Resuelva el sistema

$$2x_2+3x_3=8$$
$$2x_1+3x_2+x_3=5$$
$$x_1-x_2-2x_3=-5$$

La matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Procedemos a formar la matriz escalonada

La primera columna $\neq 0$ es la 1ª; creamos una posición "principal" arriba en esta columna; intercambiamos renglones 1 y 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \xleftrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

La segunda columna es la siguiente columna $\neq 0$. Multiplicamos renglón 2 por $\frac{1}{5}$ y creamos una posición principal con 1

$$\xrightarrow[\frac{1}{5}R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

12

Ya tenemos la matriz en forma escalonada
El sistema equivalente es

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -5$$
$$x_2 + x_3 = 3$$
$$x_3 = 2$$

hacemos sustitución hacia atrás con $x_3 = 2$

$x_2 = 3 - x_3 = 3 - 2 = 1$ y finalmente

$x_1 = -5 + x_2 + 2x_3 = -5 + 1 + 4 = 0.$

Esta vez escribimos la solución como vector vertical $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} w - x - y + 2z &= 1 \\ 2w - 2x - y + 3z &= 3 \\ -w + x - y &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

3

$$\xrightarrow{R_3+2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema asociado es

$$w - x - y + 2z = 1$$
$$y - z = 1$$

que tiene una infinidad de soluciones.
Consideramos variables "principales" y las expresamos en términos de las restantes (las variables libres)

Sean w, y las principales y x, z las libres.
Así $y = 1 + z$ y de ésta obtenemos

$$w = 1 + x + y - 2z$$
$$= 1 + x + (1+z) - 2z$$
$$= 2 + x - z$$

Si asignamos los parámetros $x = s$, $z = t$ la solución queda

4

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+s-t \\ s \\ 1+t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Este ejemplo revela que en un sistema consistente las variables libres son precisamente las variables que no son "principales". Ya que el número de variables principales es la cantidad de renglones que no constan exclusivamente de ceros en una matriz escalonada, podemos predecir la cantidad de variables libres (parámetros) antes de encontrar la solución explícita usando sustitución hacia atrás. Aunque la forma escalonada de una matriz no es única, la cantidad de renglones cero siempre es la misma.

Def: El rango de una matriz es la cantidad de renglones distintos de cero en su forma escalonada.

Denotamos este rango de una matriz A como rango(A) o rk(A)

En el primer ejemplo de esta lección la matriz tiene rango 3 y en el segundo 2

Teo [Rango]

Sea A la matriz de coeficientes de un sistema de m ecuaciones y n incógnitas. Si el sistema es consistente entonces

$$\text{cantidad de variables libres} = n - \text{rango}(A)$$

Así, en el primer ejemplo tenemos

$3-3=0$ variables libres

(solución única) y en el segundo ejemplo $4-2=2$ variables libres

---

Ej

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -3$$
$$2x_2 - 2x_3 = 1$$

Sol.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Es inconsistente.

Ej Resolvamos el 2º Ejemplo por Gauß-Jordan, empezamos como antes hasta llegar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora debemos crear un cero encima del 1 principal en la 2a

$2^{\underline{a}}$ renglón, tercera columna. Lo logramos sumando el renglón 2 al renglón 1 para obtener

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema se ha reducido a

$$w - x + z = 2$$
$$y - z = 1$$

Ahora es más fácil resolver para la variable principal

$$w = 2 + x - z \quad y \quad y = 1 + z$$

Si asignamos parámetros $x = s$ y $z = t$ como antes, la solución se escribe así

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+s-t \\ s \\ 1+t \\ t \end{bmatrix}$$

Retomando la idea geométrica de sistemas de ecuaciones. Un sistema con 2 variables en $\mathbb{R}^3$ corresponde a rectas, con 3 variables a planos

Eje Encuentre la recta de intersección de los planos $x+2y-z=3$ y $2x+3y+z=1$

Sol. Las normales a los planos son

$(1,2,-1)$ y $(2,3,1)$

no son paralelas, así que los planos sí se intersectan

Los puntos en la intersección deben satisfacer las ecuaciones de los planos simultáneamente:

$$x+2y-z=3$$
$$2x+3y+z=1$$

9

Usamos Gauß-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1+2R_2 \; -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Así

$$x + 5z = 7$$
$$y - 3z = 5$$

Pone la variable libre z como un parámetro t y obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta intersección

$$x = -7 - 5t$$
$$y = 5 + 3t$$
$$z = t$$

En forma vectorial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sean $\bar{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\bar{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Determine si las rectas $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$ y $\vec{x} = \vec{q} + t\vec{v}$ se intersectan, en cuyo caso encuentre su punto de intersección

Sol. Aunque t es un parámetro es mejor usar parámetros distintos, digamos s,

$\bar{x} = \bar{p} + s\bar{u}$ $\qquad$ $\bar{x} = \bar{p} + t\bar{v}$

Requerimos que

$$\bar{p} + s\bar{u} = \bar{p} + t\bar{v}$$

esto es $\quad s\bar{u} - t\bar{v} = \bar{q} - \bar{p}$

$$s - 3t = 1$$
$$s + t = 2$$
$$s + t = 2$$

cuyas soluciones $s = 5/4 \quad t = 3/4$.

El punto de intersección es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{5}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/4 \\ 5/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

11