Ahora que conocemos las operaciones entre matrices las aprovecharemos para tratar los sistemas de ecuaciones lineales.

Como siempre, consideremos el sistema

$$(1)\quad \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

Ahora escribimos la matriz del sistema o de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

y por separado anotamos la

$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es la matriz de las incógnitas

y $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ la matriz de los términos a la derecha del sistema.

A es una matriz de $m \times n$

$\bar{X}$ es una matriz de $m \times 1$

$\bar{b}$ " " " "

Apelando a la definición de multiplicación de matrices escribimos el sistema de ecuaciones como

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

Así, si el sistema de ecuaciones es homogéneo, ocurre que

$$A\bar{x} = \bar{0}$$

Observación, el sistema (1) es, en general,

Un sistema no homogéneo y escribimos
$$A\bar{x}=\bar{b} \quad (4)$$
El sistema homogéneo asociado es
$$A\bar{x}=\bar{0} \quad (5)$$

Teo 1 Sean $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ soluciones del sistema no homogéneo (4). Entonces $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ es solución del sistema homogéneo asociado (5)

Dem
$$A(\bar{x}_1-\bar{x}_2)=A\bar{x}_1-A\bar{x}_2$$
$$=\bar{b}-\bar{b}$$
$$=\bar{0}$$

Coro Sea $\bar{x}$ una solución cualquiera (llamada solución particular) del sistema no homogéneo (4) y sea $\bar{y}$ otra solución de (4). Entonces existe una solución $\bar{h}$ del sistema homogéneo (5) tal que

$$\bar{y} = \bar{x} + \bar{h} \qquad (6)$$

Dem: Si $\bar{h}$ está definido como

$$\bar{h} = \bar{y} - \bar{x}$$

entonces, $\bar{h}$ resuelve (5) por el teorema 1 y $\bar{y} = \bar{x} + \bar{h}$ ✗✗

El teorema 1 y su corolario son muy útiles. Para encontrar <u>todas</u> las soluciones del sistema no homogéneo (4), es suficiente encontrar una solución a (4) y todas las soluciones del sistema homogéneo (5).

Eje Encuentre las soluciones (todas) del sistema no homogéneo

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5$$
$$-x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1$$

Sol.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 8 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13 & 4 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, existe una cantidad infinita de soluciones

Ponemos $x_3 = 0$ (cualquier otro valor sería válido), obtenemos $x_1 = 4$ y $x_2 = -1$.

Así, una solución particular $\overline{x}_p = (4, -1, 0)$

Tratamos ahora el sistema homogéneo asociado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ -1 & -3 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Así las soluciones del homogéneo satisfacen

$$x_1 = -13x_3 \qquad x_2 = 7x_3$$

o

$$\bar{X}_h = (x_1, x_2, x_3) = (-13x_3, 7x_3, x_3) = x_3(-13, 7, 1)$$

y las soluciones del sistema homogéneo se puede escribir

$$\bar{X} = \bar{X}_p + \bar{X}_h = (4, -1, 0) + x_3(-13, 7, 1)$$

para un valor de x_3. Por ejemplo, $x_3 = 0$

$\bar{X} = (4, -1, 0)$; $x_3 = 1$ $\bar{X} = (-9, 6, 1)$

EJERCICIOS

1. Encuentre matrices A, $\overline{x}$, $\overline{b}$ de dimensiones apropiadas tales que el sistema representado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

se puede escribir en la forma

$A\overline{x} = \overline{b}$ y resuelva el sistema.

2. Determine las soluciones del sistema no homogéneo primero encontrando una solución (de ser posible) y después encuentre las soluciones al sistema homogéneo asociado.

a) $x_1 - 3x_2 = 2$
$-2x_1 + 6x_2 = -4$

b) $x_1 - x_2 + x_3 = 6$
$3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 18$

c) $x_1 - x_2 - x_3 = 2$
$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$
$x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 2$

d) $x_1 - x_2 - x_3 = 2$
$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$
$x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 2$

e) $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 5$

f) $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2$

$-2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$

$4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6$

Considere $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA = I_2$$

La matriz I_2 de 2×2 se llama matriz identidad

B es la "inversa" de A o A es la "inversa" de B. $A = B^{-1}$ o $B = A^{-1}$

En general $I_n = (\delta_{ij})$, donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (1)$$

así $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Teo</u> Sea A la matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces,

$$AI_n = I_nA = A$$

Esto es, I_n conmuta con cualquier matriz de $n \times n$ y la deja sin cambio después de multiplicarla a la derecha o a la izquierda

En lo sucesivo escribimos simplemente la matriz identidad I.

<u>Def</u> Sean A, B matrices $n \times n$.
Supongamos que $AB = BA = I$

Entonces, B es llamada la inversa de A y lo denotamos como A^{-1}.
En consecuencia,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Si A tiene una inversa entonces A se dice invertible.

Es claro que $(A^{-1})^{-1} = A$ si A es invertible.
No estamos diciendo que toda matriz cuadrada tenga inversa. De hecho, existen muchas matrices cuadradas que carecen de inversas.

<u>Teo</u> Sean A, B matrices invertibles de $n \times n$. Entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Considere el sistema de n ecuaciones en n incógnitas

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

y suponga que A es invertible.
Entonces,

$$A^{-1}A\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$

$$I\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$

Esta es una solución al sistema, porque

$$A\bar{x} = A(A^{-1}\bar{b})$$

$$= (AA^{-1})\bar{b} = I\bar{b} = \bar{b}$$

Si y es un vector con $A\bar{y} = \bar{b}$, entonces el cálculo anterior ilustra que

$$\bar{y} = A^{-1}\bar{b},$$

esto es, $\bar{y} = \bar{x}$. Hemos comprobado que

Si A es invertible, el sistema

$A\bar{x}=\bar{b}$ tiene la solución única
$$\bar{x}=A^{-1}\bar{b}$$

Existen 3 preguntas básicas, una vez definida la inversa de una matriz

1. ¿Qué matrices tienen inversa?
2. Si una matriz tiene inversa, ¿cómo se calcula la inversa?

Trataremos estos asuntos en lo sucesivo.

Ej Sea $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 5\end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si es que existe.

Sol. Supongamos que A^{-1} existe.
Escribimos $A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$ y usamos el hecho de que $AA^{-1}=I$. En consecuencia,
$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-3z & 2y-3w\\ -4x+5z & -4y+5w\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las dos últimas matrices son iguales sii sus componentes correspondientes son iguales. Esto significa

$$\begin{aligned} 2x \quad - 3z &= 1 \\ 2y \quad - 3w &= 0 \\ -4x \quad + 5z &= 0 \\ -4y \quad + 5w &= 1 \end{aligned}$$

Este es un sistema de cuatro ecuaciones en cuatro incógnitas. Note que 2 ecuaciones involucran sólo a x, y, y 2 involucran sólo a y, w.

Escribimos estos dos sistemas.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \qquad (7)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{array}\right) \qquad (8)$$

Si el sistema (7) tiene solución única funciona el método de Gauß-Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x = -5/2 \\ z = -2 \end{array}$$

El sistema (8) para y, w

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad y = -3/2 \quad w = -1$$

Por consiguiente,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & -3/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Sin duda

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5/2 & -3/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$6-5 \qquad -3+3 \qquad 10-10 \qquad 6$

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = A^{-1}A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eje Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

Si existe, calcule A^{-1}

Sol. Suponemos que A^{-1} existe y ponemos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z & y+2w \\ -2x-4z & -2y-4w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto conduce al sistema

$$\begin{aligned} x \quad\quad + 2z \quad\quad &= 1 \\ y \quad\quad + 2w &= 0 \\ -2x \quad\quad -4z \quad\quad &= 0 \\ -2y \quad\quad -4w &= 1 \end{aligned} \quad (10)$$

Como en el ejemplo previo separamos dos sistemas de ecuaciones, 16

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Es inconsistente

Procedimiento para calcular la inversa de una matriz cuadrada A

Etapa 1 Escribimos la matriz aumentada:

$$(A \mid I)$$

Etapa 2 Reducir la matriz

Etapa 3 Decidir si A es invertible

a) Si A se puede reducir a la matriz identidad I, entonces A^{-1} será la matriz a la derecha de la línea vertical

b) Si la reducción de A conduce a un renglón de ceros a la izquierda

A no es invertible

Repetimos el ejemplo 1 con este procedimiento

Antes de proceder, note que el procedimiento tiene sentido, pues a pesar de que son 4 ecuaciones con 4 incógnitas siempre podemos separar dos sistemas de 2×2 con los mismos coeficientes

Sol

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - \frac{1}{4}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5/2 & -6/2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

En efecto, el procedimiento arroja el mismo resultado

Para el 2º Ejemplo

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

El último renglón se lee $0=2$ o $0=1$ ↯.

Note que del procedimiento escrito antes (a)+(b) dan lugar a:

Una matriz cuadrada es invertible sii su forma reducida es la matriz identidad

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

El determinante de A se define como

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (11)$$

<u>Teo</u> Sea A una matriz de 2x2. Entonces se cumple lo siguiente.

i) A es invertible sii $\det(A) \neq 0$

ii) Si $\det(A) \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

<u>Dem</u>

Primero supone que $\det(A) \neq 0$. Sea $B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

$$BA = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

En forma similar $AB = I$, lo que confirma que A es invertible y $B = A^{-1}$. Resta probar que si A es invertible, entonces $\det(A) \neq 0$

Considere el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad (13)$$

Ya sabemos que si este sistema tiene solución entonces su determinante no es cero.

El sistema se puede escribir en la forma

$$A\bar{x} = \bar{b} \qquad (14)$$

Con $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Como A es invertible,

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$

y el sistema tiene solución única

y conversamente, el hecho de que el sistema (13) tiene solución única implica que $\det(A) \neq 0$. $\times\times$

Eje Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10 \neq 0$$

Por consiguiente, A^{-1} existe.

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ -1/10 & 2/10 \end{pmatrix}$$

Verificación $\quad A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 122

<u>Eje</u> Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

Calcule A^{-1} si existe.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -4-(-4) = 0$$

Por lo que A no tiene inversa