16

Ejp Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Si existe, calcule A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1}]{R_1 \to \frac{1}{2}R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_3 \to R_3 + 5R_2}]{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{11}{6} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 + R_3 \\ R_2 \to R_2 - 2R_3}]{R_3 \to -R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right)$$

Hemos encontrado $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix}$

12

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

Verificamos

$$A^{-1}A = I = AA^{-1}$$

Eje

Determinar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$ en caso de que exista

Sol.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_1 \to \frac{1}{2}R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3/2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5/2 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7/2 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - \frac{7}{2}R_3 \quad R_2 \to R_2 + R_3]{R_3 \to \frac{2}{3}R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Se sigue que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & 2/3 \\ -1 & \frac{2}{3} & 2/3 \end{pmatrix}$$

Se verifica que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Ej. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 + 3R_2 \\ R_3 \to R_3 + R_2}]{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Esto es lo más que podemos hacer. La matriz no se puede reducir. NO tiene inversa

Es importante examinar el ejemplo previo. Sea $\bar{b}$ una matriz cualquiera de 3×1 y consideremos el sistema

$$A\bar{x}=\bar{b}$$

Si tratamos de aplicar eliminación Gaussiana terminaremos con una ecuación de la forma $0=c\neq 0$ o $0=0$. Esto es, el sistema carece de solución o tiene una cantidad infinita de soluciones. La única posibilidad que se puede excluir es que la solución sea única.

Si la reducción de A produce un renglón de ceros, entonces A no es invertible

Def Supongamos que mediante operaciones elementales en renglones se transforma la matriz A en la matriz B. Decimos que A y B son equivalentes por renglones,

<u>Teo</u> Sea A una matriz de $n \times n$

i) A es invertible sii A es equivalente por renglones a la identidad I_n; esto es, la forma escalonada reducida de A es I_n

ii) A es invertible sii el sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ tiene solución única para todo $\bar{b}$

iii) Si A es invertible, entonces la solución única está dada por $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$

<u>Eje</u> Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_2 - x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 7 \end{aligned}$$

<u>Sol.</u>

Escribimos este sistema como $A\bar{x} = \bar{b}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad y \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Antes tratamos esta matriz A y establecimos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -13/3 & -7/3 \\ -1 & 5/3 & 2/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

6

De modo que la única solución es

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} b$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -13/3 & -7/3 \\ -1 & 5/3 & 2/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

<u>Teo</u> Sea A una matriz de $n \times n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes. Esto es, cada afirmación implica las otras cuatro (así que si una de ellas se cumple, también lo hacen las otras y si una de ellas es falsa, así lo son las 4 restantes).

i) A es invertible

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\bar{x} = \bar{0}$ es la solución trivial $\bar{x} = \bar{0}$

iii) El sistema $A\bar{x}=\bar{b}$ tiene solución única para toda matriz $\bar{b}$ de $n\times 1$

iv) A es equivalente por renglones a la identidad I_n; esto es, la forma escalón reducida de A es I_n.

v) $\det(A)\neq 0$ (Hasta ahora, no hemos definido $\det(A)$ excepto para matrices de 2×2 o 3×3).

Podemos añadir una afirmación más al teorema, la sexta: Supongamos que el sistema $A\bar{x}=\bar{b}$ tiene solución única y sea R una matriz en forma escalonada que es equivalente por renglones a A. Entonces, R no puede tener un renglón de ceros porque si lo tuviera no se podría reducir a la matriz identidad. En consecuencia, la forma escalonada tendrá la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & 1 & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Esto es, R es la matriz con 1 en la diagonal y 0 debajo de la diagonal.

<u>Teo</u> Si se cumple cualquiera de las afirmaciones del teorema previo, entonces la forma escalón de A tiene la representación (18). ⋙

<u>Teo</u> Sean A, B matrices de $n \times n$. Entonces, A es invertible y $B = A^{-1}$ si ocurre alguna de las siguientes condiciones

i) $BA = I$

ii) $AB = I$ ⋙

Así, para comprobar que la inversa de A es B <u>basta</u> calcular AB o BA.

EJERCICIOS

1. Determine si la matriz dada es invertible, si lo es, dé su inversa

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son matrices invertibles de $n \times n$, muestre que $A_1 A_2 \cdots A_m$ es invertible y calcule su inversa.

3. Verifique que la matriz
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$ es su propia inversa.

4. Determine, mediante los métodos vistos, la inversa de las siguientes matrices con entradas en $\mathbb{C}$

a) $\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1-i & \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1+i & 1-i \end{pmatrix}$

5. Cerciórese de que para cualquier número real θ la matriz

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es invertible y determine su inversa.

6. Calcule la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Concluya que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

no es invertible.

8. Muestre que la matriz no es invertible encontrando una matriz $\bar{x}$ no cero tal que $A\bar{x}=0$

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}$

9. Una fabrica de muebles tiene dos divisiones una parte, en maquinaria donde se producen las partes de los muebles, y otra parte donde se ensamblan. Suponga que hay 12 empleados en la maquinaria y 20 ensamblando. Suponga que cada empleado trabaja 8 hr/día. Una silla requiere $\frac{384}{17}$ horas de maquinaria y $\frac{480}{17}$ horas de ensamblaje. Una mesa requiere $\frac{240}{17}$ horas de maquinaria y $640/17$ horas de ensamblaje. Suponga que existe una demanda ilimitada para estos productos y que se quiere mantener a todos sus empleados ocupados. ¿Cuántas sillas y mesas produce la fabrica cada día?

10.- Un campesino alimenta su ganado con una mezcla de dos tipos de alimento. Una unidad estándar de tipo A aporta a una vacota el 10% de su requerimiento diario de proteína y 15% de su necesidad de carbohidratos. El tipo B

Def [Transpuesta]

Sea $A=(a_{ij})$ una matriz de $m\times n$. La matriz transpuesta de A, denotada A^t, es la matriz de $n\times m$ que se obtiene al intercambiar los renglones y columnas de A. Escribimos $A^t=(a_{ji})$.

En otras palabras, si

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$ entonces

$$A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Simplemente escribe el i-ésimo renglón como la i-ésima columna de A^t y la j-ésima columna de A es el j-ésimo renglón de A^t.

Eje.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^t=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B^t=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad C^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>Teorema</u> Supongamos que $A=(a_{ij})$ es una matriz de $n\times m$ y $B=(b_{ij})$ es una de $m\times p$. Entonces, se cumple lo siguiente.

i) $(A^t)^t = A$

ii) $(AB)^t = B^t A^t$

iii) Si A y B son de $n\times m$, entonces
$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

iv) Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Def. La matriz A de $n \times m$ es simétrica si $A^t = A$.

Ej. Las siguientes matrices son simétricas

I $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1. Encuentre la traspuesta

a) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

2. Encuentra números α, β tales que la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 5 & -6 & 2 \\ \beta & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

es simétrica.

3. Una matriz es llamada sesgada simétrica si $A^t = -A$, esto es, $a_{ij} = -a_{ji}$. Determina cuáles de las siguientes matrices son sesgada simétricas

a) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

16

4.- Calcule $(A^t)^{-1}$ y $(A^{-1})^t$ y confirme que son iguales.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Sea A una matriz de $m \times n$. Las operaciones elementales en renglones son,

i) Multiplicar el i-ésimo renglón por c

$$R_i \to cR_i$$

ii) Sumar un múltiplo del i-ésimo renglón al j-ésimo renglón. $R_j \to R_j + cR_i$

iii) Intercambiar los renglones i, j

$$R_i \leftrightarrows R_j$$

<u>Def</u> Una matriz cuadrada de $n \times n$ E es elemental si se puede obtener de la matriz I_n mediante <u>una sola</u>

Sola operación elemental en renglones

1) Denotamos una matriz elemental por E o cR_i, $R_j + cR_i$, o $R_i \rightleftarrows R_j$

Eje 3 matrices elementales.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5R_2$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_3 - 3R_1$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_2 \rightleftarrows R_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R_2 \rightleftarrows R_3$

Teo Para realizar una operación sobre renglones en la matriz A de $m \times n$ multiplique A a la izquierda por una matriz elemental apropiada

Ej. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Realice las siguientes operaciones elementales en A multiplicándola a la izquierda por una matriz elemental apropiada

i) Multiplicar el 2º renglón por 5

ii) " " 1er " por -3 y sumárselo al 3er renglón.

iii) Intercambie el 1º y 3er renglón

Sol. Como A es de 3×4, cada matriz elemental debe ser de 3×3 ya que I debe ser cuadrada y multiplicar a A por la izquierda

i) $$(5R_2)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 10 & 15 & -25 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

ii) $(R_3-3R_1)A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2&1\\4&2&3&-5\\3&1&-2&4\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1&3&2&1\\4&2&3&-5\\0&-8&-8&1\end{pmatrix}$$

iii) $(R_2\leftrightarrow R_3)A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2&1\\4&2&3&-5\\3&1&-2&4\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1&3&2&1\\3&1&-2&4\\4&2&3&-5\end{pmatrix}$$

Considere los siguientes tres productos

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{c}&0\\0&0&1\end{pmatrix} = I \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} = I \qquad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I \qquad (3)$$

Las ecuaciones (1), (2), (3) sugieren que cada matriz elemental es invertible y que su inversa es del mismo tipo, lo que se desprende del teorema. Nótese que si aplicamos la operación

$$R_j \to R_j + cR_i$$

seguida de

$$R_j \to R_j - cR_i$$

en la matriz A, ésta queda sin cambio. Igualmente, aplicar

$$R_i \to cR_i$$

y enseguida

$$R_i \to \frac{1}{c} R_i$$

y permutar los mismos renglones dos veces deja la matriz A igual que ~~ala~~ la original.

$$(cR_i)^{-1} = \frac{1}{c} R_i \qquad (4)$$

$$(R_j + cR_i)^{-1} = R_j - cR_i \qquad (5)$$

$$(R_i \rightleftarrows R_j)^{-1} = R_i \rightleftarrows R_j \qquad (6)$$

Tipo Matriz elemental E	Efecto de multiplicar A por E izq.	Rep. simbólica	E^{-1} hace lo siguiente a la izq.	Rep. simbólica de la operac. inversa
Multiplic.	Multiplica i-ésimo renglón de A por $c \neq 0$	cR_i	Multiplica i-ésimo renglón A por $1/c$	$\frac{1}{c} R_i$
Suma	mult. i-ésimo renglón por c y suma	$R_j + cR_i$	Multiplica i-ésimo renglón A por $-c$ y suma	$R_j - cR_i$
Permutación	Permuta i, j-ésimo renglones	$R_i \rightleftarrows R_j$	Permuta i, j-ésimos renglones	$R_i \rightleftarrows R_j$

Según la ecuación (6) toda permutación elemental es su propia inversa

Teo Cada matriz elemental es invertible. La inversa de una matriz elemental es una matriz del mismo tipo

<u>Teo</u> Una matriz cuadrada es invertible sii es el producto de matrices elementales.