14

Ahora nos dedicaremos a estudiar matrices por sí mismas, sus operaciones aritméticas, y muchas cosas más.

Ya sabemos que una matriz $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números colocados en m renglones y n columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Dos matrices $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ son iguales si tienen el mismo tamaño y componente a componente son iguales.

Un vector columna $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ es un tipo especial de matriz

Sean $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ dos matrices de $m\times n$. Definimos la suma como

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Así, $A+B$ es la matriz de $m\times n$ que se obtiene al sumar las componentes correspondientes de A y B.

Es importante notar que la suma de dos matrices sólo se puede llevar a cabo cuando las matrices tienen el mismo tamaño.

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.01 & 0.0 \\ 0.5 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 7 & 11 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.1 & 5.2 & 9.3 \\ 2.4 & 7.01 & 11 \\ 3.5 & 8.1 & 13.1 \end{pmatrix}$$

También podemos multiplicar matrices entre ellas y por un escalar

Si $A=(a_{ij})$ es una matriz de $m\times n$ y α es un escalar, αA está dada por

$$\alpha A=(\alpha a_{ij})=\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n}\\ \vdots & & \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 13 & 21 & 22\\ 25 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad \alpha=2$$

$$\alpha A=\begin{pmatrix}4 & 10 & 14\\ 26 & 42 & 44\\ 50 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

Si $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $\qquad 2A-3B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -6\end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Teo Sean A, B, C matrices de $m \times n$ y α un escalar.

i) $A + O = A$ iii) $A + B = B + A$

ii) $OA = O$ iv) $(A+B)+C = A+(B+C)$

v) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ vi) $1A = A$

Dem La prueba es sencilla y queda como ejercicio ///

EJERCICIOS

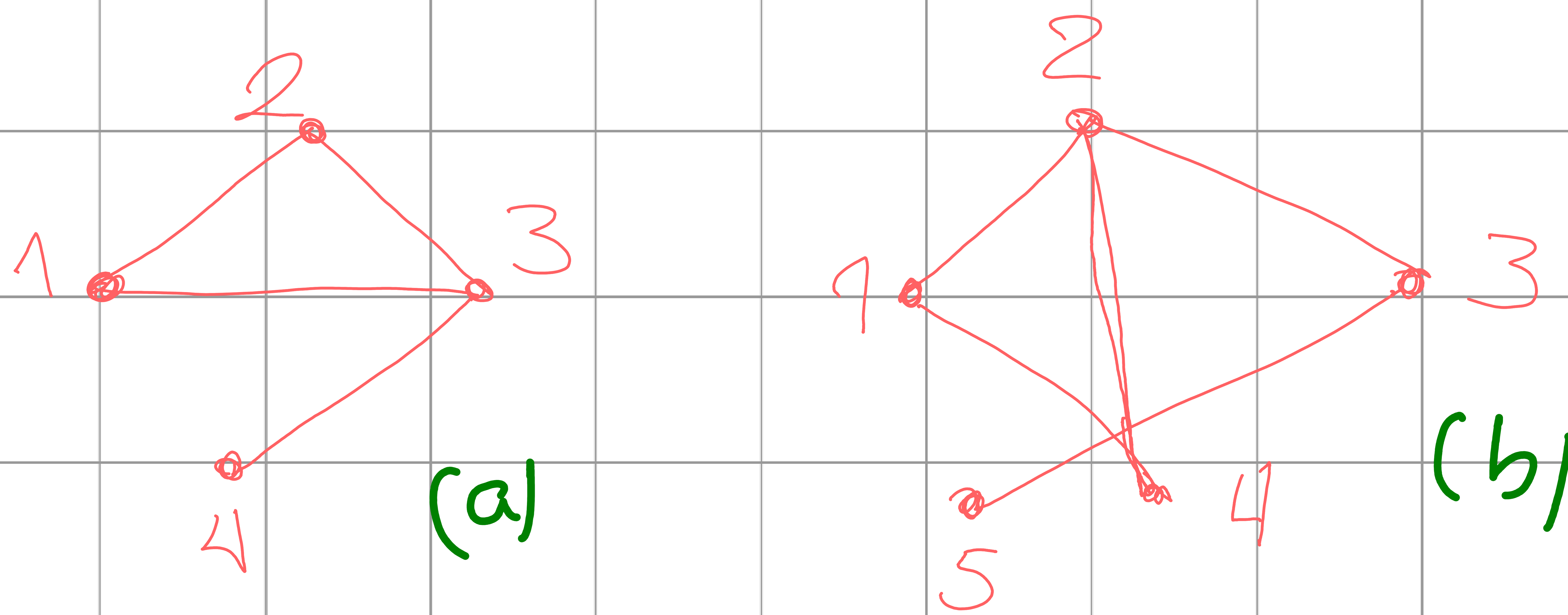
1. a) Encuentre una matriz D tal que $2A + B - D$ es la matriz cero de 3×2 dado

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 6 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Encuentre una matriz E tal que $A + 2B - 3C + E$ es la matriz cero de 3×2.

2. Considere los siguientes gráficas



a) Construya una matriz de 4×4 con la propiedad de que $a_{ij}=0$ cuando el punto i no está conectado (por una línea) con el punto j, $a_{ij}=1$ si i está conectado con j, para la gráfica (a)

b) haga lo mismo para la matriz (b) con una matriz de 5×5

Multiplicación de matrices

Ahora veremos como multiplicar dos matrices de $m \times n$, $n \times p$ para obtener una matriz de $m \times p$ cuya componente   16

ij es $a_{ij} b_{ij}$

Antes otro producto

Eje Suponga que un obrero produce 4 objetos. La demanda de los artículos está dado por el vector demanda

$\vec{d} = (30 \;\; 20 \;\; 40 \;\; 10)$ (una matriz de 1×4). El precio por unidad que recibe el obrero por los artículos está dado por el vector precio

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \$20 \\ \$15 \\ \$18 \\ \$40 \end{pmatrix}$$ (una matriz de 4×1)

Si se satisface la demanda, ¿cuánto dinero recibe el obrero?

Sol La demanda por el primer artículo es 30 y el obrero recibe \$20 por cada ejemplar del primer artículo: $30 \cdot 20 = \$600$

Continuamos con este razonamiento obtenemos que la cantidad total de dinero recibido es

$$(30)(20)+(20)(15)+(40)(18)+(10)(40)$$
$$= 600 + 300 + 720 + 400$$
$$= \$\,2020$$

Escribimos este resultado como

$$\begin{pmatrix} 30 & 20 & 40 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix} = 2020$$

multiplicamos una matriz de 1×4 por una matriz de 4×1 y obtenemos una matriz de 1×1

$$(1 \times 4)(4 \times 1) = 1 \times 1$$

Def [Producto de dos matrices]

Sean $A=(a_{ij})$ una matriz de $m\times n$ y $B=(b_{ij})$ una matriz de $n\times p$. Entonces el producto de A y B

El producto de A y B es la matriz de $m\times p$ $C=(c_{ij})$, donde

(3) $c_{ij}=$ (i-ésimo renglón de A)$\cdot$(j-ésima columna de B)

Esto es, el ij-ésimo elemento de AB es el producto del i-ésimo renglón de A por la j-ésima columna de B. Si escribimos esto,

(4) $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$

Podemos multiplicar dos matrices sólo si el número de columnas de la primera es igual a la cantidad de renglones en la segunda.

Para ilustrar esto, escribamos las matrices A y B

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & & b_{np} \end{pmatrix}$$

i-ésimo renglón de A

j-ésima columna de B

Ej $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

A es 2×2 B es 2×2

$C = AB$ es 2×2

$$C = \begin{pmatrix} 18 & 16 \\ 14 & 28 \end{pmatrix}$$

1er renglón de A × 1ª columna B

1er renglón de A × 2ª columna B

2º renglón A × 2ª columna B

2º renglón A × 1ª columna de B

$D = BA$ también es 2×2

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -7 & 39 \end{pmatrix}$$

Note que $AB \neq BA$

Note también que AB puede estar definido, pero no BA

Ej. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

A es 2×3 B es 3×4

$C = AB$ es 2×4

$$C = \begin{pmatrix} 23 & -5 & 2 & 5 \\ 15 & 6 & 26 & 39 \end{pmatrix}$$

BA no es posible

B es $3 \times \underbrace{4 \quad A \text{ es } 2}_{\text{No coinciden}} \times 3$

Ej. Suponga que 4 individuos se han contagiado de una enfermedad. Este grupo tiene contacto con 6 personas en un segundo

grupo y representamos estos contactos, llamados directos, por una matriz de
4×6.

Matriz de contacto:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para $a_{ij} = 1$ si la i-ésima persona en el primer grupo tiene contacto con la j-ésima persona en el segundo grupo

Ahora supongo que un tercer grupo de cinco personas ha tenido contacto variado con individuos del segundo grupo.
Representamos esto por una matriz.

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$b_{64}=0$ significa que la sexta persona en el segundo grupo no ha tenido contacto con la cuarta persona en el tercer grupo

Los contactos indirectos o de 2° orden entre los individuos en el primer y tercer grupo están representados por la matriz de 4×5 $C=AB$.

Para cerciorarnos de esto, observe que una persona en el grupo 3 se puede infectar por alguien en el grupo 3 que a su vez ha sido infectado por alguien del grupo 1. Por ejemplo, Como $a_{24}=1$ y $b_{45}=1$, vemos que, indirectamente, la quinta persona en el grupo 3 ha tenido contacto (a través de la cuarta persona en el grupo 2) con la segunda persona en el grupo 1.

La cantidad total de contactos indirectos entre la segunda persona en el grupo 1 y la quinta persona en el grupo 3 está dado por

$$c_{25}=a_{21}b_{15}+a_{22}b_{25}+a_{23}b_{35}+a_{24}b_{45}+a_{25}b_{55}+a_{26}b_{65}$$

$$=1\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0$$

$$=2$$

Matriz de contacto indirecto 1º y 3er grupos

$$C=AB\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & ? & 0 & ? \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se observa que sólo la 2ª persona en el grupo 3 <u>no</u> tiene contactos indirectos con la enfermedad.
La 5ª persona en este grupo tiene $2+1+1=4$ contactos indirectos.

Propiedad,
Sean $A=(a_{ij})$ una matriz de $n\times m$, $B=(b_{ij})$ de $m\times p$ y $C=(c_{ij})$ de $p\times q$.
Entonces,

$$A(BC)=(AB)C \qquad (5)$$

y ABC, definida por cualquier lado de (5), es una matriz de $n\times q$.

Si las siguientes sumas y productos están definidos, entonces,

$$A(B+C)=AB+AC \qquad (7)$$

$$(A+B)C = AC + BC \quad (8)$$

EJERCICIOS

1.- Calcule

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

2. Encuentre una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3- Como en el ejemplo en la lección

Suponga que un grupo de personas contrajeron una enfermedad contagiosa. Estas personas tienen contacto con un segundo grupo que a su vez tienen contacto con un tercer grupo. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

representa los contactos entre el grupo contagioso y los miembros del grupo 2, sea

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

representa el contacto entre grupos 2 y 3

a) ¿Cuánta gente hay en cada grupo?

b) determine la matriz de contactos indirectos entre los grupos 1 y 3

4 Resuelva el ejercicio 3 con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Sea A una matriz cuadrada. Entonces,

$$A^2 = AA$$

a) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^2$

b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, determine A^2

c) Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcule A^3