12

Teo Sean v un vector y $c \in \mathbb{R}$

Entonces

$$\|cv\| = |c|\,\|v\|$$

Teo Si $\bar{v}$ es un vector no cero, el vector

$$\bar{u} = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \frac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v}$$

tiene longitud 1 y la misma dirección que $\bar{v}$

Eje Encuentre un vector unitario en la dirección de $\bar{v} = (-2, 5)$

$$\bar{u} = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \frac{(-2,5)}{\sqrt{(-2)^2+(5)^2}} = \frac{1}{\sqrt{29}}(-2,5)$$

$$= \left(\frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right)$$

Note que

$$\|u\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{29}+\frac{25}{29}}$$

$$= 1.$$

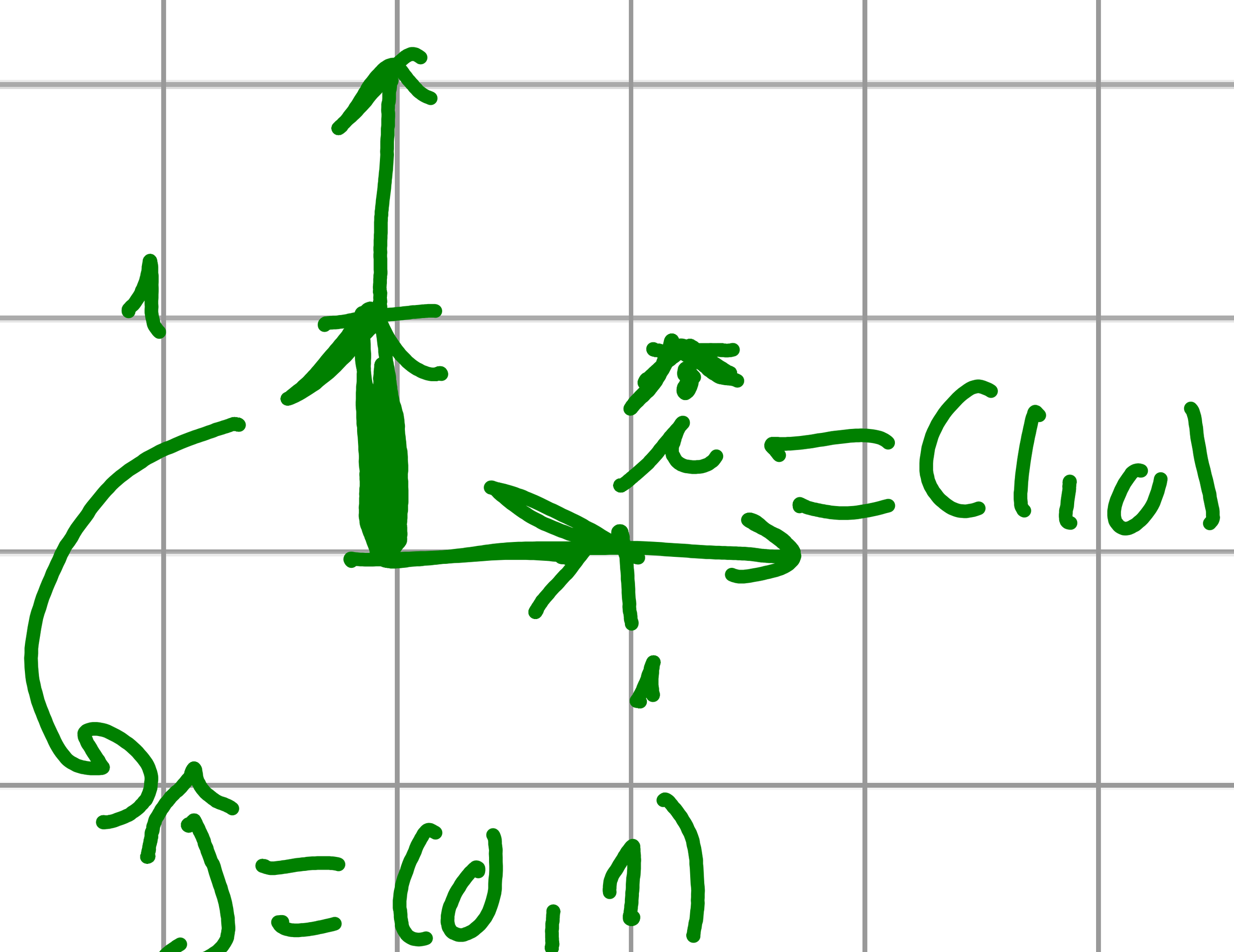
En general, la longitud de la suma de dos vectores <u>no</u> es igual a la suma de sus longitudes. Lo que ocurre es:

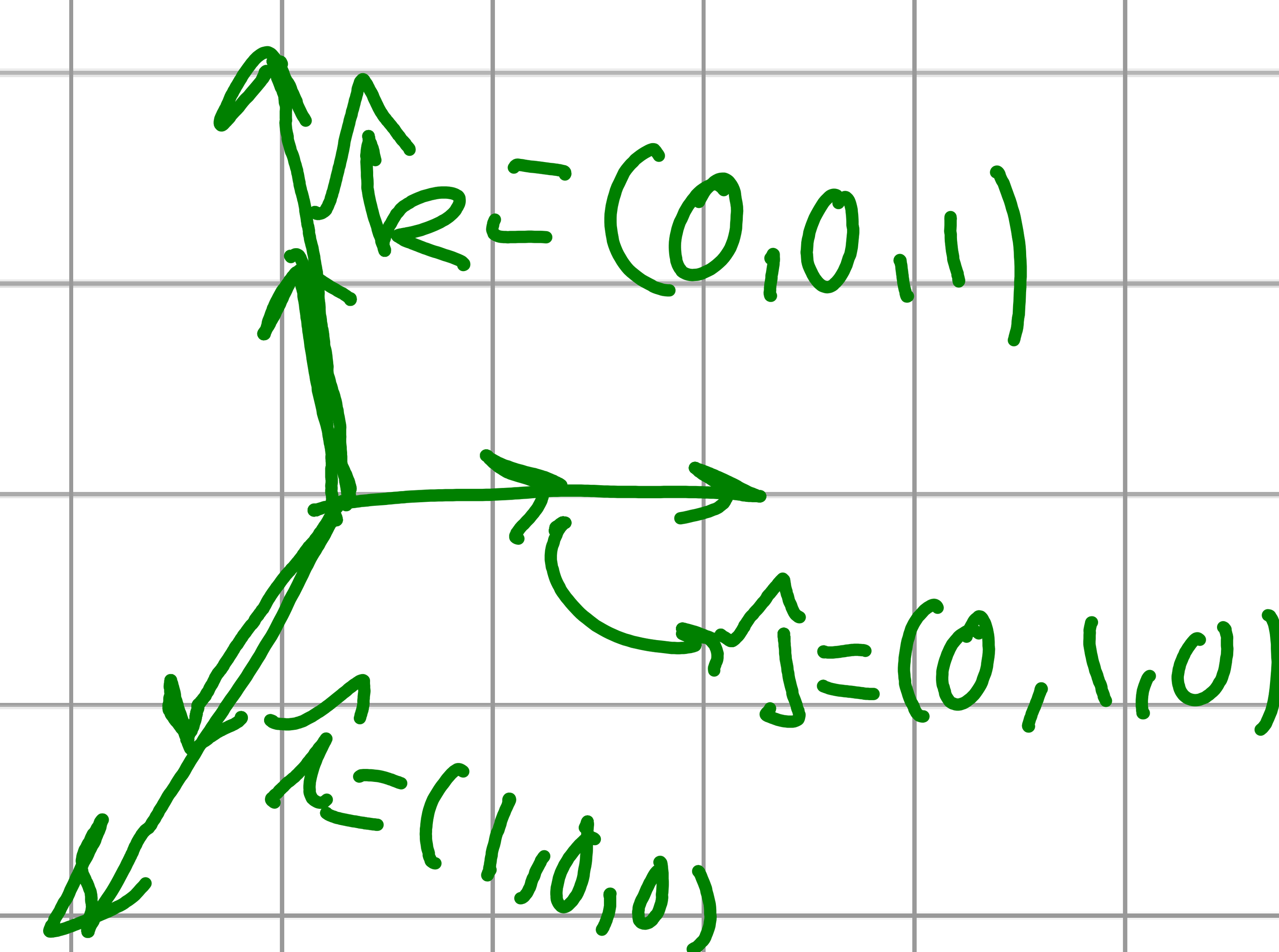
$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

que se conoce como la desigualdad del triángulo. El alumno <u>debe</u> <u>recordar siempre esta desigualdad.</u>

Existen vectores muy particulares en $\mathbb{R}^n$

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$





en general $e_1 = (1,0,\dots,0)$

$e_2 = (0,1,0,\dots,0)$

$\vdots$

Parte de la importancia de estos vectores radica en que cualquier vector se puede representar como combinación lineal de ellos.

Así, si

$\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

$\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n$

En $\mathbb{R}^3$

$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$\bar{w} = w_1 \hat{\imath} + w_2 \hat{\jmath} + w_3 \hat{k}$

Eje Sean $\bar{u}$ el vector con punto inicial $(2,-5)$ y terminal $(-1,3)$, $\bar{v} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath}$

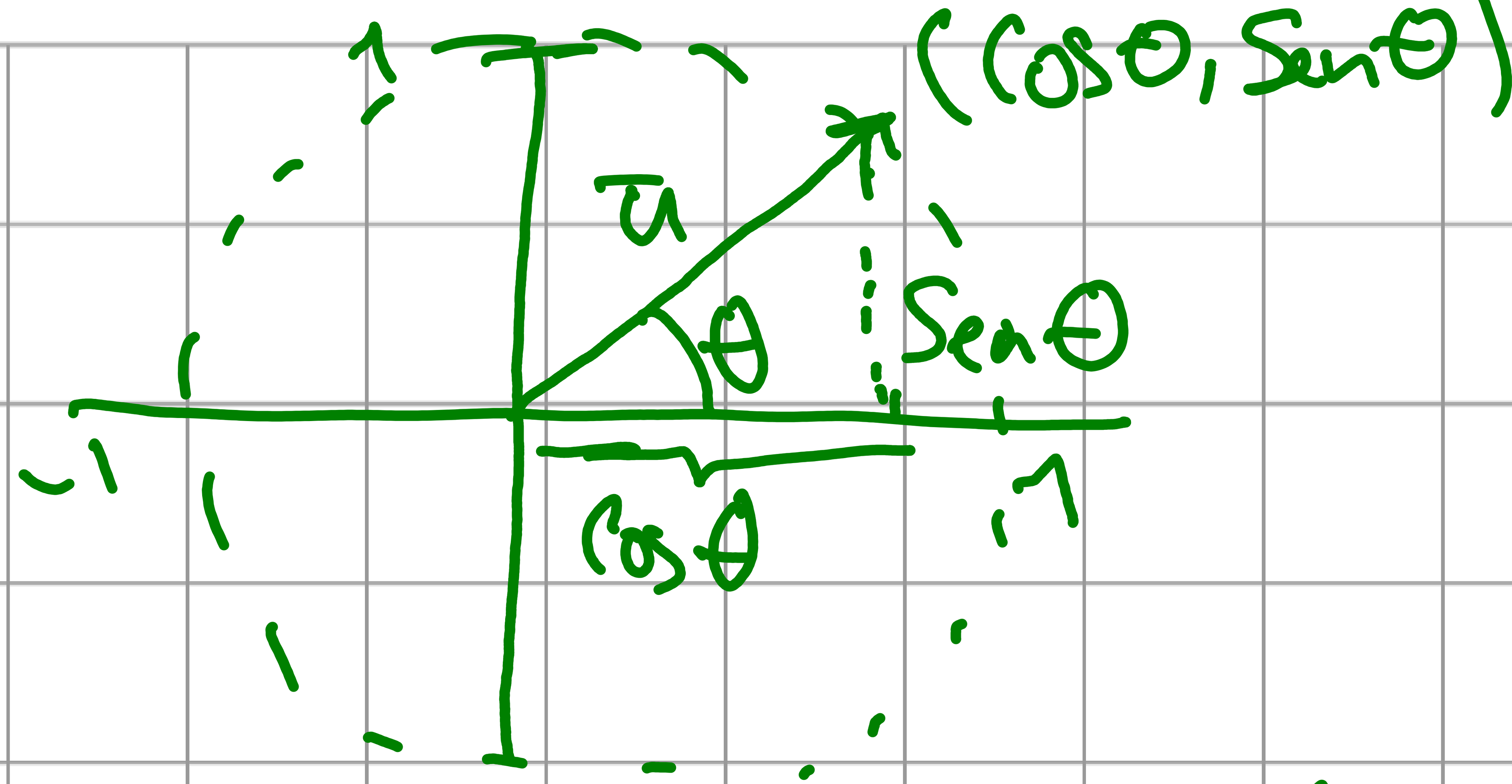
Escriba los siguientes vectores como combinación lineal de $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$.

a) $\bar{u}$

b) $\bar{w} = 2\bar{u} - 3\bar{v}$

Sol. a) $\bar{u} = (-1,3) - (2,-5) = (-3, 8)$
$= -3\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$

b) $\bar{w} = 2\bar{u} - 3\bar{v} = 2(-3\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}) - 3(2\hat{\imath} - \hat{\jmath})$
$= (-6\hat{\imath} + 16\hat{\jmath}) - (6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath})$
$= -12\hat{\imath} + 19\hat{\jmath}$



Si $\bar{u}$ es el vector unitario y θ es el ángulo (medido contra reloj) desde el X-eje positivo hacia $\bar{u}$, entonces el punto terminal de $\bar{u}$ está en el círculo unitario

$$\bar{u} = (\cos\theta, \operatorname{Sen}\theta) = \cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{Sen}\theta\,\hat{\jmath}$$

Más aún, cualquier otro vector $\bar{v}$ que haga un ángulo θ con el eje X positivo tiene la misma dirección que $\bar{u}$

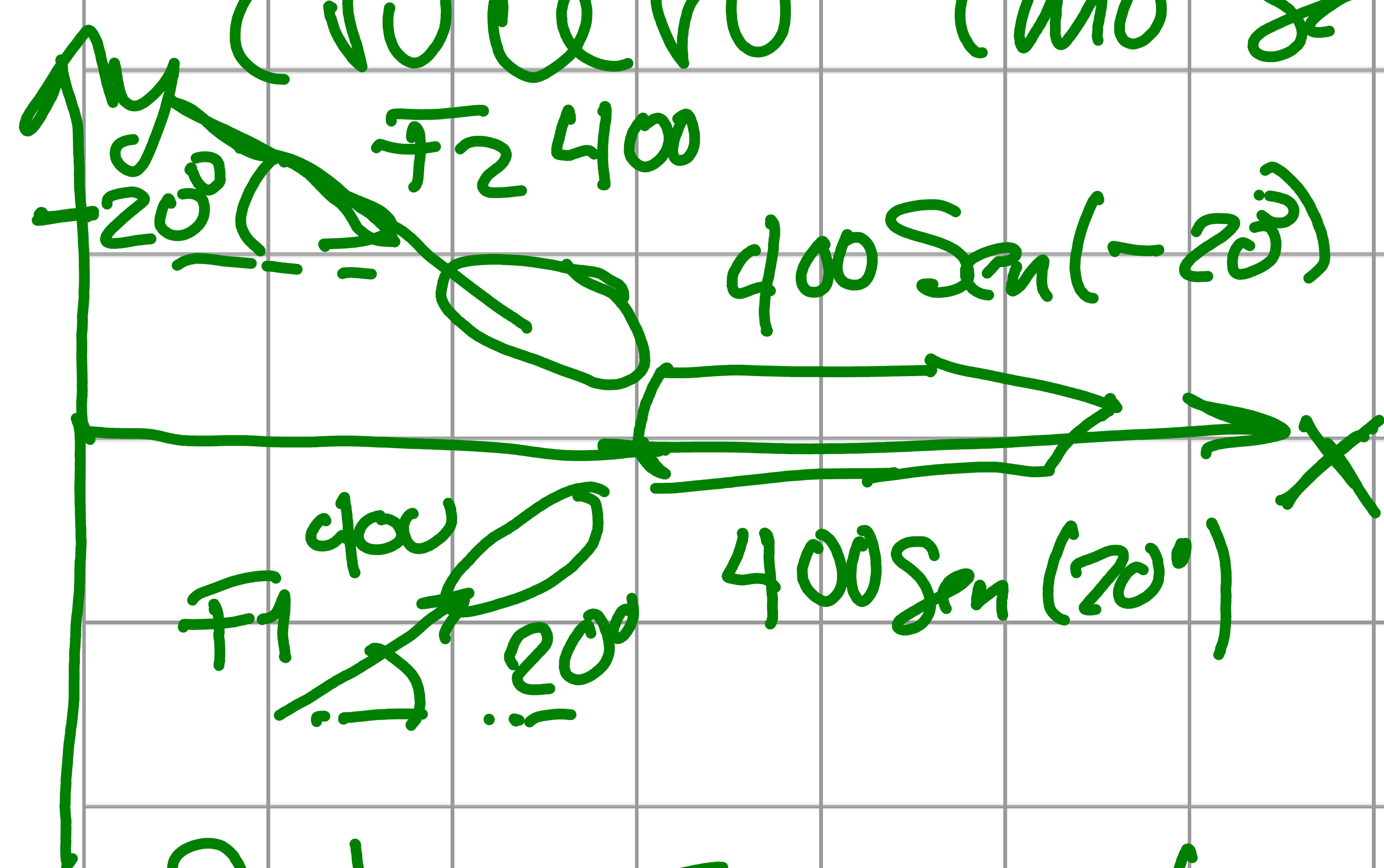
$$v = \|\bar{v}\|(\cos\theta, \operatorname{Sen}\theta)$$
$$= \|\bar{v}\|\cos\theta\,\hat{\imath} + \|\bar{v}\|\operatorname{Sen}\theta\,\hat{\jmath}$$

Eje El vector $\bar{v}$ tiene magnitud 3 y hace un ángulo de $30^\circ = \pi/6$ con el eje X positivo. Escriba $\bar{v}$ como una combinación lineal de $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$

Sol Ya que el ángulo es $\pi/6$

$$\bar{v} = \|\bar{v}\|\cos\theta\,\hat{\imath} + \|\bar{v}\|\operatorname{Sen}\theta\,\hat{\jmath}$$
$$= 3\cos\frac{\pi}{6}\hat{\imath} + 3\operatorname{Sen}\frac{\pi}{6}\hat{\jmath} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} + \frac{3}{2}\hat{\jmath}$$

Eje Dos remolcadores empujan un crucero como se muestra en la figura



Cada remolcador ejerce una fuerza de 400 lb ¿Cuál es la fuerza resultante en el crucero?

Sol $F_1 = 400(\cos 20°, \operatorname{Sen} 20°)$

$= 400 \cos 20° \hat{\imath} + 400 \operatorname{Sen} 20° \hat{\jmath}$

$F_2 = 400(\cos(-20°), \operatorname{Sen}(-20°))$

$= 400 \cos(20°) \hat{\imath} - 400 \operatorname{Sen}(20°) \hat{\jmath}$

La fuerza resultante es

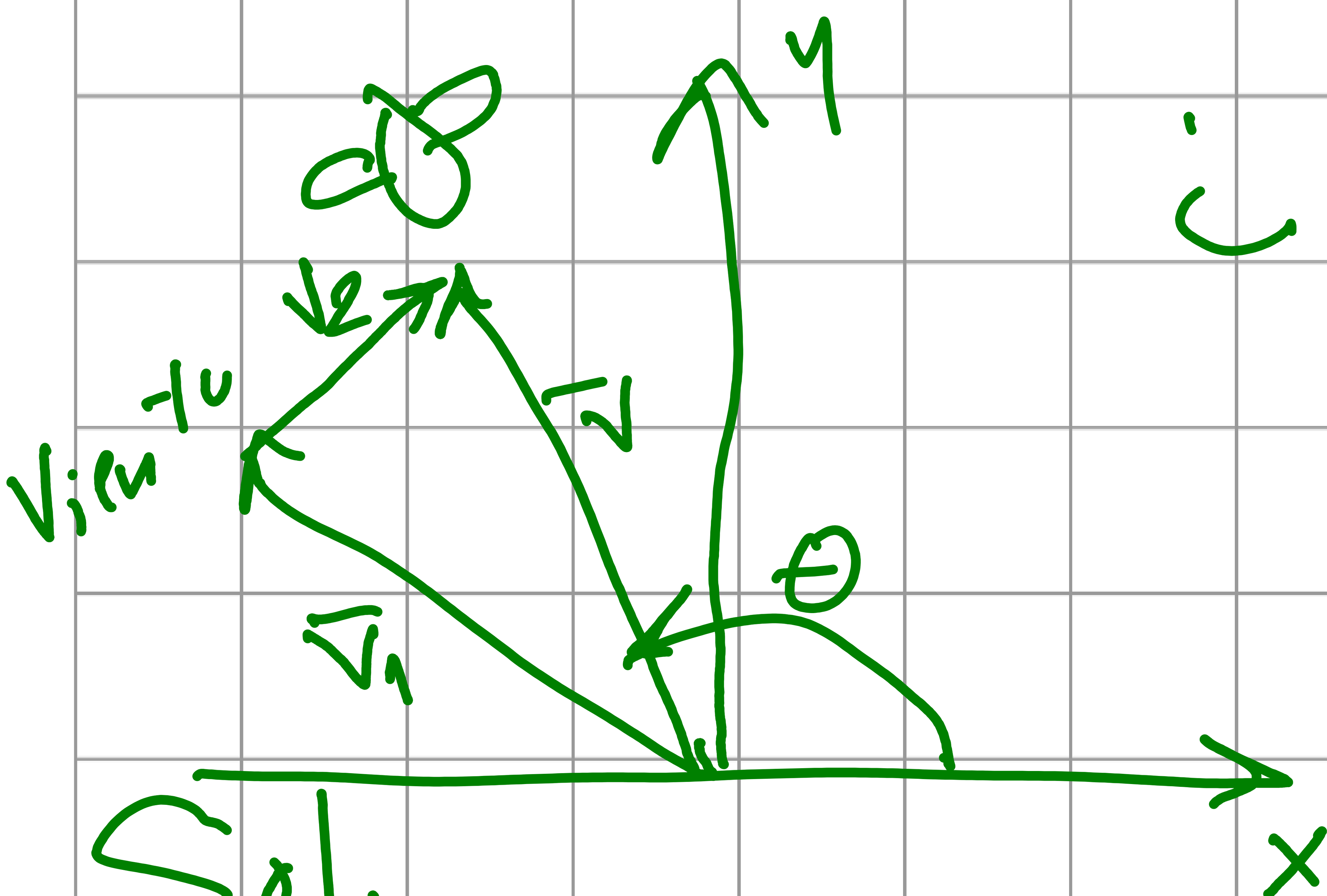
$F = F_1 + F_2$

$= 800 \cos 20° \hat{\imath}$

$\approx 752 \hat{\imath}$

Eje Un avión vuela a una altura fija con viento despreciable, viaja a 500 millas por hora en un ángulo de 330°

Cuando el avión alcanza cierto punto, aparece el viento con una velocidad de 70 millas/hr en dirección 45° NE



¿Cuáles son la velocidad y dirección resultantes del avión?

Sol.

$\bar{v}_1 = 500\cos(120°)\hat{\imath} + 500\,\text{Sen}(120°)\hat{\jmath}$

La velocidad del viento

$\bar{v}_2 = 70\cos(45°)\hat{\imath} + 70\,\text{Sen}(45°)\hat{\jmath}$

La velocidad resultante del avión

$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$

$= 500\cos(120°)\hat{\imath} + 500\,\text{Sen}(120°)\hat{\jmath}$

$+ 70\cos(45°)\hat{\imath} + 70\,\text{Sen}(45°)\hat{\jmath}$

$\approx -200.5\hat{\imath} + 482.5\hat{\jmath}$

Para encontrar la velocidad resultante (magnitud de $\bar{v}$) y su dirección, escribimos

$\bar{v} = \|v\|(\cos\theta\hat{\imath} + \text{Sen}\theta\hat{\jmath})$

$\|\bar{v}\| \approx \sqrt{(-200.5)^2 + (482.5)^2}$

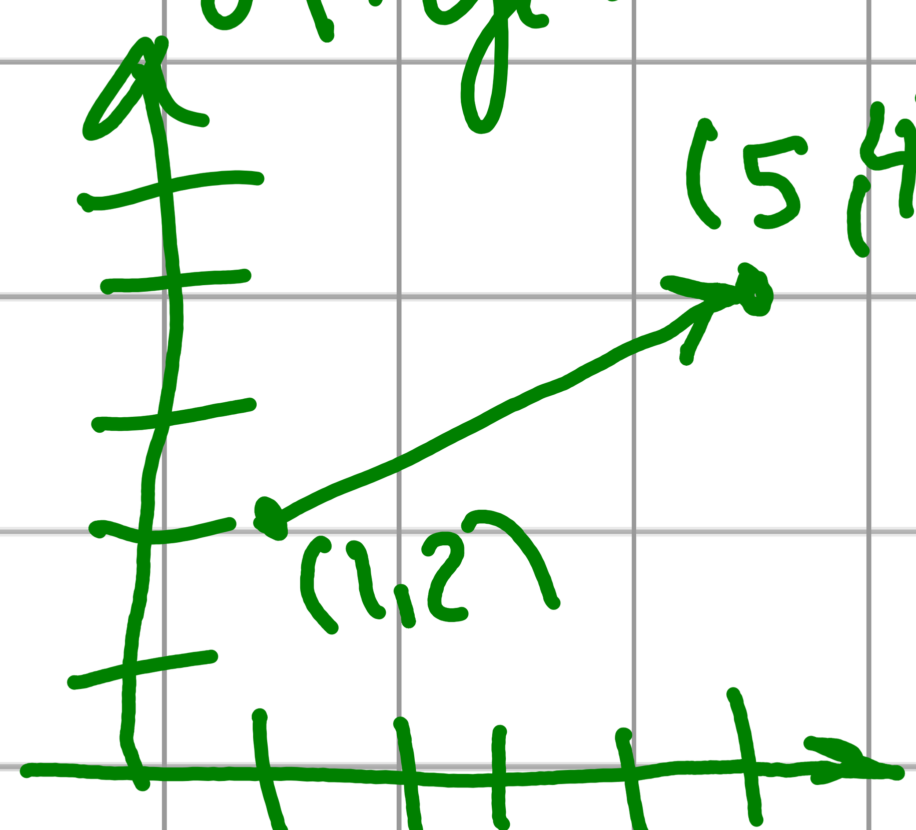
≈ 522.5

$\bar{v} \approx 522.5\left(-\frac{200.5}{522.5}\hat{\imath} + \frac{482.5}{522.5}\hat{\jmath}\right)$

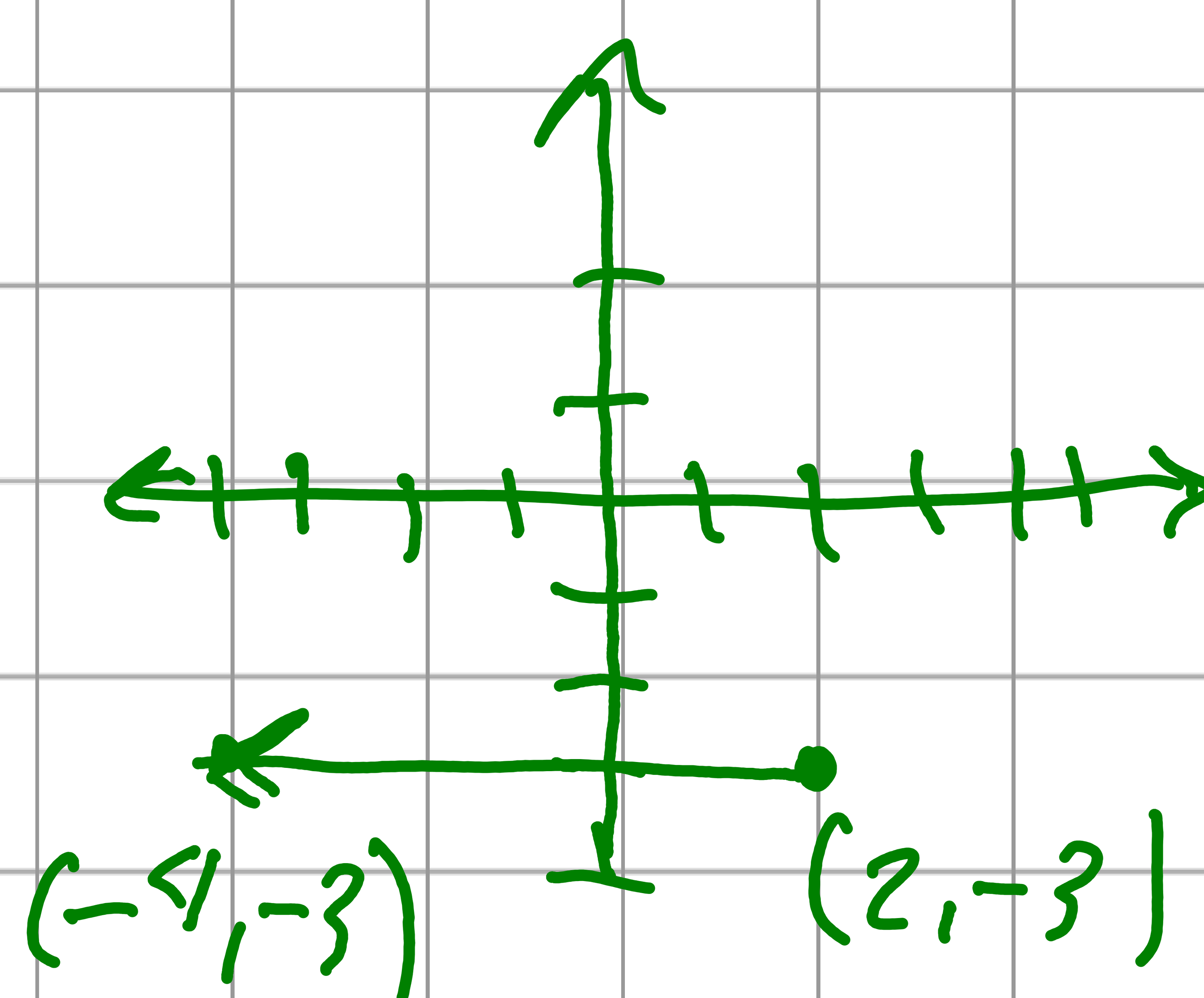
$\approx 522.5\left[\cos(112.6^\circ)\hat{\imath} + \operatorname{sen}(112.6^\circ)\hat{\jmath}\right]$

EJERCICIOS

1. Determine las componentes del vector $\bar{v}$ y bosquejelo con su punto inicial en el origen



(a)



(b)

2. Dado $\bar{v}$ y su punto inicial. Determine su punto final

a) $\bar{v} = (-1,3)$ punto inicial $(4,1)$

b) $\bar{v} = (4,-9)$ " " $(5,3)$

3. Determine magnitud

a) $v = 4\hat{\imath}$ b) $v = -9\hat{\jmath}$

c) $v = (-24,7)$ c) $\bar{v} = (8,15)$

d) $\bar{v} = 3\hat{\imath} + \sqrt{2}\hat{\jmath}$.

4. Bosqueje el múltiplo escalar de $\bar{v}$

a) $\bar{v} = (3, 5)$ $\quad 2\bar{v} \quad -3\bar{v} \quad \frac{7}{2}\bar{v}$

b) $\bar{v} = (-2, 3)$ $\quad 4\bar{v} \quad -\frac{1}{2}\bar{v} \quad -6\bar{v}$

5. Determine a) $\frac{2}{3}\bar{u}$ b) $3\bar{v}$ c) $\bar{v}-\bar{u}$ d) $2\bar{u}+5\bar{v}$

i) $u = (4, 9)$ $\quad \bar{v} = (2, -5)$

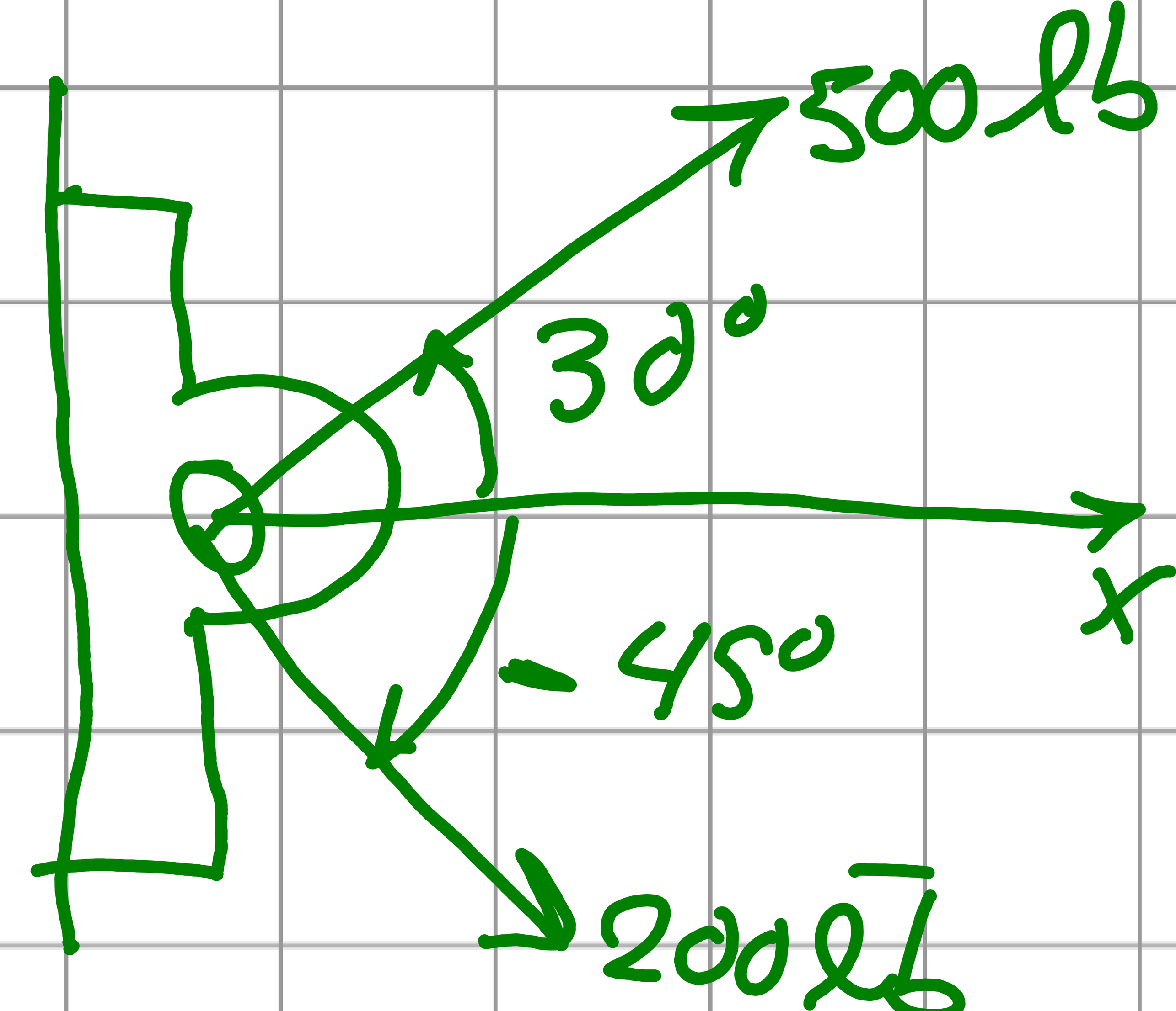
ii) $\bar{u} = (-3, -8)$, $\bar{v} = (8, 7)$

6. Determine el vector unitario en la dirección de $\bar{v}$

a) $\bar{v} = (3, 12)$ $\quad$ b) $\bar{v} = (-5, 15)$

c) $\bar{v} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ $\quad$ d) $\bar{v} = (-6.2, 3.4)$

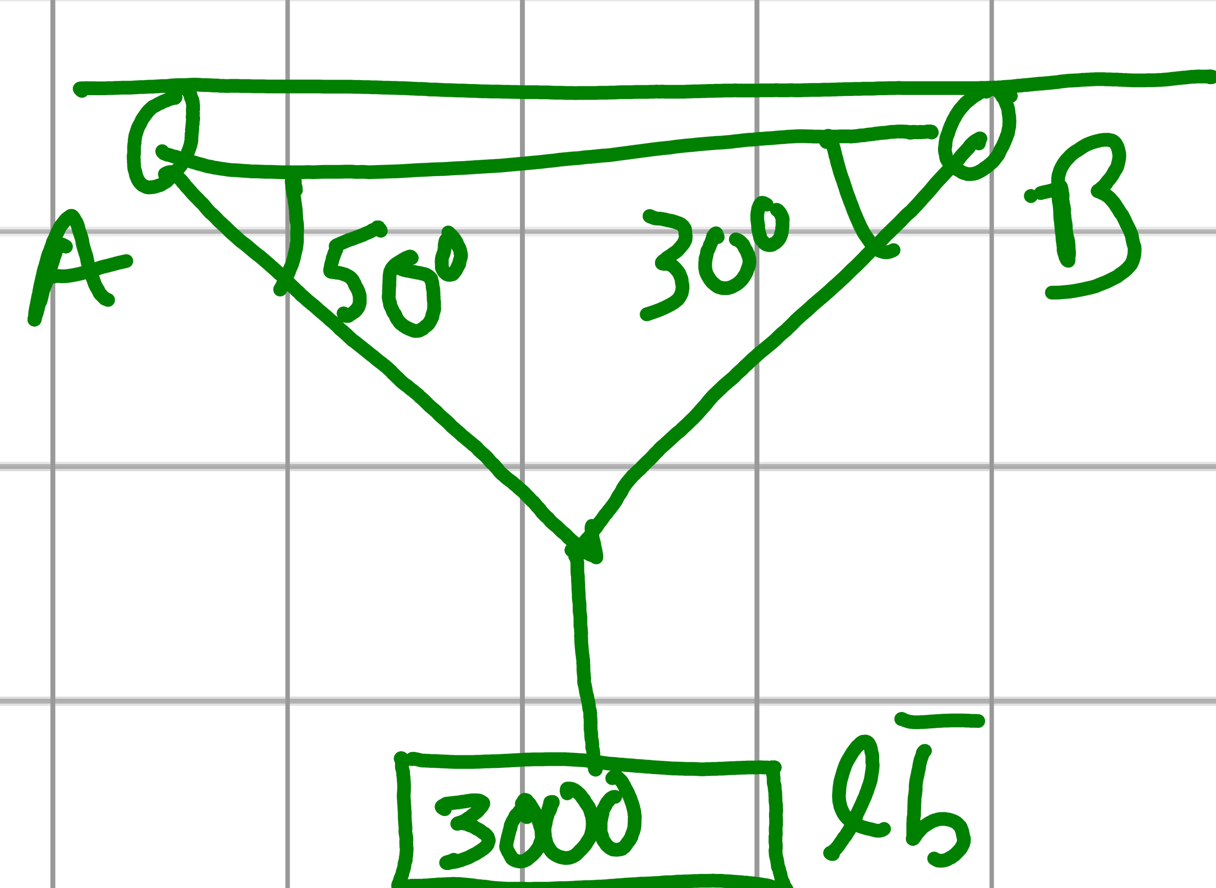
7. Fuerzas de 500 $\vec{lb}$ y 200 $\bar{lb}$ actúan en una máquina en ángulos de 30° y −45°, respectivamente, con el eje x. Encuentre la dirección y magnitud de la fuerza resultante



8. Tres fuerzas de 75 lb, 100 lb y 125 lb actúan en un objeto en ángulos 30°, 45° y 120°, respectivamente, con el eje x positivo. Determine la magnitud de la fuerza resultante.

9. Determine la tensión que soporta la carga dada en cable CB y cable CA

a)



b)