Aplicaciones

1

Ej A Un biólogo ha generado tres cepas de bacterias (I, II y III) (3) en un tubo de ensayo, donde se alimentarán de 3 fuentes distintas (A, B y C). Cada día se colocan 2300 unidades de A, 800 unidades de B y 1500 unidades de C en el tubo de ensayo y cada bacteria consume una cierta cantidad de unidades de cada alimento por día, como se muestra en la tabla ¿Cuántas bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

	Cepa I	Cepa II	Cepa III
Alimento A	2	2	4
Alimento B	1	2	0
Alimento C	1	3	1

2

Sean x_1, x_2, x_3 la cantidad de bacterias en las cepas I, II, III. Cada bacteria en I consume 2 unidades de A por día. Así que la cepa I consume $2x_1$ unidades por día. En forma similar, II y III consumen $2x_2$ y $4x_3$ unidades de A por día. Dado que queremos que se consuman 2300 unidades de A, tenemos

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2300$$

En forma similar para B y C

$$x_1 + 2x_2 = 800$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 1500$$

La matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2300 \\ 1 & 2 & 0 & 800 \\ 1 & 3 & 1 & 1500 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 350 \end{array}\right)$$

Así que $x_1 = 100$, $x_2 = 350$ y $x_3 = 350$.

Por tanto, el biólogo debe poner 100 bacterias de I, 350 de II y III en el tubo de ensayo, si quiere que se consuma toda la comida.

Ej. B Repite el ejemplo previo usando los datos de la siguiente tabla. Esta vez supongo que se colocan 1500 unidades de A, 3000 de B y 4500 de C.

	Cepa I	Cepa II	Cepa III
Alimento A	1	1	1
Alimento B	1	2	3
Alimento C	1	3	5

Sol. Como antes, x_1, x_2, x_3 son las cantidades de bacterias de cada tipo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1500 \\ 1 & 2 & 3 & 3000 \\ 1 & 3 & 5 & 4500 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

4

En este caso tenemos más de una solución

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 = 1500$$

Si hacemos $x_3 = t$, obtenemos $x_1 = t$, $x_2 = 1500 - 2t$ y $x_3 = t$. Por supuesto, la cantidad de bacterias no puede ser negativa, por lo que, $t \geq 0$ y $1500 - 2t \geq 0$. La última desigualdad implica que $t \leq 750$, así que $0 \leq t \leq 750$

La cantidad de bacterias debe ser un entero, de modo que existen 751 valores de t que satisfacen la desigualdad. Nuestras 751 soluciones son de la forma

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, 1500-2t, t)$$
$$= (0, 1500, 0) + t(1, -2, 1)$$

una para cada entero t con $0 \leq t \leq 750$.

15

Una ecuación química balanceada es una ecuación algebraica que proporciona la cantidad relativa de reactivos y productos en una reacción química y que tiene la misma cantidad de átomos de cada tipo en el lado izquierdo y en el derecho. Usualmente se escriben los reactivos a la izquierda y los productos a la derecha y la flecha intermedia muestra la dirección de la reacción.

Por ejemplo

$$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$$

indica que dos moléculas de hidrógeno se combinan con una molécula de oxígeno para formar 2 moléculas de agua.

Decimos que la ecuación está balanceada

Porque a la izquierda hay 4 átomos de hidrógeno y 2 de oxígeno, lo mismo que a la derecha.

Por cierto, cualquier múltiplo de la ecuación funciona:

$$6H_2 + 3O_2 \rightarrow 6H_2O$$

Pero siempre se busca el menor posible

Eje La combustión de amoniaco NH_3 en presencia de oxígeno produce Nitrógeno y agua. Encuentre una ecuación balanceada

Sol. Denotamos con w, x, y, z la cantidad de moléculas de amoniaco, oxígeno, nitrógeno y agua. Tenemos una ecuación de la forma

$$wNH_3 + xO_2 \rightarrow yN_2 + zH_2O$$

7

Comparamos la cantidad de átomos de Nitrógeno, hidrógeno y oxígeno en los reactivos y productos y obtenemos

Nitrógeno $w = 2y$

Hidrógeno $3w = 2z$

Oxígeno $2x = z$

Obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} w - 2y &= 0 \\ 3w - 2z &= 0 \\ 2x - z &= 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \end{array}\right]$$

así que $w = \frac{2}{3}z$

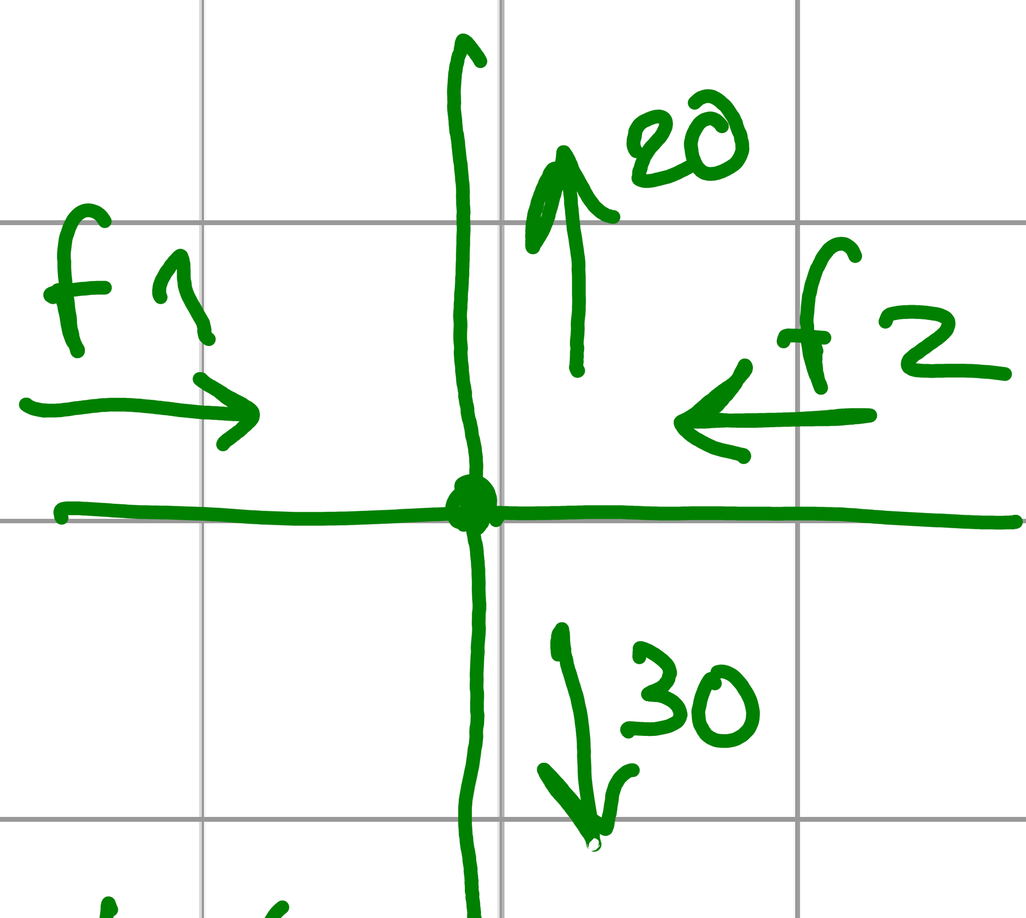
$x = \frac{1}{2}z$ $y = \frac{1}{3}z$

El menor valor posible de z que da lugar a valores enteros para todas las variables es el mínimo común denominador de las fracciones $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ es 6 que

Produce $w=4$, $y=2$, $z=6$. Así

$$4NH_3 + 3O_2 \to 2N_2 + 6H_2O$$

Análisis de redes



Hay muchos tipos de redes: transporte, comunicación, economía, etc. Es importante el flujo en la red. Por ejemplo, vehículos en camino, información, bienes y servicios.

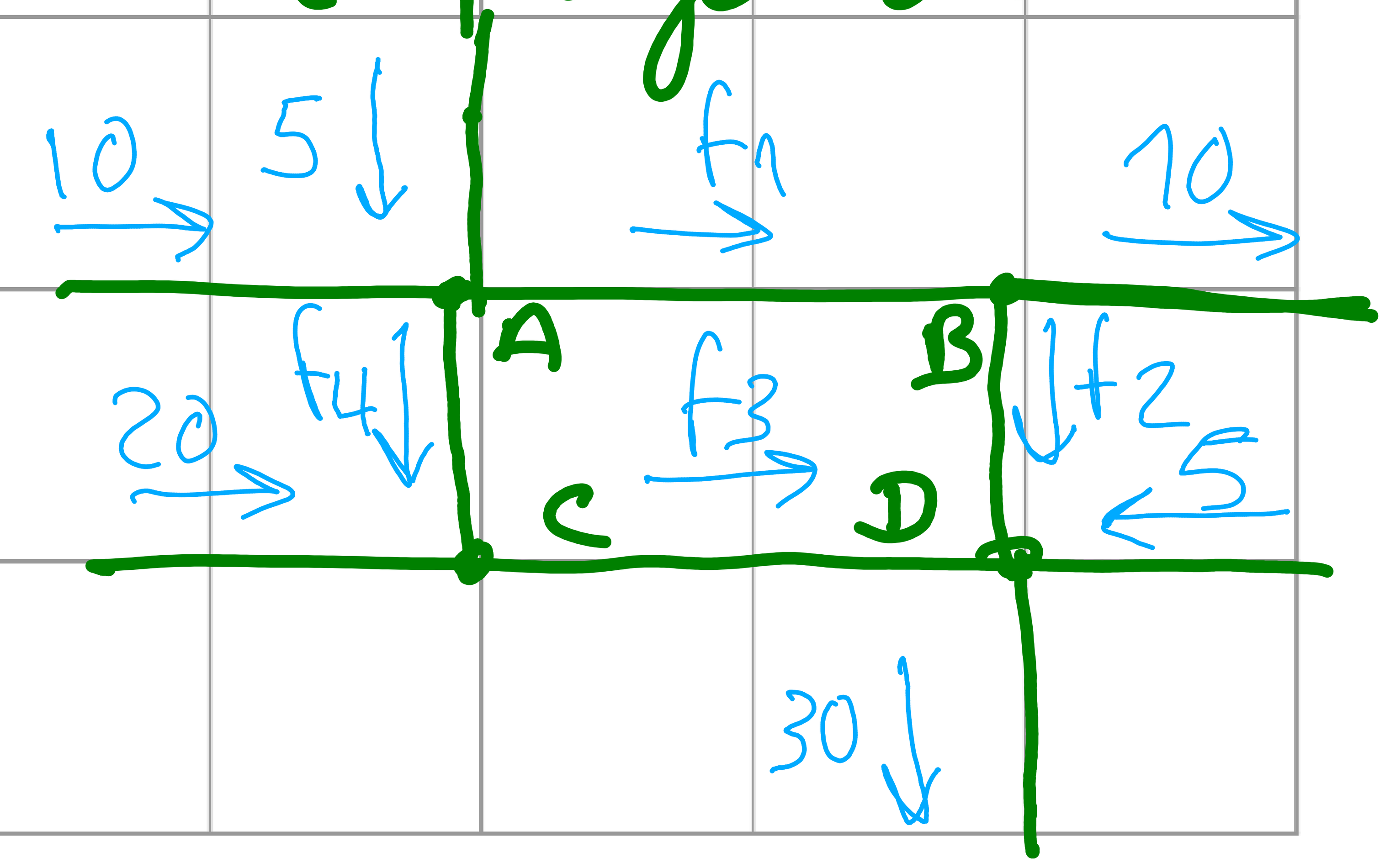
Para nosotros, una red consiste en una cantidad finita de nodos (también llamados vértices) conectados por una serie de aristas dirigidas conocidas como ramas o arcos. Cada rama se etiqueta con un flujo que representa la cantidad de algún bien que puede fluir en la rama en la dirección indicada.

La regla fundamental que gobierna una red es la conservación del flujo

En cada nodo, el flujo que sale es igual al flujo que entra

En la figura se muestra una porción de una red con 2 ramas entrando a un nodo y 2 saliendo. La ley de conservación implica que $f_1 + f_2$ (entrada) debe ser igual al saliente 20+30 unidades.
Tenemos la ecuación $f_1 + f_2 = 50$ correspondiente a este nodo.

<u>Eje 1</u> Describa los flujos posibles en la red de tubos de la figura donde el flujo se mide en litros/minuto



<u>Sol.</u> En cada nodo escribimos la ecuación que representa

la conservación del flujo ahí. Reescribimos cada ecuación con las variables a la izquierda y las constantes a la derecha

Nodo A $\quad 15 = f_1 + f_4 \qquad f_1 + f_4 = 15$

'' B $\quad f_1 = f_2 + 10 \quad \rightsquigarrow \quad f_1 - f_2 = 10$

'' C $\quad f_2 + f_3 + 5 = 30 \qquad f_2 + f_3 = 25$

'' D $\quad f_4 + 20 = f_3 \qquad f_3 - f_4 = 20$

Usamos Gauß-Jordan

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Aparece una variable libre, f_4, así que tenemos una infinidad de soluciones

Ponemos $f_4 = t$ y expresamos

$$f_4 = t$$
$$f_3 = 20 + t$$
$$f_2 = 5 - t$$
$$f_1 = 15 - t$$

Estas ecuaciones describen todos los flujos posibles y nos permite analizar la red.

Por ejemplo, si controlamos el flujo en la rama AD de tal forma que $t = 5\ l/min$ los otros flujos son $f_1 = 10$, $f_2 = 0$, $f_3 = 25$

Aún mejor, podemos encontrar los flujos máximos y mínimos en cada rama; cada flujo debe ser no negativo. Examinamos la primera y segunda ecuación, $t \leq 15$ (de lo contrario f_1 sería negativo) y $t \leq 5$ (en otro caso f_2 sería negativo). La segunda desigualdad es más restrictiva que la primera, así que la segunda se impone. La tercera ecuación no contribuye en cuanto a restricciones en el parámetro t, así que $0 \leq t \leq 5$.

Si combinamos estos resultados con las cuatro ecuaciones,

$$10 \leq f_1 \leq 15$$
$$0 \leq f_2 \leq 5$$
$$20 \leq f_3 \leq 25$$
$$0 \leq f_4 \leq 5$$

tenemos una descripción completa del flujo en esta red

Redes eléctricas

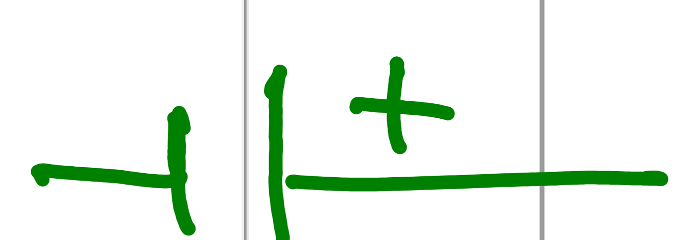
Una red particular son las eléctricas. Una fuente de potencial "fuerza" una corriente de electrones a que fluyan en la red, dado encuentra resistencias, y cada una de éstas requiere cierta cantidad de fuerza para que haya flujo.

La ley fundamental es la ley de Ohm que establece qué fuerza E se requiere para establecer una corriente I a través de una resistencia R

Fuerza = resistencia x corriente

$$E = RI$$

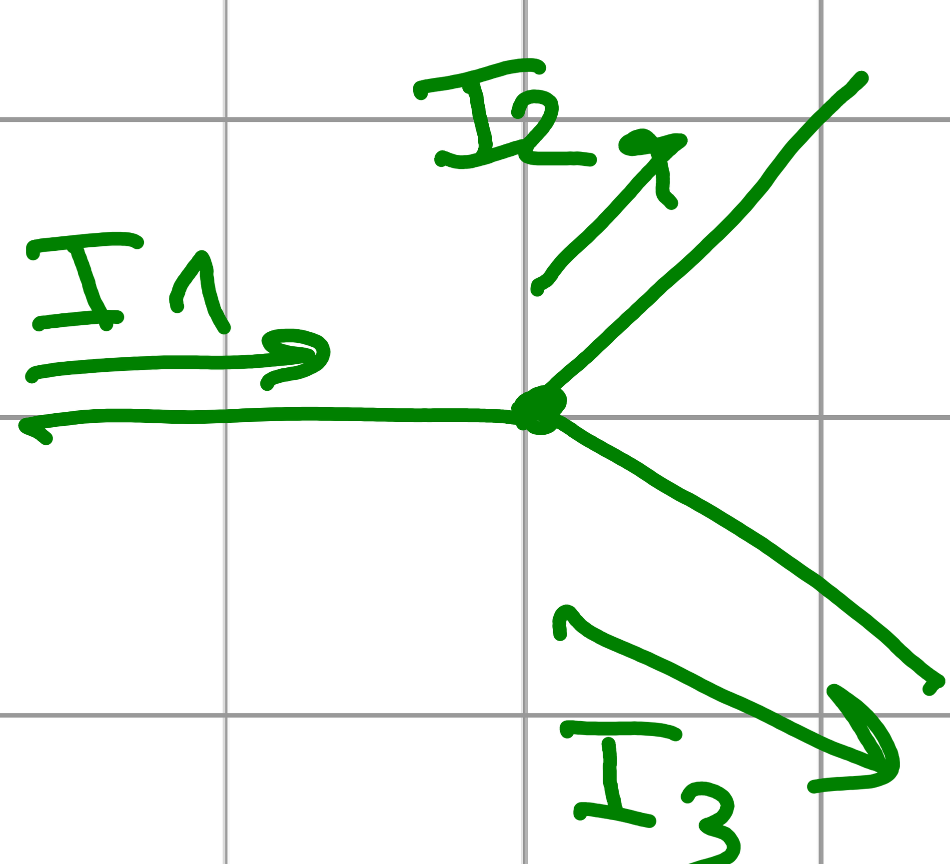
La fuerza se mide en voltios, resistencia en ohmios y la corriente en amperes, así voltios = ohmios x amperes, nos indica qué caída de voltaje ocurre cuando circula una corriente en la resistencia.

La corriente sale de la terminal positiva de una batería y retorna a la terminal negativa viajando por uno o más circuitos cerrados. En un diagrama de una red eléctrica, las baterías se representan  y la resistencia . Las dos siguientes leyes gobiernan las redes eléctricas. La primera es una ley de conservación de flujo en cada en cada nodo; la segunda es un balance de voltaje en cada circuito

Leyes de Kirchoff

(Nodos) La suma de las corrientes que llegan a cada nodo es igual a la suma de las que salen

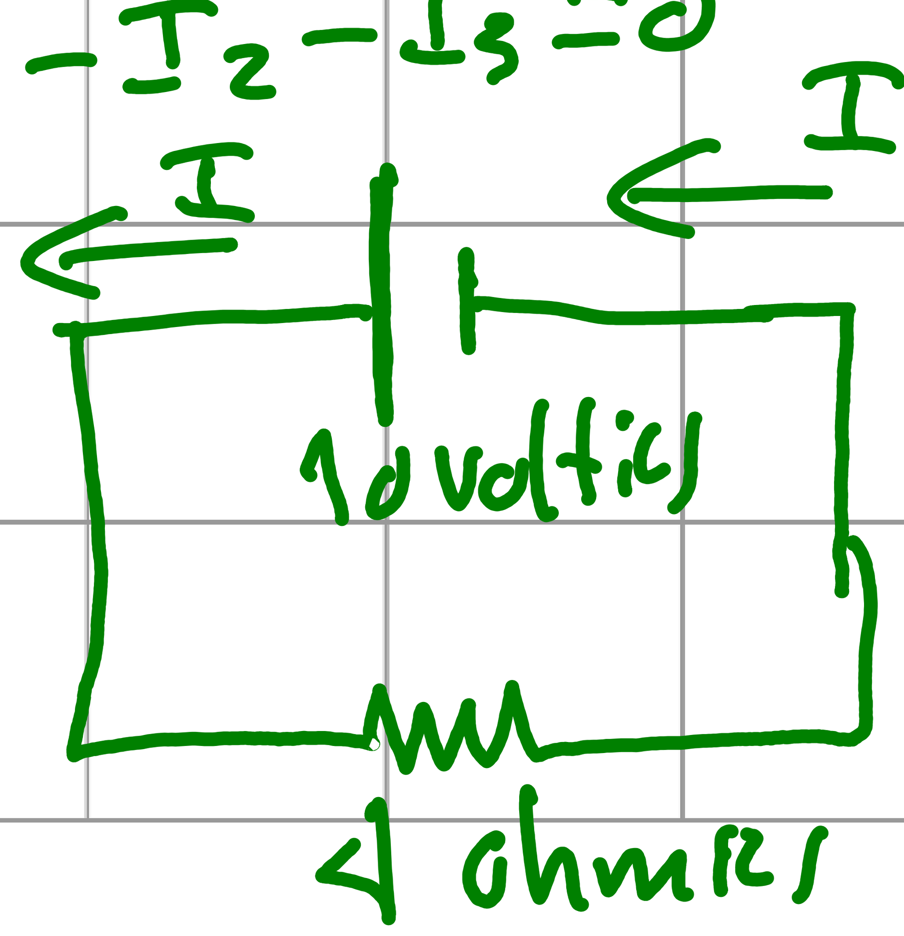
(Circuitos) La suma de las caidas de voltaje alrededor de cualquier circuito es igual al voltaje total en el circuito (dado por la batería).



$I_1 = I_2 + I_3$

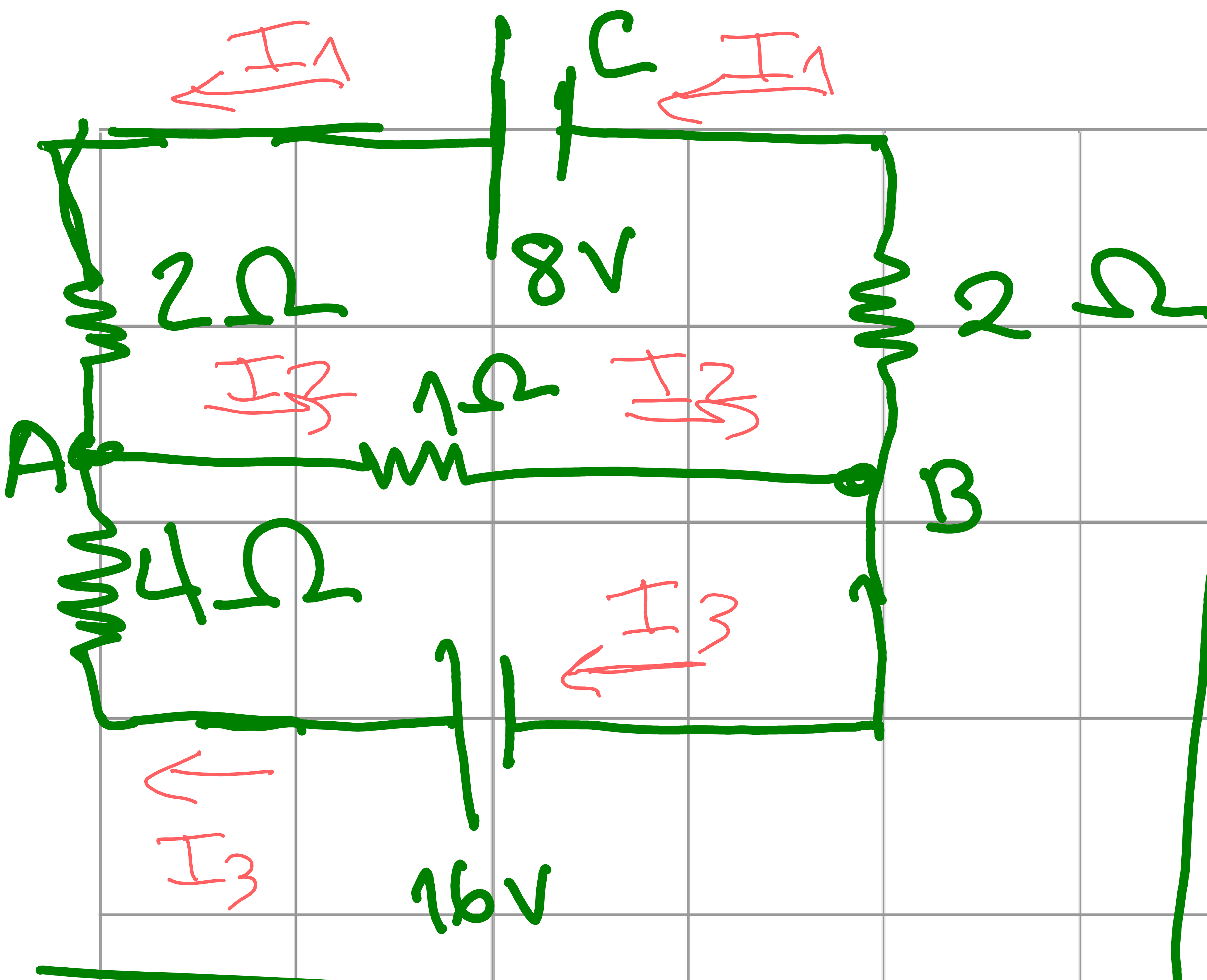
o

$I_1 - I_2 - I_3 = 0$



$4I = 10$
ley de Ohm

Ejemplo E Determine las corrientes I_1, I_2, I_3 en la red eléctrica de la figura



Sol. Esta red tiene 2 baterias y 4 resistencias. la corriente I_1 fluyen BCA, corriente I_2 fluye por la rama AB, I_3 por BDA

En el nodo A, la ley da $I_1 + I_3 = I_2$ o

$I_1 - I_2 + I_3 = 0$

Obtenemos la misma ecuación en el nodo B

Aplicamos la ley de voltaje para cada circuito

Para el circuito CABC, la caida de voltaje en las resistencias son $2I_1$, I_2 y $2I_1$. Tenemos la ecuación $4I_1 + I_2 = 8$

En forma similar para el circuito DABD da lugar a

$I_2 + 4I_3 = 16$

De hecho, hay un tercer circuito CADBC, si vamos "contra el flujo"

En este caso, debemos tratar los voltajes y resistencias en las trayectorias "al revés" como negativas.

Haciendo esto $2I_1 + 2I_1 - 4I_3 = 8 - 16 = -8$

o $4I_1 - 4I_3 = -8$

que es precisamente la diferencia de las ecuaciones de voltaje para los otros dos circuitos

Por tanto, podemos omitir esta ecuación, porque no aporta información nueva. Por otra parte incluirla no daña.

Ahora tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$
$$4I_1 + I_2 = 8$$
$$I_2 + 4I_3 = 16$$

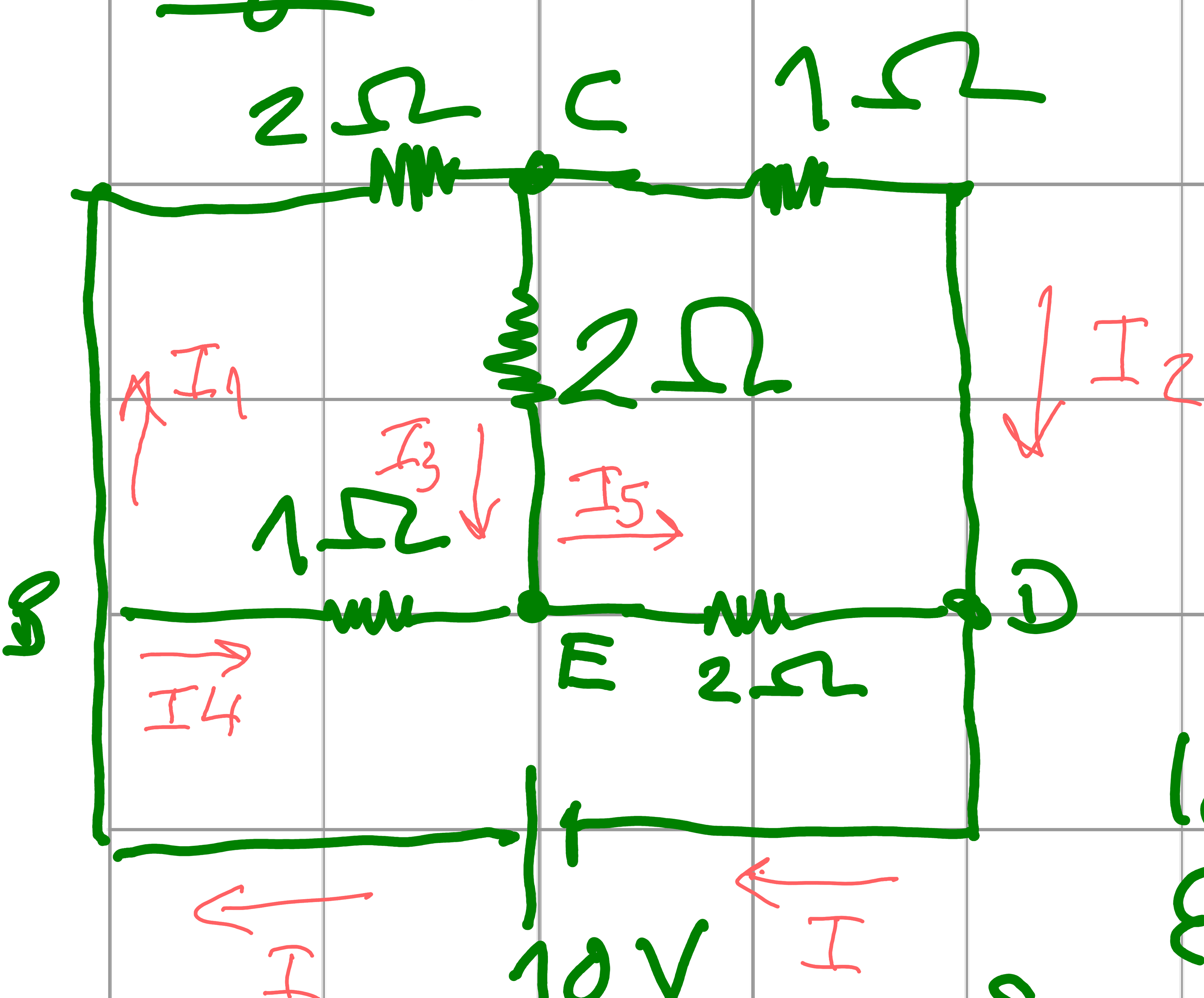
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \end{array}\right] \overset{\text{Gauß-Jordan}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$I_1 = 4$ amperes, $I_2 = 4\,A$ $I_3 = 3\,A$

En algunas redes eléctricas, las corrientes pueden tener valores fraccionales o negativos. Un valor negativo significa simplemente que la corriente en la rama fluye en la dirección opuesta que la mostrada en el diagrama

---

Eje F



La red de la figura tiene una sola fuente de potencia A y 5 resistencias. Determine las corrientes $I_1, I_2, \ldots, I_5, I$. Este es un ejemplo de lo que se conoce como circuito puente.

Sol. La ley de Kirchoff propicia las siguientes ecuaciones en los 4 nodos

Nodo B $I - I_1 - I_4 = 0$

" C $I_1 - I_2 - I_3 = 0$

" D $I - I_2 - I_5 = 0$

" E $I_3 + I_4 - I_5 = 0$

Para los 3 circuitos básicos, la ley de voltaje da lugar a

ABEDA $I_4 + 2I_5 = 10$

BCEB $2I_1 + 2I_3 - I_4 = 0$

CDEC $I_2 - 2I_5 - 2I_3 = 0$

Note que la rama DAB no tiene resistencia, y por tanto no hay caída de voltaje, por lo que no hay término I en la ecuación para el circuito ABEDA; hemos tenido que cambiar los signos tres veces porque vamos "contra corriente". Esto no es problema alguno, porque dejamos que el signo de la solución

Determine la dirección de la corriente.

Ahora tenemos un sistema de siete ecuaciones en seis variables

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La solución en amperes es $I = 7$, $I_1 = I_5 = 3$
$I_2 = I_4 = 4$, $I_3 = -1$

El signo negativo aquí significa que la corriente en la rama CE fluye en la dirección opuesta a la marcada en el diagrama

Sólo tenemos una fuente de poder, así que la batería de 10V manda una corriente de

7 amperes. Si sustituimos estos valores en la ley de Ohm $E=RI$ obtenemos $10=7R$ o $R=10/7$, lo que indica que tiene una resistencia "global" equivalente a $10/7$ Ohmios, que se conoce como la resistencia efectiva de la red.

EJERCICIOS

1 Suponga que en el ejemplo A 400 unidades de A, 600 unidades de B y 600 unidades de C se colocan en el tubo de ensayo cada día con la siguiente tabla de consumo

	Cepa I	Cepa II	Cepa III
A	1	2	0
B	2	1	1
C	1	1	2

¿Cuantas bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo que consuman todo el alimento?

2. Supongo que en el ejemplo A, se tienen 400 unidades de alimento A, 500 de B y 600 de C, y se ponen en el tubo de ensayo con el consumo diario dado por la siguiente tabla

	Cepa I	Cepa II	Cepa III
Alimento A	1	2	0
" " B	2	1	3
" " C	1	1	1

¿Cuántas bacterias pueden vivir juntas en el tubo y consumir toda la comida?

3. Una florista ofrece 3 arreglos florales de tamaño distinto conteniendo rosas, claveles y crisantemos. El arreglo pequeño contiene 1 rosa, tres claveles y 3 crisantemos

El arreglo medio consta de 2 rosas 4 claveles y 6 crisantemos, mientras que el grande lleva 4 rosas, 8 claveles y 6 crisantema. Un día la florista nota que usó 24 rosas, 50 claveles y 48 crisantemos al cumplir los pedidos para estos 3 tipos de arreglos. ¿Cuántos arreglos de cada tipo fabricó?

4.- Un dueño de cafetería vende tres tipos de mezclas de café: Una bolsa de la mezcla de la casa contiene 300 g de café colombiano 200 g chiapaneco. Una bolsa de la mezcla especial consta de 200 g café colombiano 200 g veracruzano y 100 g chiapaneco. Una bolsa de mezcla de lujo consiste en 100 g colombiano, 200 g veracruzano y 200 g de

Chiapaneco. El vendedor tiene a la mano 30 kg de Colombiano, 15 kg de veracruzano y 25 kg chiapaneco

Si el pretende usar todas sus reservas de café ¿Cuántas bulsas de cada tipo de mezcla debe formar?

6. Haga de nuevo el ejercicio previo, pero esta vez la mezcla de la casa contiene 300g colombiano, 50g veracruzano y 150g chiapaneco; la mezcla de lujo consiste en 100g colombiano, 350g veracruzano y 50g chiapaneco. Esta vez el vendedor dispone de 30 kg de colombiano, 15 kg veracruzano y 15 kg chiapaneco.

Suponga que una bolsa de la mezcla de la casa da un beneficio de 500 pesos, una

24

bolsa de la mezcla especial da un beneficio de 750 pesos y la mezcla de lujo propicia una ganancia de 1000 pesos ¿Cuántas bolsas de cada tipo se deben preparar si se quiere usar todo el café disponible y obtener una ganancia máxima? ¿Cuál es la ganancia máxima?

7. Balancee las siguientes reacciones químicas

a) $FeS_2 + O_2 \rightarrow Fe_2O_3 + SO_2$

b) $CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$
(Fotosíntesis)

c) $C_4H_{10} + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$
(Quema de butano)

d) $C_7H_6O_2 + O_2 \rightarrow H_2O + CO_2$

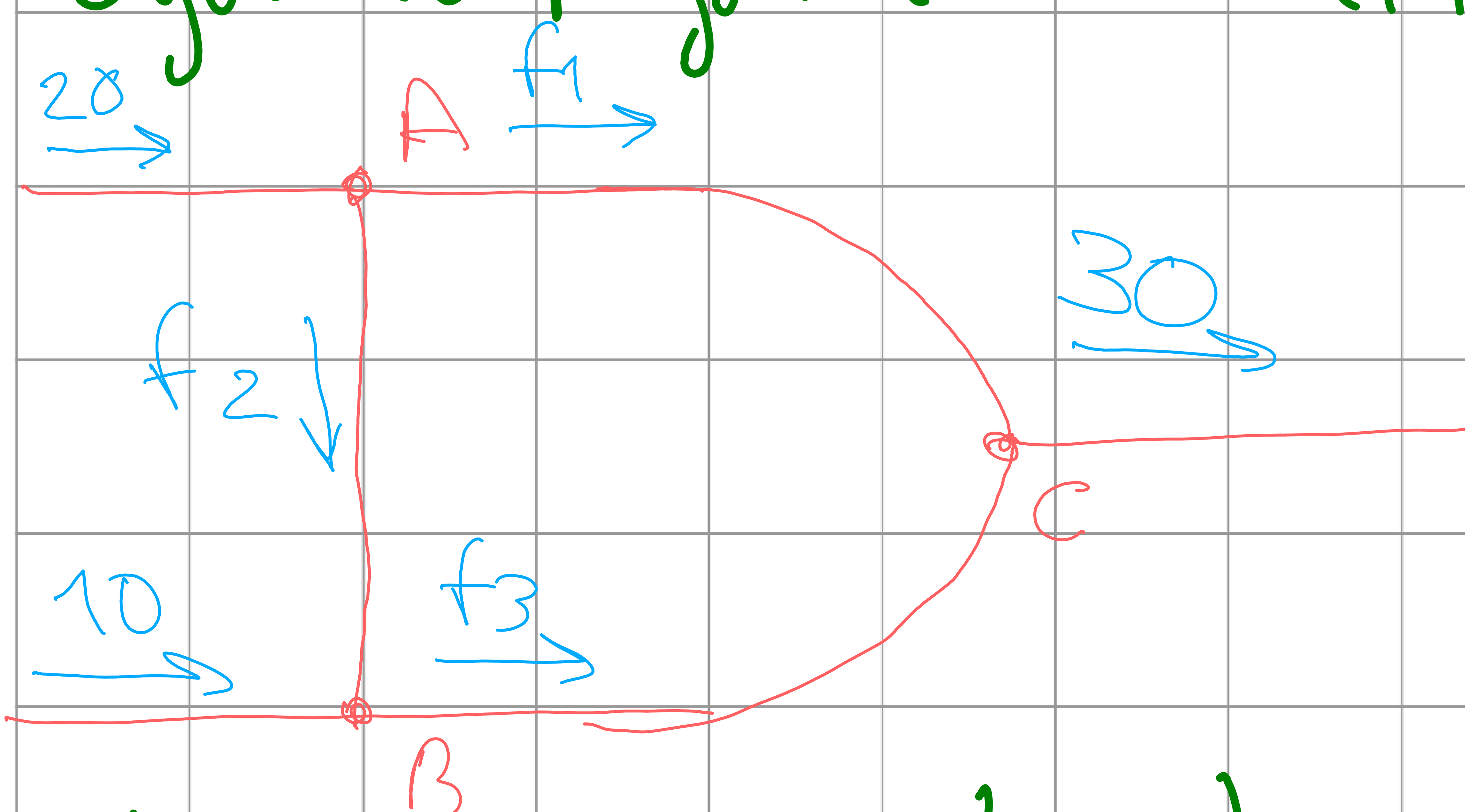
e) $C_5H_{11}OH + O_2 \rightarrow H_2O + CO_2$

f) $HClO_4 + P_4O_{10} \rightarrow H_3PO_4 + Cl_2O_7$

g) $Na_2CO_3 + C + N_2 \rightarrow NaCN + CO$

h) $C_2H_2Cl_4 + Ca(OH)_2 \rightarrow C_2HCl_3 + CaCl_2 + H_2O$

8. La figura muestra una red de tubos de agua con flujos medidos en litros/min

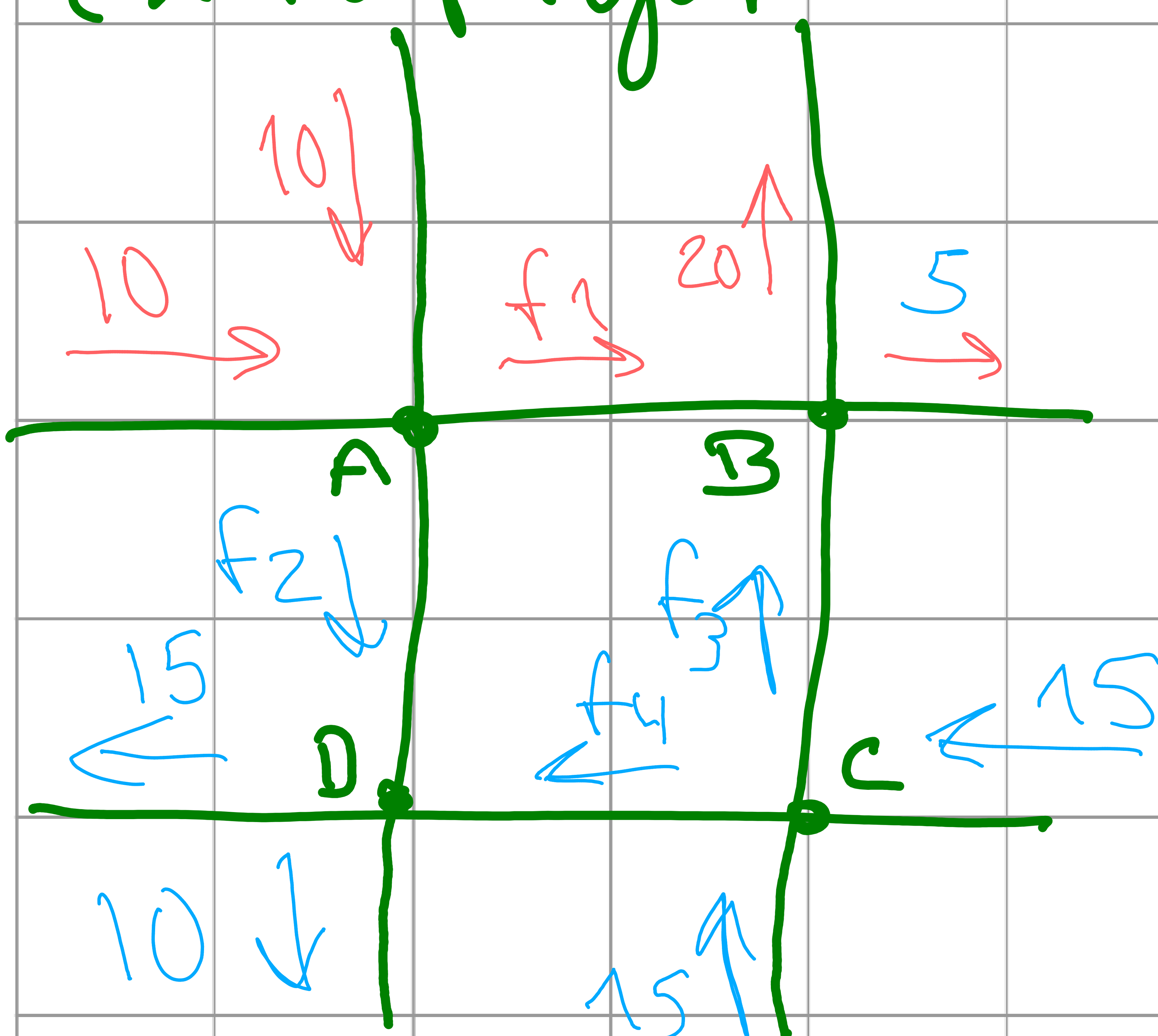


a) Construya un sistema de ecuaciones para encontrar los flujos, y resuélvalo.

b) Si el flujo en AB está restringido a 5 l/min ¿cuál sería el flujo en las otras ramas?

c) ¿Cuáles son los flujos máximos y mínimos posibles en cada rama?

9. Una sección de Tenochtitlan consistía de canales de 1 sentido, y se midió el flujo de embarcaciones en cada intersección. Para la parte marcada en la figura



Los números representan la cantidad promedio de embarcaciones por minuto entrando y saliendo de las intersecciones A, B, C, D durante horas pico.

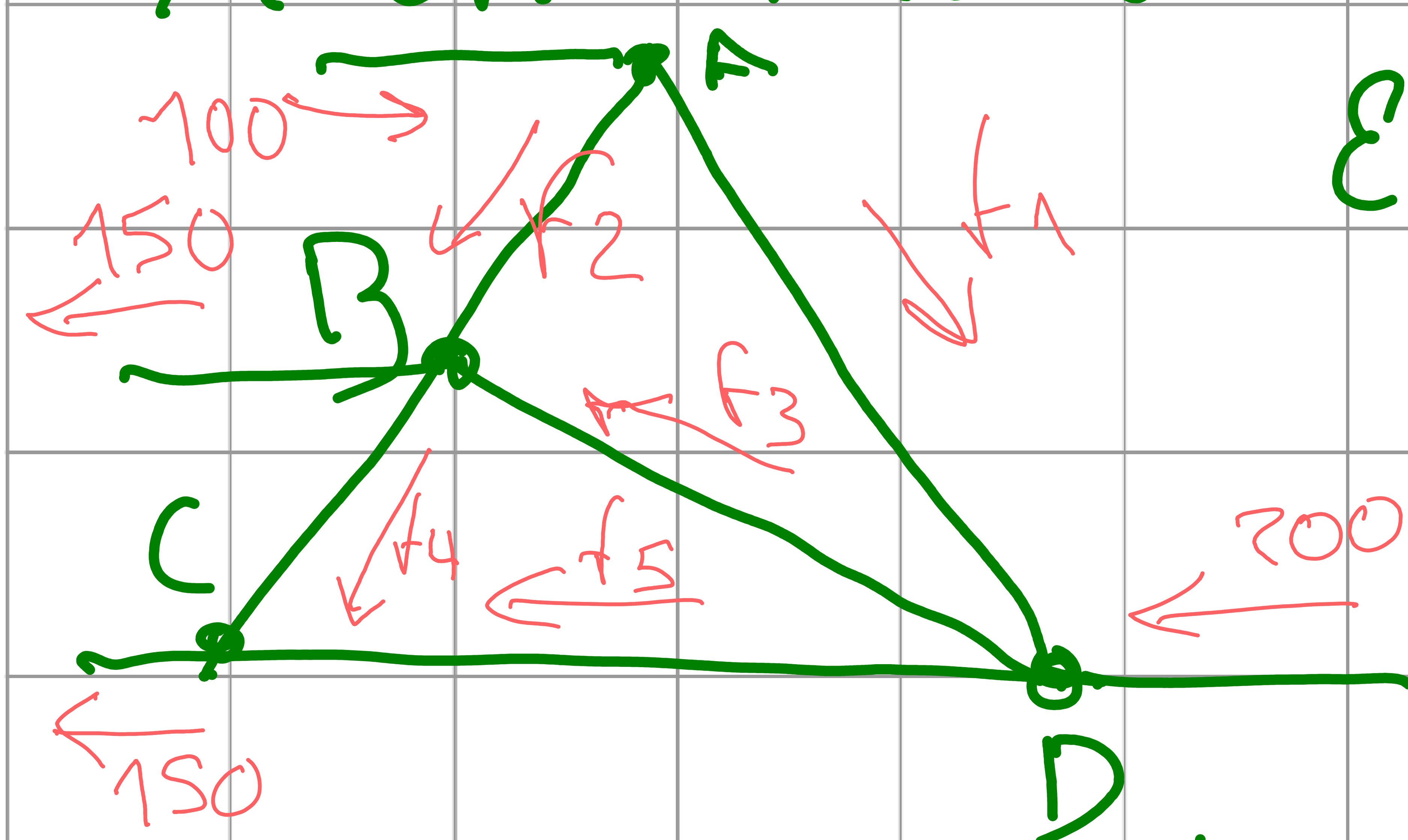
a) Conforme y resuelva un sistema de ecuaciones para determinar los flujos $f_1, \dots, f_4$

b) Si el tráfico es regulado en CD de tal suerte que $f_4 = 10$ embarcaciones por minuto ¿cuál será el flujo promedio en los otros canales

c) ¿Cuál es el flujo máximo y mínimo posible en cada canal?

d) ¿Cómo cambia la solución si se invierten las direcciones en cada canal?

10. Una red de canales de riego en Xochimilco se muestra en la figura



El flujo se mide en miles de litros/día

a) Construya y resuelva un sistema de ecuaciones para determinar los flujos posibles $f_1, \dots, f_5$

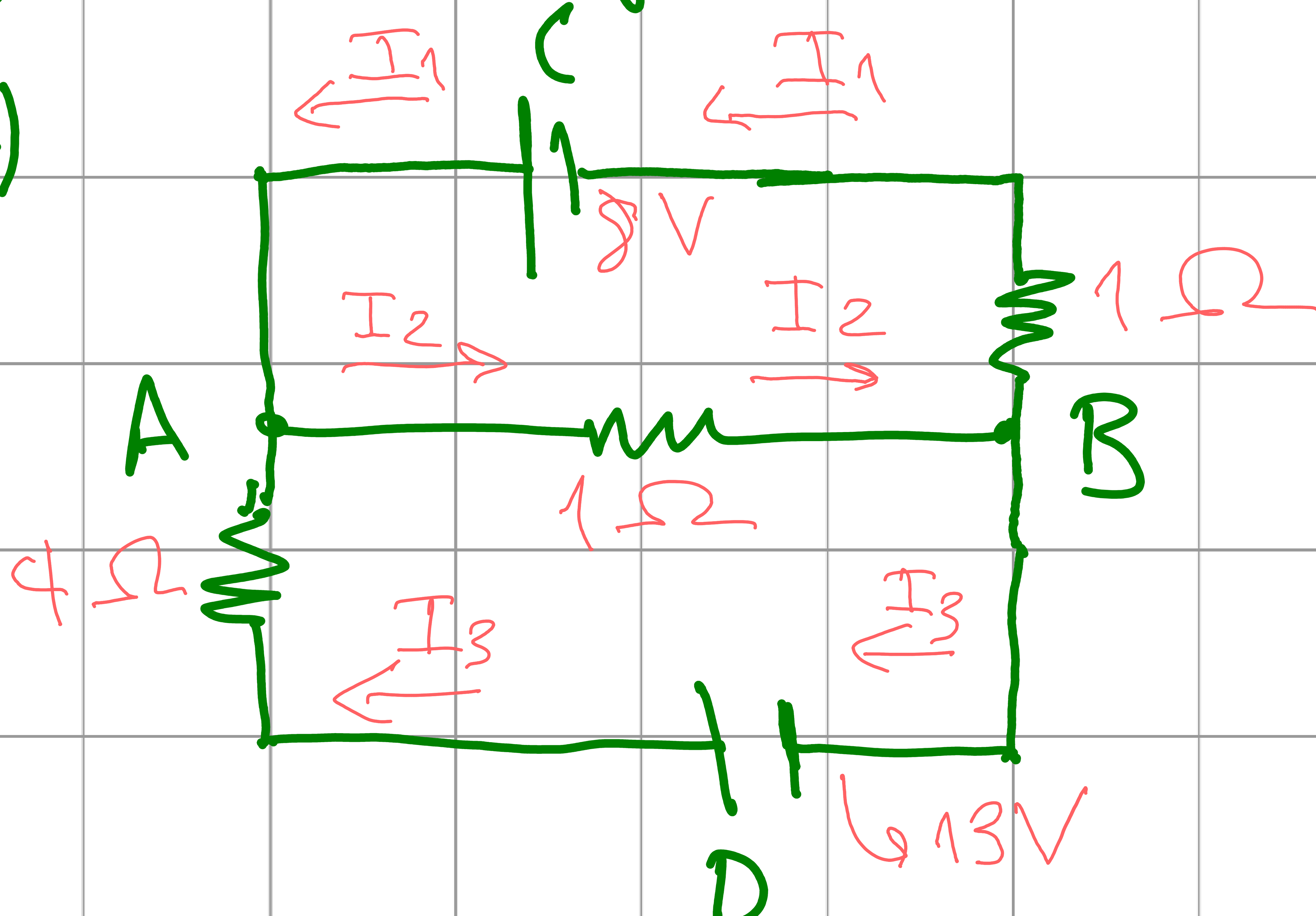
b) Suponga que DC está cerrado. ¿Qué rango de flujo se requiere para que se mantenga en DB?

c) De la figura es claro que DB no se puede cortar ¿por qué? ¿Cómo demuestra esto la solución de a)?

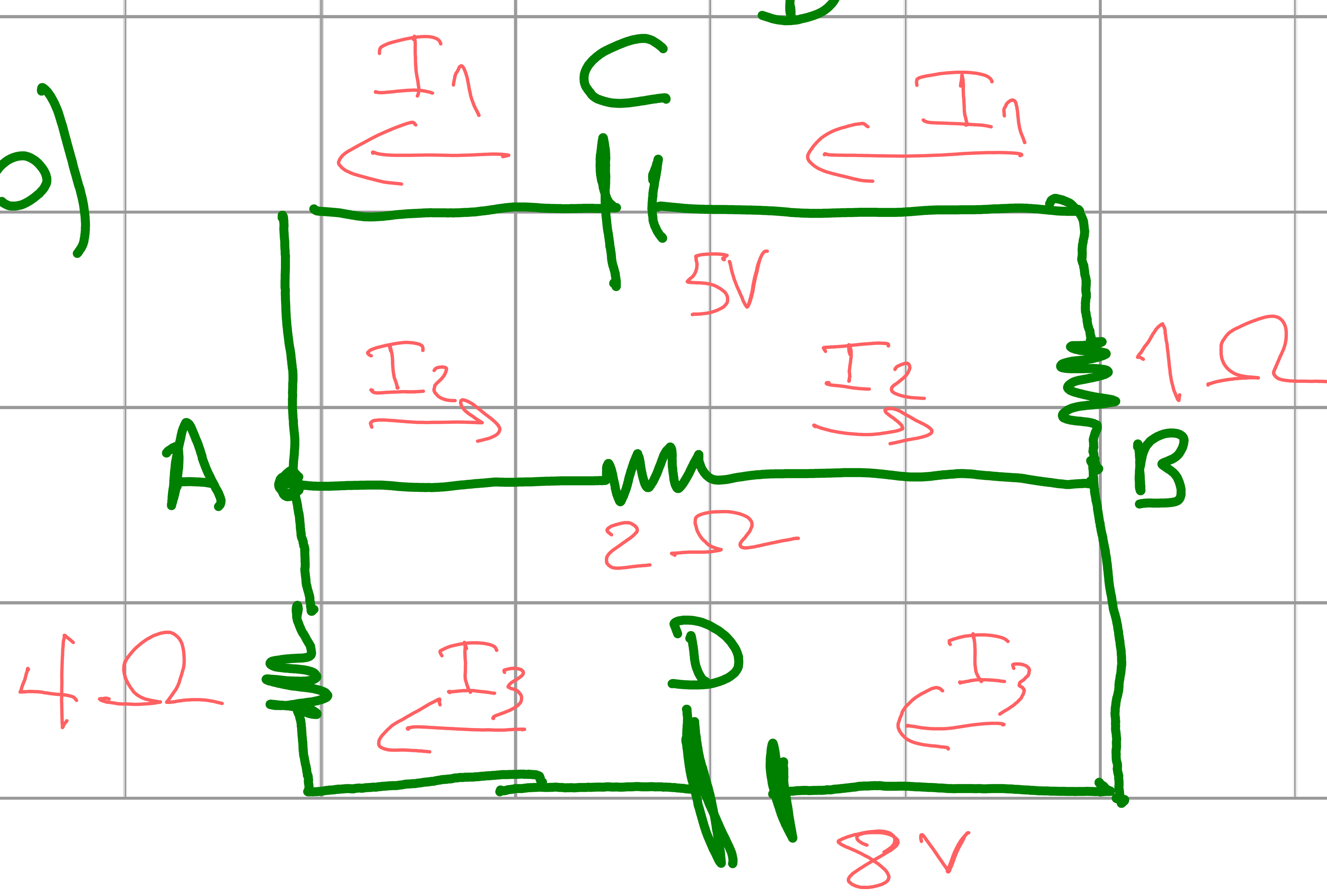
d) De la solución de (a) determine el flujo máximo y mínimo en DB?

11. En los siguientes circuitos determine las corrientes para los circuitos dados

a)



b)



12. a) Encuentre las corrientes $I_1, I_2, \ldots, I_5$ en el puente de la figura