L16

En la lección previa calculamos la inversa de una matriz cuadrada de 2×2, cuando existe dicha inversa, mediante un procedimiento o algoritmo. Este también funciona para matrices de $n\times n$, $n\geq 3$.

Ej. Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Calcula A^{-1} en caso de existir.

Sol.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2\to R_2-4R_1 \\ R_3\to R_3-3R_1}]{R_1\to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3+5R_2]{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{11}{6} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to R_2+2R_3]{\substack{R_3\to -R_3 \\ R_1\to R_1+2R_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 13/3 & -11/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11/6 & 5/3 & -1 \end{array}\right)$$

Hemos reducido A a I:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

Verificamos

$$A^{-1}A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = I$$

Igualmente $AA^{-1} = I$

<u>Eje</u> Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Calcule A^{-1} si existe

<u>Sol</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_3 \to R_3 + R_2}]{R_3 \to R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 - \frac{7}{2}R_3 \\ R_2 \to R_2 + R_3}]{R_3 \to \frac{2}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Así,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo mismo que $AA^{-1} = I$

<u>Ej</u> Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ Calcule, si existe, A^{-1}

4

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ \longrightarrow \\ R_1 \to R_1 + 3R_2 \\ R_3 \to R_3 + R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

No podemos hacer más. La matriz A no se puede reducir a la identidad y concluimos que A no es invertible.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2) + 3(2) + 4(-2) = 0$$

Teo Sea A una matriz de $n \times n$

i) A es invertible sii A es equivalente a la matriz identidad I_n, esto es, 5

la forma escalón reducida de A es I_n.

ii) A es invertible si i el sistema

$$A\bar{x} = \bar{b}$$ tiene solución única

para cada matriz $\bar{b}$ de $n \times 1$

iii) Si A es invertible, su única solución está dada por $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$