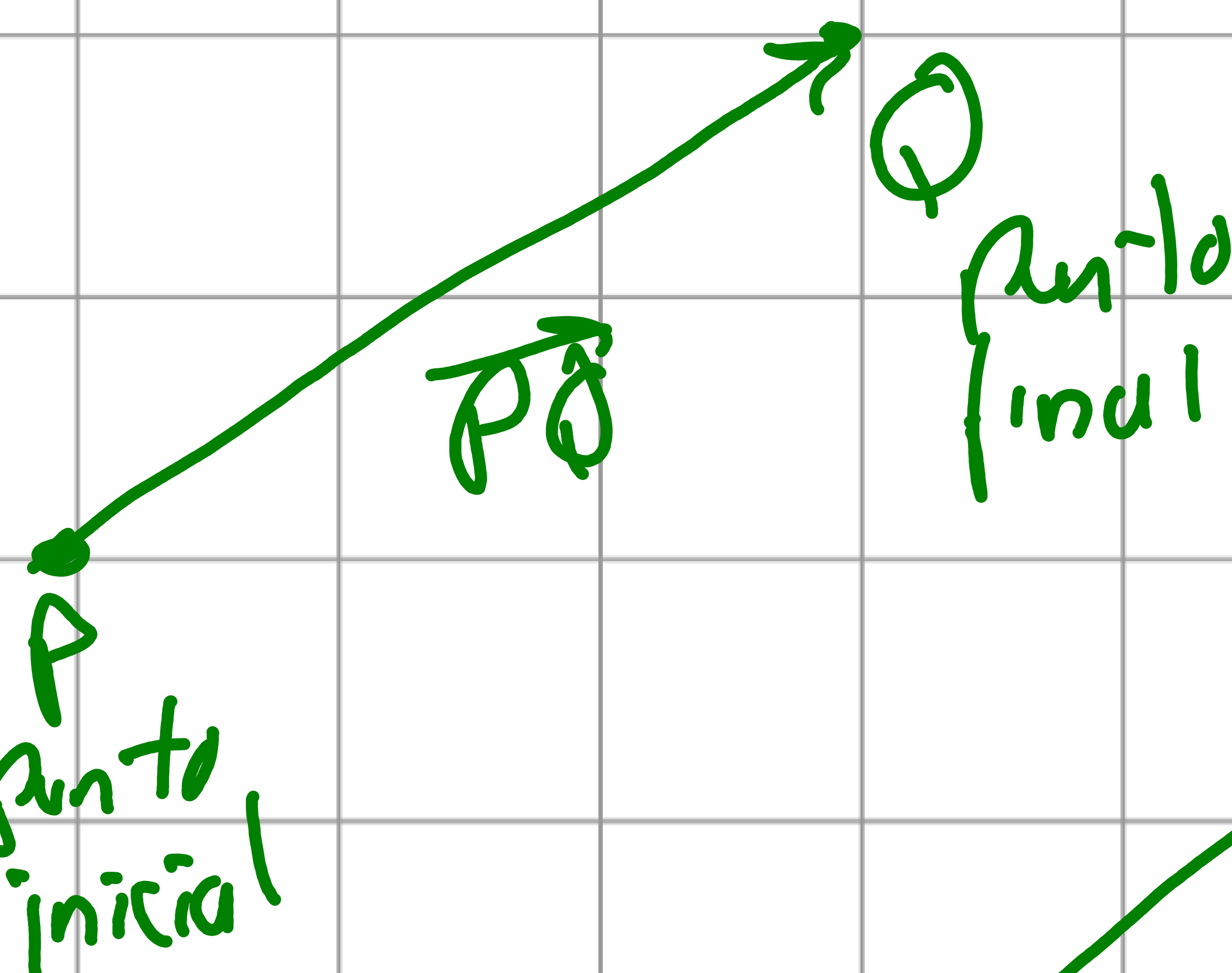
Geometría del Plano y del espacio 11

Vectores en el plano y el espacio

En geometría y física diversas magnitudes se pueden describir mediante un número real: área, volumen, temperatura masa y tiempo. Estas magnitudes se llaman escalares y el número real asociado a un escalar.

Otras magnitudes requieren más información para describirlas: fuerza, velocidad y aceleración, pues ellas requieren no sólo su magnitud sino también dirección

Se emplea un segmento de línea para representar dichas magnitudes



En ausencia de un sistema de referencia estos segmentos de igual longitud representan lo mismo

Para evitar estas ambigüedades introducimos los vectores. Revisaremos las nociones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (plano y espacio) pero el alumno debe estar consciente de que la noción de vector, espacio vectorial es mucho más general y tarde o temprano encontrará su definición y tratamiento general.

Def Dos vectores $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ en $\mathbb{R}^2$ (el plano cartesiano) son iguales si sus componentes correspondientes son iguales: $a_1=b_1$, $a_2=b_2$

La misma definición se cumple para vectores en $\mathbb{R}^3$ (el espacio)

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$$

De hecho, esta definición se puede extender a $\mathbb{R}^n$ para $n=1,2,3,4,\ldots$

Ej. $\vec{a}=(1,2,5)$, $\vec{b}=(1,2,\sqrt{2})$

Se sigue que $\vec{a}\neq\vec{b}$ (en $\mathbb{R}^3$)

en cambio

$$\bar{a}=(1,2),\ \bar{b}=(1,2)$$

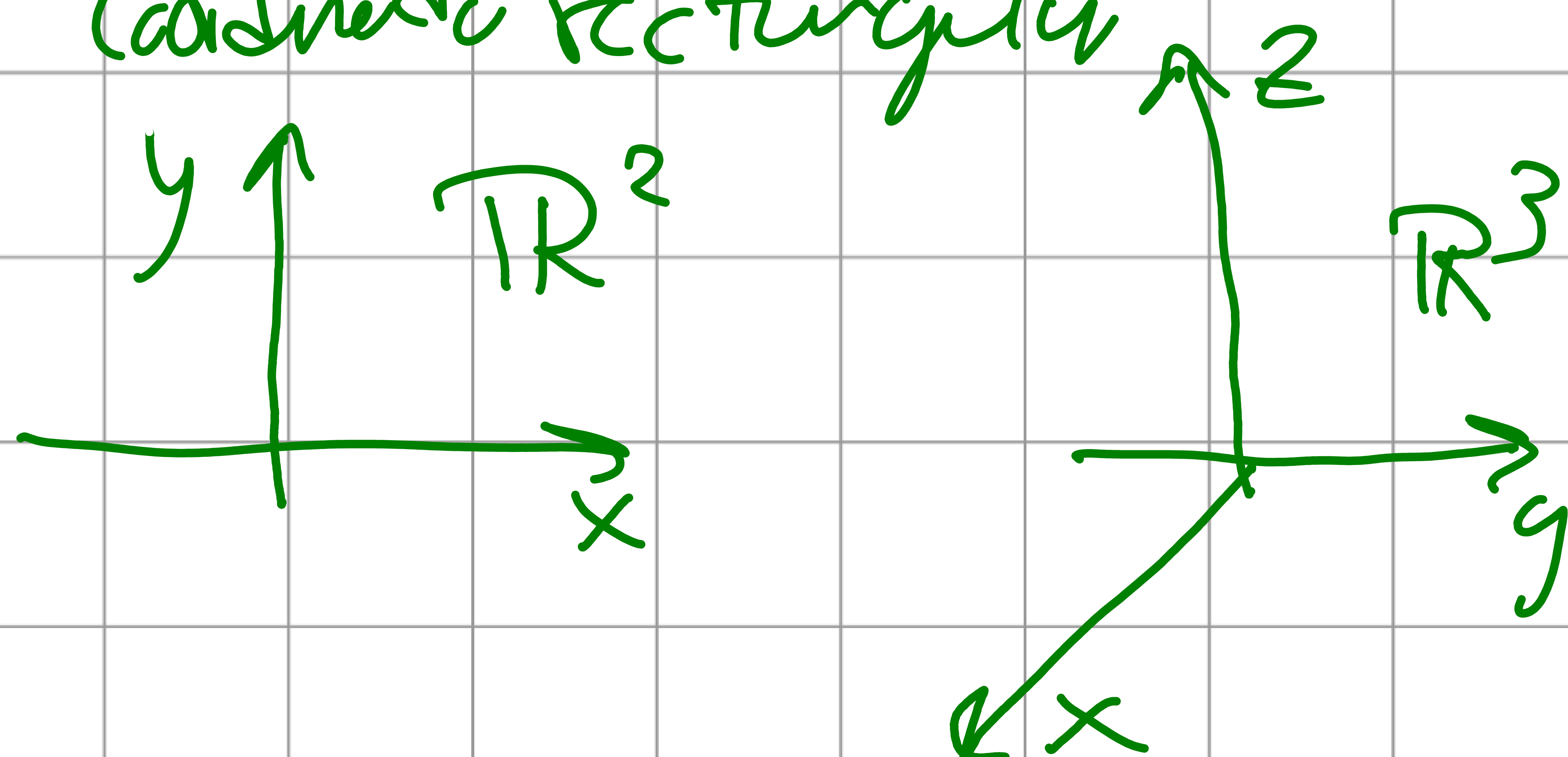
Son iguales en $\mathbb{R}^2$

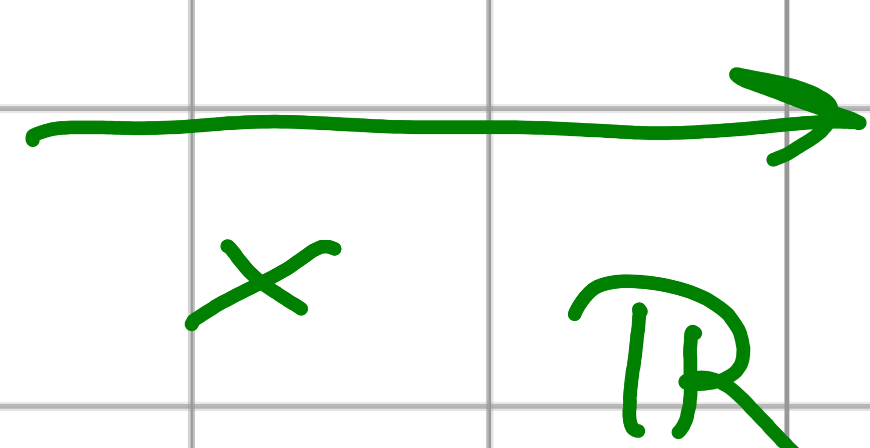
Entre vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (de hecho en $\mathbb{R}^n$ podemos definir ciertas operaciones aritméticas que iremos describiendo a continuación.

Antes mencionamos que hemos descrito vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{R}^n$) como entidades que tienen coordenadas

1) También podemos hablar de vectores en $\mathbb{R}^1$

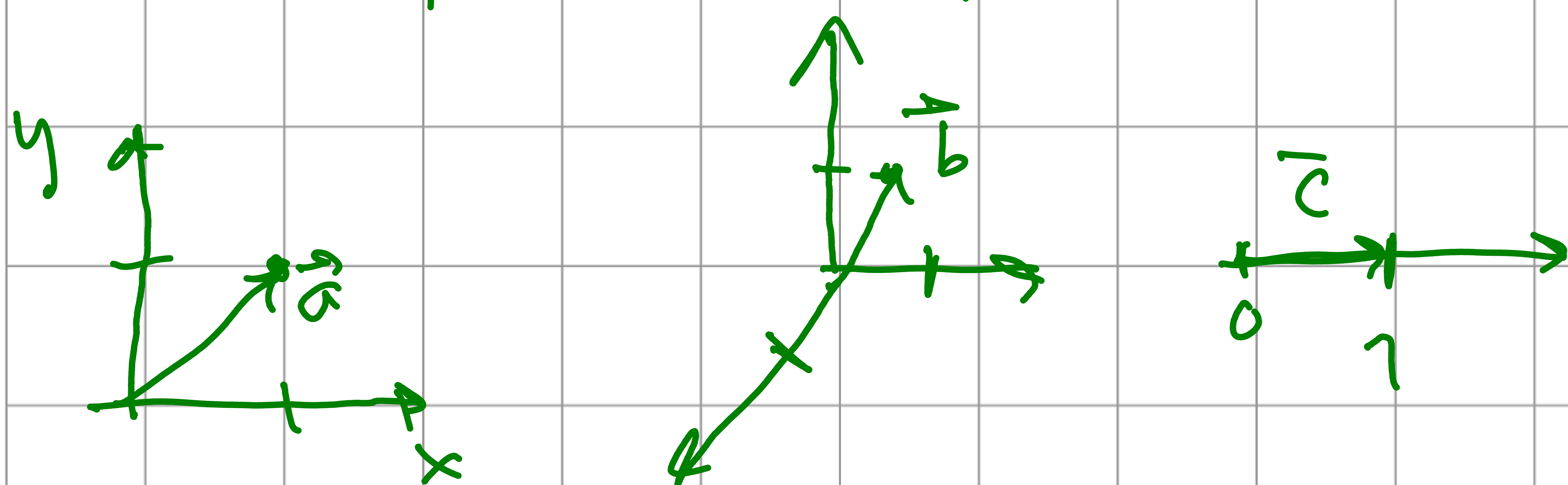
2) Se acostumbra establecer un sistema coordenado rectangular





para situar un vector en este sistema, usamos las componentes del vector como si fueran coordenadas, esto es

$\vec{a}=(1,1)$, $\vec{b}=(1,1,1)$, $\vec{c}=(1)$



Geométricamente se dibuja la flecha que une el punto con el origen del sistema coordenado. En este sentido, puede parecer irrelevante hablar de "punto" o de "vector", pero en ocasiones, dependiendo del contexto, puede tener cierta importancia distinguir entre punto y vector. Cuando esto sea así, lo haremos notar, aunque el estudiante puede estar tranquilo de no notar la diferencia.

Def Sean $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Definir la suma coordenada a coordenada

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

algo correspondiente ocurre en $\mathbb{R}^2$ (o en $\mathbb{R}^n$)

Ejmpl. $\vec{a}=(0,0,1)$, $\vec{b}=(1,0,0)$

$$\vec{a}+\vec{b}=(1,0,1)$$

En general $\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)$, $\vec{b}=(b_1,\dots,b_n)$

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$$

Propiedades de la suma vectorial

i) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ conmutatividad

ii) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

asociatividad

iii) Existe un vector muy especial

$\vec{0} = (0,0)$ en $\mathbb{R}^2$

$\vec{0} = (0,0,0)$ en $\mathbb{R}^3$

$\vec{0} = (0,0,\ldots,0)$ en $\mathbb{R}^n$

tal que si $\vec{x}$ es un vector

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x} = 0 + \vec{x}$$

para cualquier vector $\vec{x}$

La demostración de estas propiedades es absolutamente trivial, si usamos las propiedades correspondientes en los números reales.

Existe una operación nueva llamada la multiplicación escalar.

Si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $k \in \mathbb{R}$ (k es un número real), definimos la multiplicación escalar

$$k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

en forma correspondiente se define en $\mathbb{R}^2$ (o en $\mathbb{R}^4$)

Por ejemplo

$$\vec{a} = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) \quad , \quad k = \pi$$

$$\pi\vec{a} = (\pi, \sqrt{2}\pi, \sqrt{3}\pi, \sqrt{5}\pi)$$

Propiedades

Si $\vec{a}, \vec{b}$ son vectores (en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^4$) y $k, l \in \mathbb{R}$

i) $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ distributividad

ii) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ distributividad

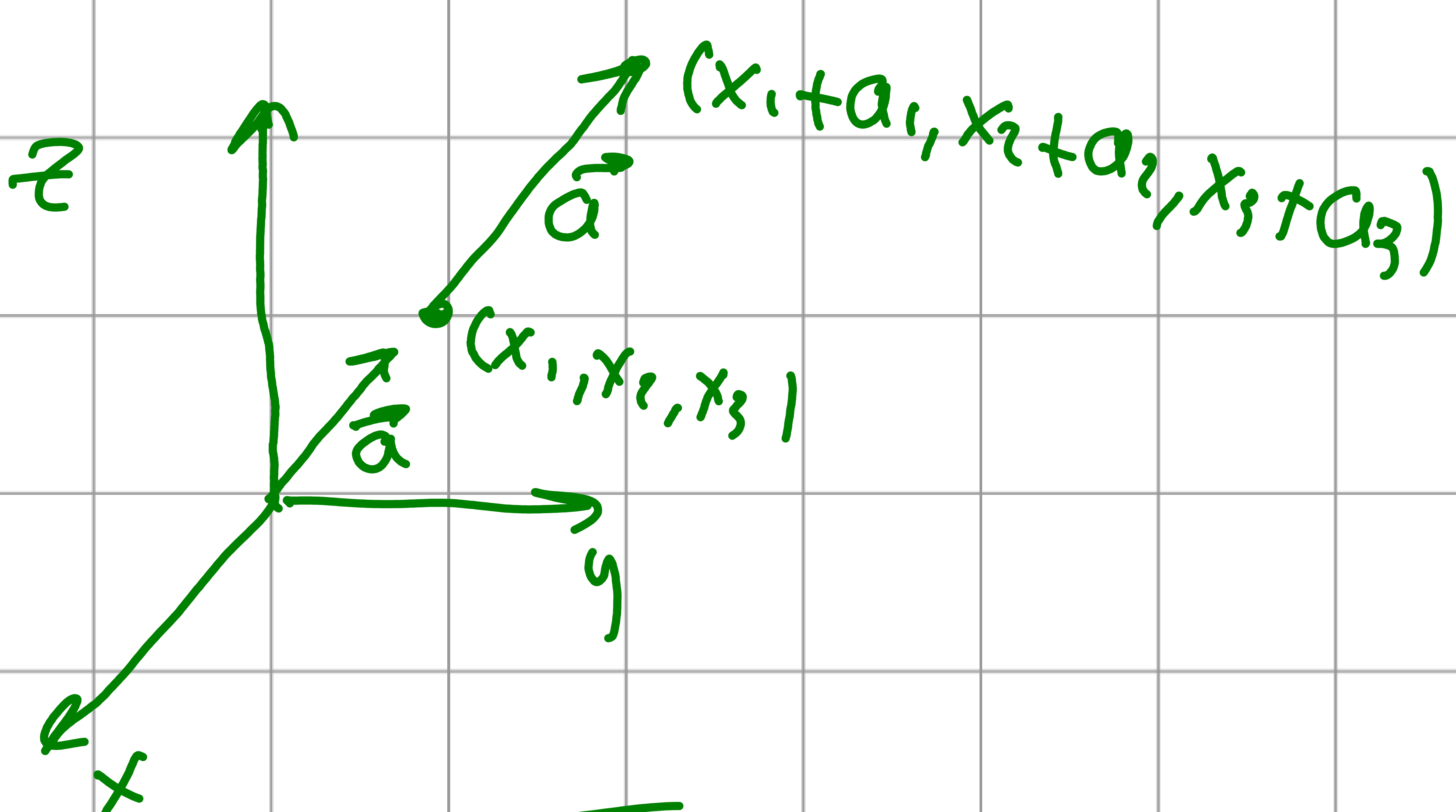
iii) $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a} = l(k\vec{a})$

Retomemos la interpretación física mencionada al principio. Recuerde que representamos a los vectores como flechas

En física no siempre se exige que la "cola" esté en el origen del sistema coordenado. Se puede trasladar al vector, pero haciéndolo en forma "paralela" al original, o si se quiere, alguecito en el origen.

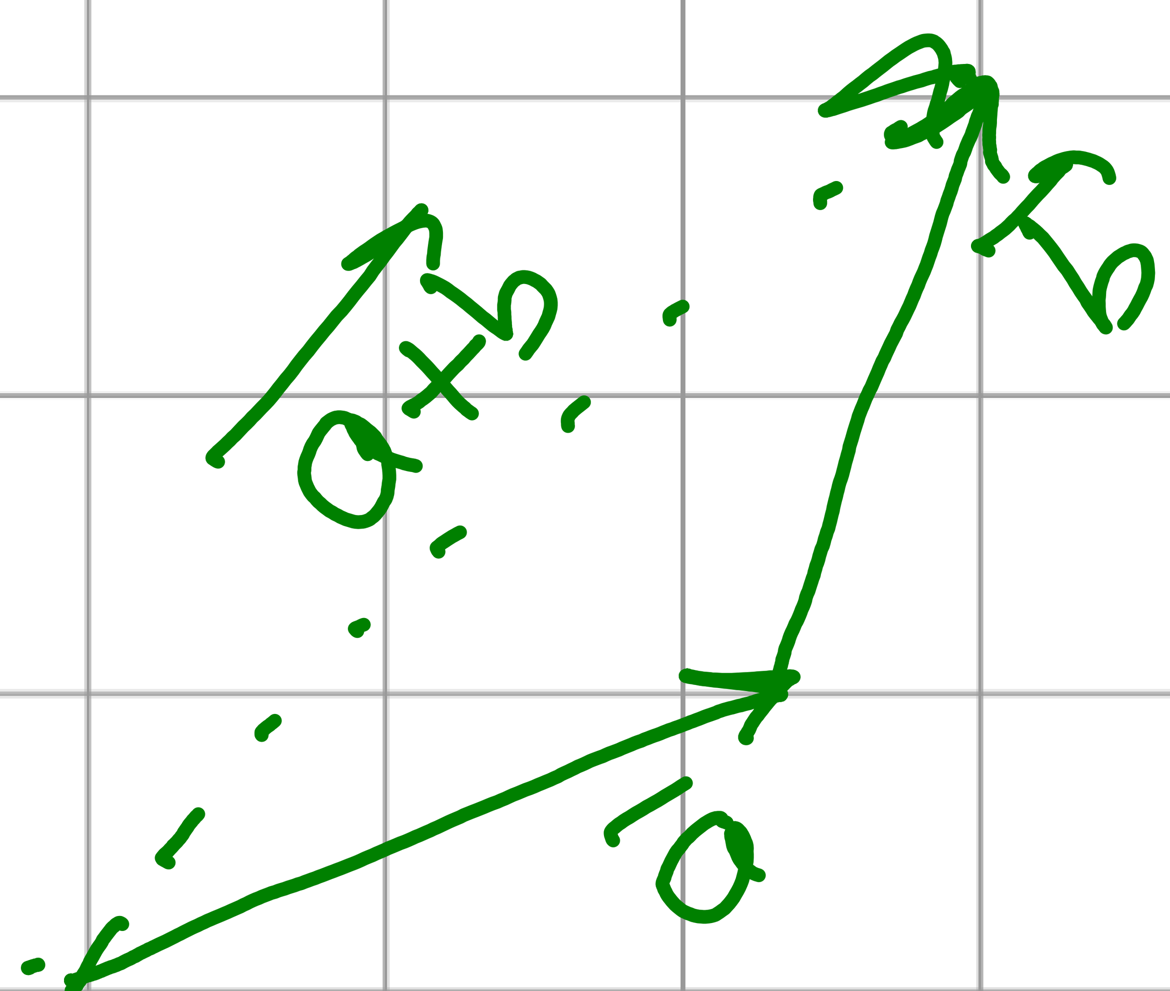
Por ejemplo, si queremos representar al vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ con su cola en el punto (x_1, x_2, x_3), entonces la "cabeza" de la flecha estará en

$$(x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3)$$



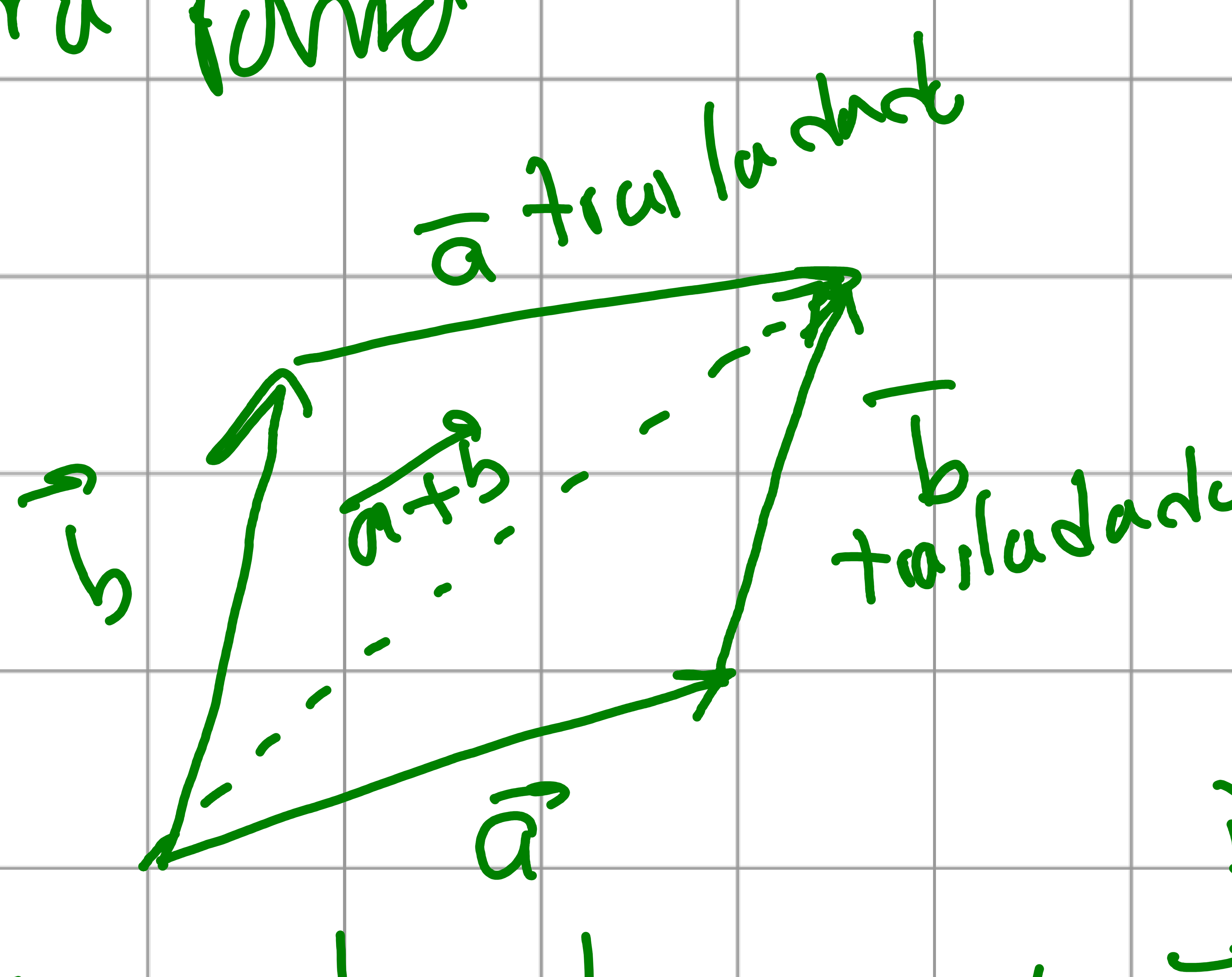
Con esta "representación" podemos dar

cierta "interpretación" de la suma de vectores.



Para sumar $\bar{a}$ y $\bar{b}$ pintamos $\bar{a}$, la cola de $\vec{b}$ en la punta de $\bar{a}$ y unimos la cola de $\bar{a}$ con la "nueva" punta de $\vec{b}$.

Otra forma



Se elabora el paralelogramo según se indica, y la diagonal es la suma de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Es claro que, dado que usamos las propiedades de $\mathbb{R}$, podemos definir la "resta" o "diferencia" entre vectores

Si $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$

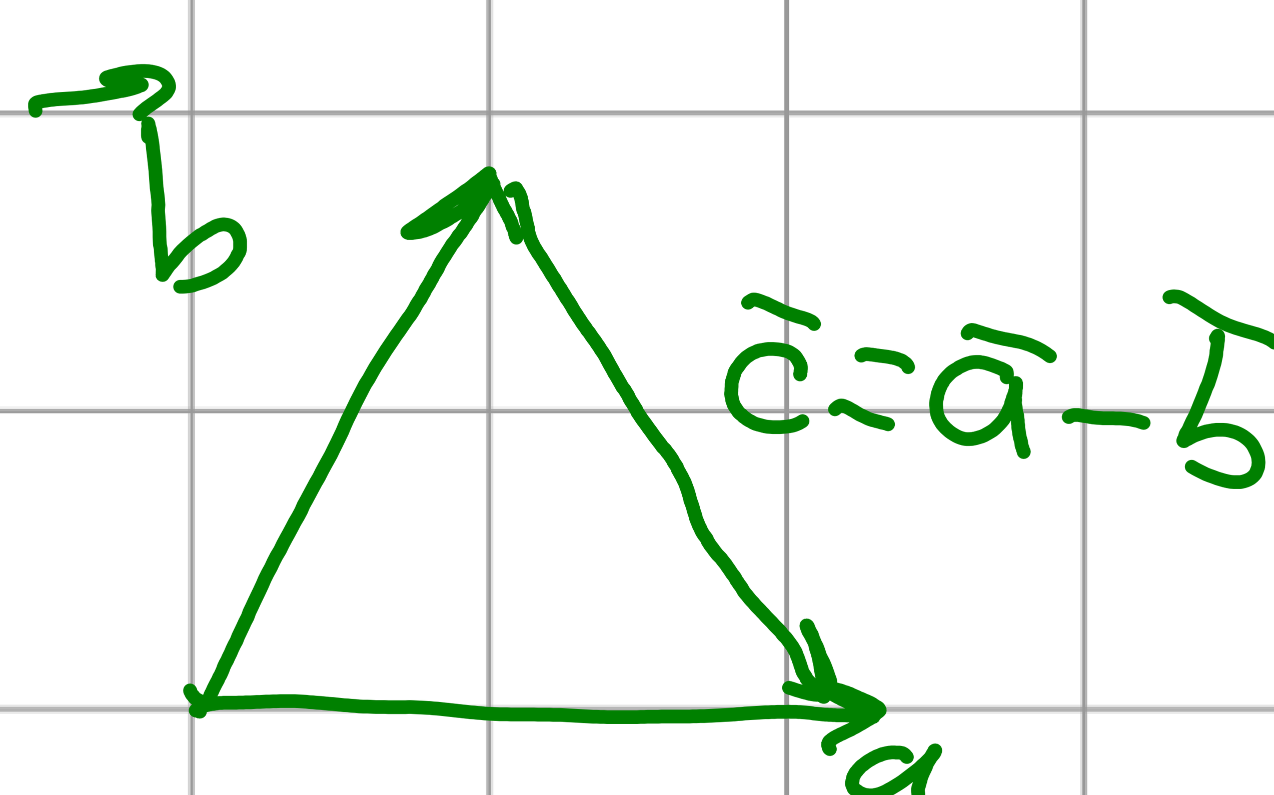
$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n)$$

Note que en realidad lo que ocurre es lo siguiente

Primero $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ y cada b_i es un número real, que tiene su inverso aditivo $-b_i$, así formamos el inverso aditivo de $\vec{b}$ y efectuar

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n)$$

También tenemos la representación geométrica



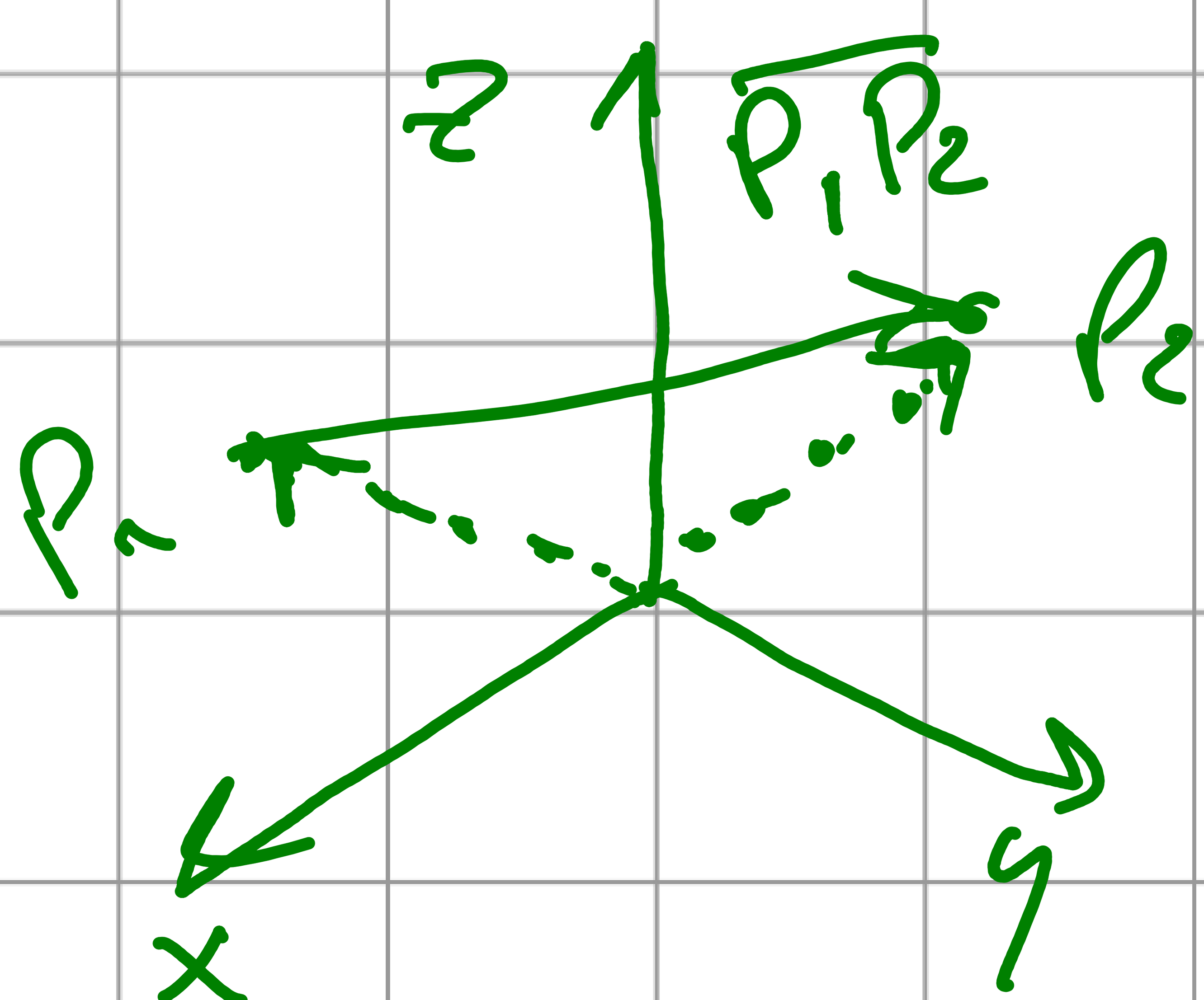
Pues el vector $\bar{c}$ es tal que

$$\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$$

de modo que $c = \bar{a} - \bar{b}$

Def Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbb{R}^3$ el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ es el vector de P_1 a P_2

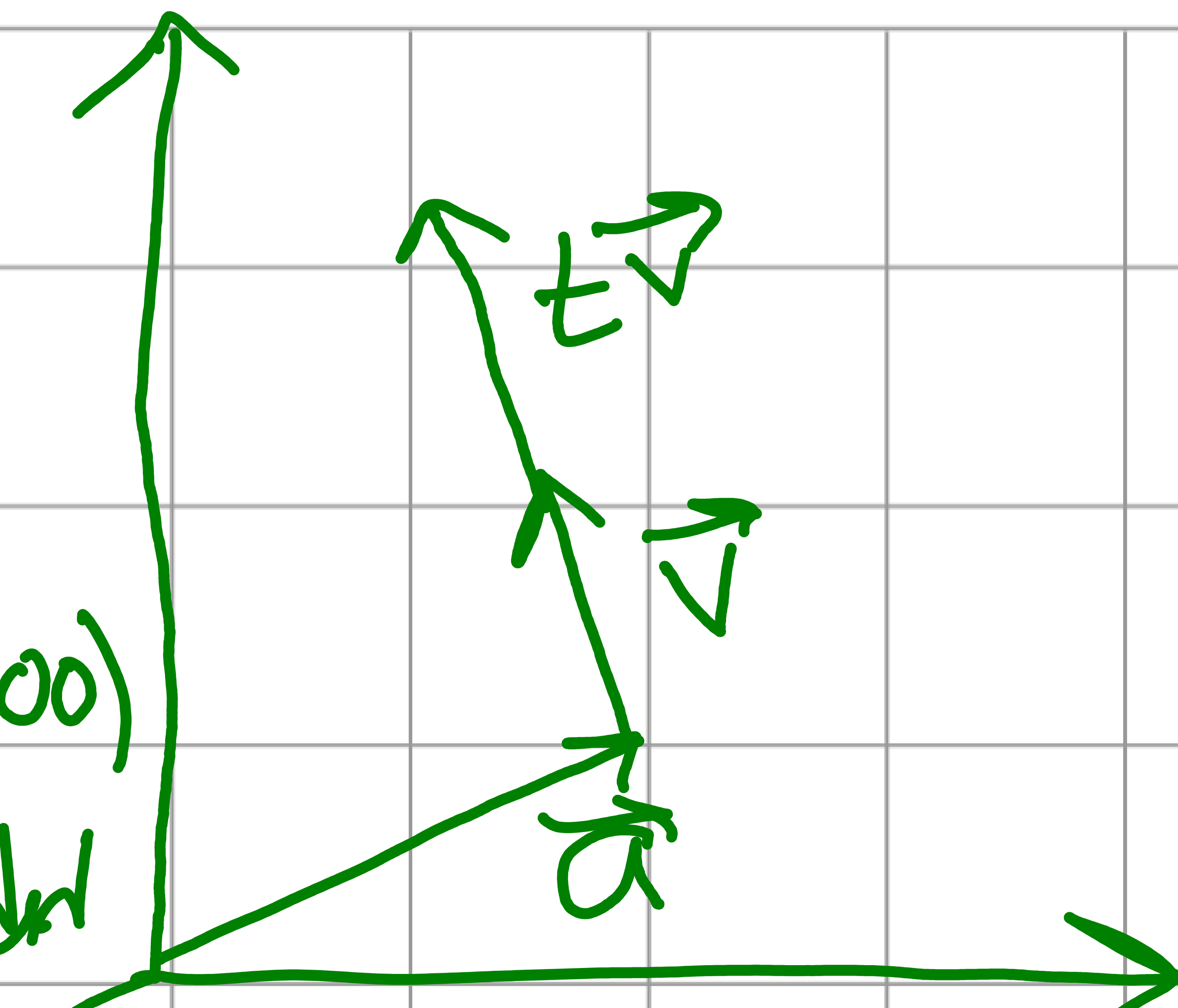
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$



Al estudiar cálculo de una variable, se usan las nociones de derivada e integral para conceptos como velocidad, aceleración, fuerza, etc. que como dijimos antes requieren de magnitud y dirección para establecerse apropiadamente. El punto es que en $\mathbb{R}^1$, donde transcurre el cálculo de una variable no es posible dar una dirección, más allá de izquierda o derecha

$\longleftarrow \qquad \longrightarrow$

Es claro que en el plano o en el espacio la descripción debe ser más completa. Por ejemplo, suponga que una partícula en el espacio está en el punto (a_1, a_2, a_3) (con respecto a un sistema coordenado dado o apropiado). Entonces, tiene un vector de posición $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Si la partícula viaja con velocidad constante $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ por t segundos, entonces el desplazamiento de la partícula desde su posición original es $t\vec{v}$ y su nueva posición es $\vec{a} + t\vec{v}$



<u>Ejemplo</u> Si una nave soviética está en $(100, 3, 700)$ y viaja con velocidad $(7, -10, 25)$ lo que significa a 7 m/seg en la x-dirección positiva, 10 m/seg en la dirección y-negativa y 25 m/seg en la z-dirección positiva, después de 20 seg la nave estará en

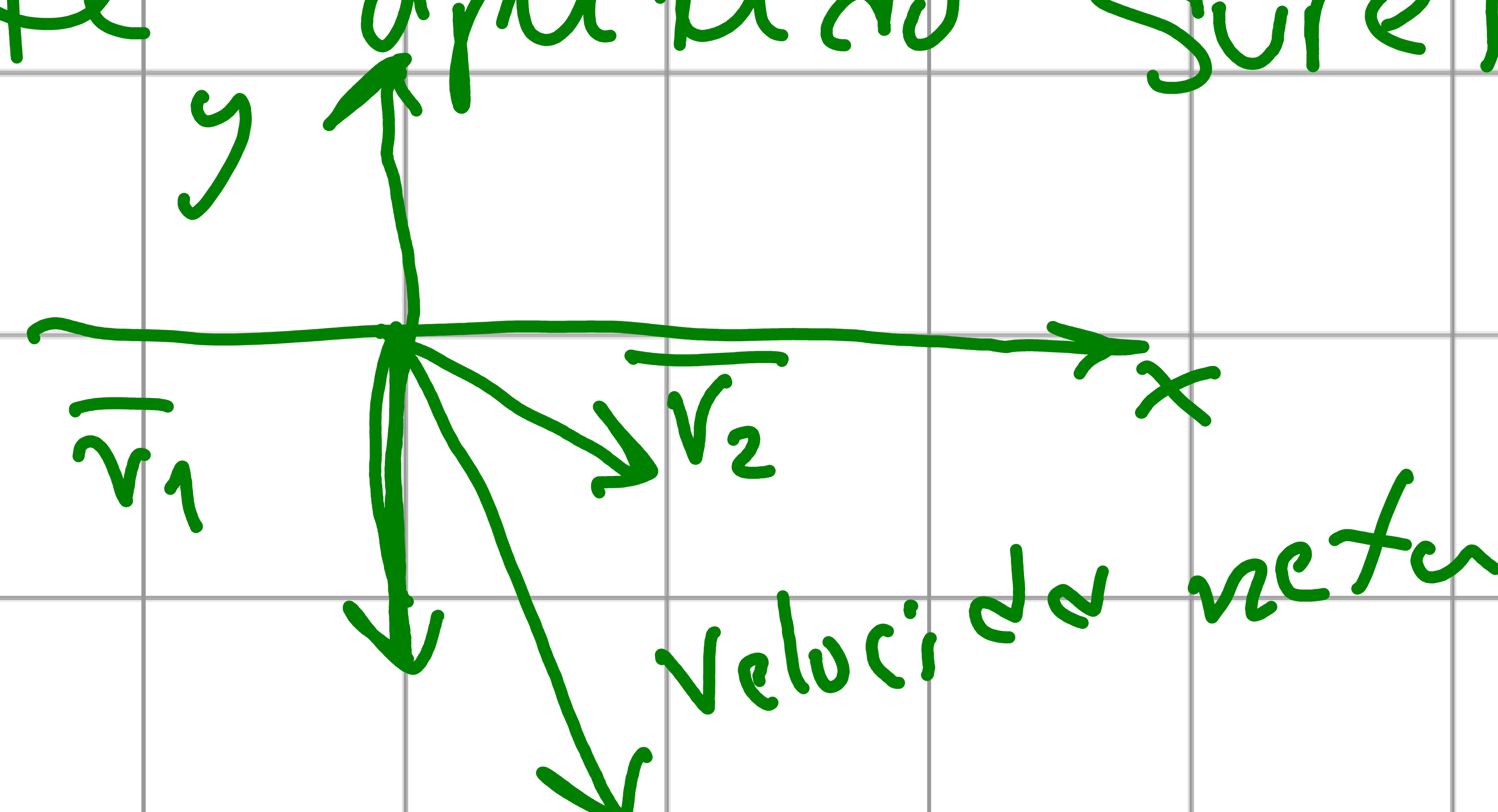
$$(100, 3, 700) + 20(7, -10, 25) = (240, -197, 1200)$$

y su desplazamiento de su posición inicial es

$$(140, -200, 500)$$

<u>Ejemplo</u> El crucero Granma viaja hacia el sur a una velocidad de 15 nudos (millas náuticas por hora) respecto al agua en reposo. Sin embargo, está presente

¿Cuál es la velocidad total del barco?
Si el barco está inicialmente en el origen, mientras que una trampa de langostas está en (20, −79)
¿Colisionará el barco con la trampa?
Ya que las velocidades son vectores, la velocidad total del barco es $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$, donde $\bar{v}_1$ es la velocidad del barco con respecto al agua en reposo y $\bar{v}_2$ es la velocidad de la corriente apuntando sureste.



De la figura $\bar{v}_1 = (0, -15)$, $\bar{v}_2$ apunta sureste, su dirección debe ser sobre la recta $y = -x$. Por consiguiente $\bar{v}_2 = (v, -v)$ donde

v es un real positivo. Por el teorema de pitagoras 

y la longitud de $\vec{v}_2$ es $5\sqrt{2}$, así que $v^2+(-v)^2=(5\sqrt{2})^2$

$$2v^2=(5\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2v^2=50$$

$v=5$. Así, $\vec{v}_2=(5,-5)$

La velocidad neta es

$$(0,-15)+(5,-5)=(5,-20)$$

Después de 4 horas, el barco estará en

$$(0,0)+4(5,-20)=(20,-80)$$

y no chocará con la trampa

Por este ejemplo, tiene sentido definir la longitud (norma, magnitud) de un vector $\vec{v}=(v_1,v_2,\dots,v_n)$

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2}$$

Eje Determine las componentes y longitud del vector $\vec{v}$ con punto inicial $(3,-7)$ y terminal $(-2,5)$

$$\bar{v} = (-2, 5) - (3, -7)$$
$$= (-5, 12)$$
$$\|v\| = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = 13$$