3

Para determinar la distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^n$ tenemos la siguiente fórmula, dado

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$
$$\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Por ejemplo

Si
$$\bar{x} = (2, -1, 3)$$
$$\bar{y} = (1, 0, -2)$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(1-2)^2 + (0+1)^2 + (-2-3)^2}$$
$$= \sqrt{27}$$
$$= 3\sqrt{3}$$

Así, una esfera con centro en (x_0, y_0, z_0) y radio r está definida como el conjunto de puntos (x, y, z) cuya distancia a (x_0, y_0, z_0) es r, esto es

$$\text{Esfera} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : d((x, y, z), (x_0, y_0, z_0)) = 3\}$$

y otra forma de escribirla

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

Otro asunto importante, el punto medio del segmento de recta que une los puntos $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\bar{y}=(y_1,y_2,y_3)$ está dado por

$$\left(\frac{x_1+y_1}{2},\frac{x_2+y_2}{2},\frac{x_3+y_3}{2}\right)$$

Eje Determine la ecuación de la esfera que tiene a los puntos $(5,-2,3)$ y $(0,4,-3)$ como extremos de un diámetro

Sol. Primero determinamos el punto medio del segmento que une estos puntos. Este punto medio es entonces el centro de la esfera

$$\left(\frac{5+0}{2},\frac{-2+4}{2},\frac{3-3}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},1,0\right)$$

$$r=\sqrt{\left(0-\frac{5}{2}\right)^2+(4-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{\frac{97}{4}}=\frac{\sqrt{97}}{2}$$

De suerte que la ecuación de la esfera con ese centro es

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-1)^2+z^2=\frac{97}{4}$$

① Decimos que dos vectores $\bar{v}, \bar{u}$ son paralelos cuando existe un escalar c tal que $\bar{u}=c\bar{v}$, $c\neq 0$.

Por ejemplo, si $\bar{u}=(1,2)$, $\bar{v}=(3,6)$ son paralelos porque

$$3\bar{u}=\bar{v}$$

lo mismo $w=(-4,-8)$

$$-4u=w$$

Así que si anclamos los vectores al origen $\bar{v},\bar{u},\bar{w}$ son paralelos

Eje. El vector $\bar{w}$ tiene como punto inicial $(2,-1,3)$ y terminal $(-4,7,5)$ ¿Cuáles de los vectores siguientes son paralelos a $\bar{w}$?

a) $\bar{u} = (3,-4,-1)$

b) $\bar{v} = (12,-16,4)$

Sol. $\bar{w} = (-4-2, 7-(-1), 5-3)$

$= (-6, 8, 2)$

a) $\bar{u} = (3,-4,-1) = -\frac{1}{2}(-6,8,2)$

$= -\frac{1}{2}\bar{w}$

$\bar{u} \parallel \bar{w}$ (u es paralelo a $\bar{w}$)

b) $(12,-16,4) = c(-6,8,2)$ (*)

$12 = -6c \Rightarrow c = -2$

$-16 = 8c \Rightarrow c = -2$

$4 = 2c \Rightarrow c = 2$

Note que $c=-2$ para las dos primeras componentes y $c=2$ para la tercera esto significa que no hay solución para (*). $\bar{u} \nparallel \bar{v}$ no son paralelos

Decimos que los puntos
$\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n$
son colineal(es) cuando existe un segmento de recta que los une

Eje: Determine si los siguientes puntos son colineales

$P=(1,-2,3)$ $\quad Q=(2,1,0)$ $\quad R=(4,7,-6)$

$\overrightarrow{PQ} = (2-1,\ 1-(-2),\ 0-3) = (1,3,-3)$

$\overline{PR} = (4-1,\ 7-(-2),\ -6-3)$
$= (3,9,-9)$

Dado que estos dos vectores tienen el mismo punto inicial

$\overline{PR} = 3\,\overline{PQ}$ sí son paralelos

así que los 3 puntos son colineales

Eje a) Escriba el vector $\bar{v} = 4\hat{i} - 5\hat{k}$ en forma de componentes

$v = 4\hat{i} + 0\hat{j} - 5\hat{k} = (4,0,-5)$

b) Determine los puntos extremos de los vectores. $\bar{v} = 7\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ dado el punto inicial $P=(-2,3,5)$

Necesitamos el punto $Q=(q_1,q_2,q_3)$
tal que $\bar{v}=\overline{PQ}=7\hat{\imath}-\hat{\jmath}+3\hat{k}$

Esto implica que

$$(-2-q_1,\ 3-q_2,\ 5-q_3)=(7,-1,3)$$

$$-2-q_1=7$$

$$3-q_2=-1$$

$$5-q_3=3$$

de modo que $Q=(5,2,8)$

c) Determine la magnitud del vector $\bar{v}=-6\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-3\hat{k}$.

$$\bar{v}=(-6,2,-3)$$

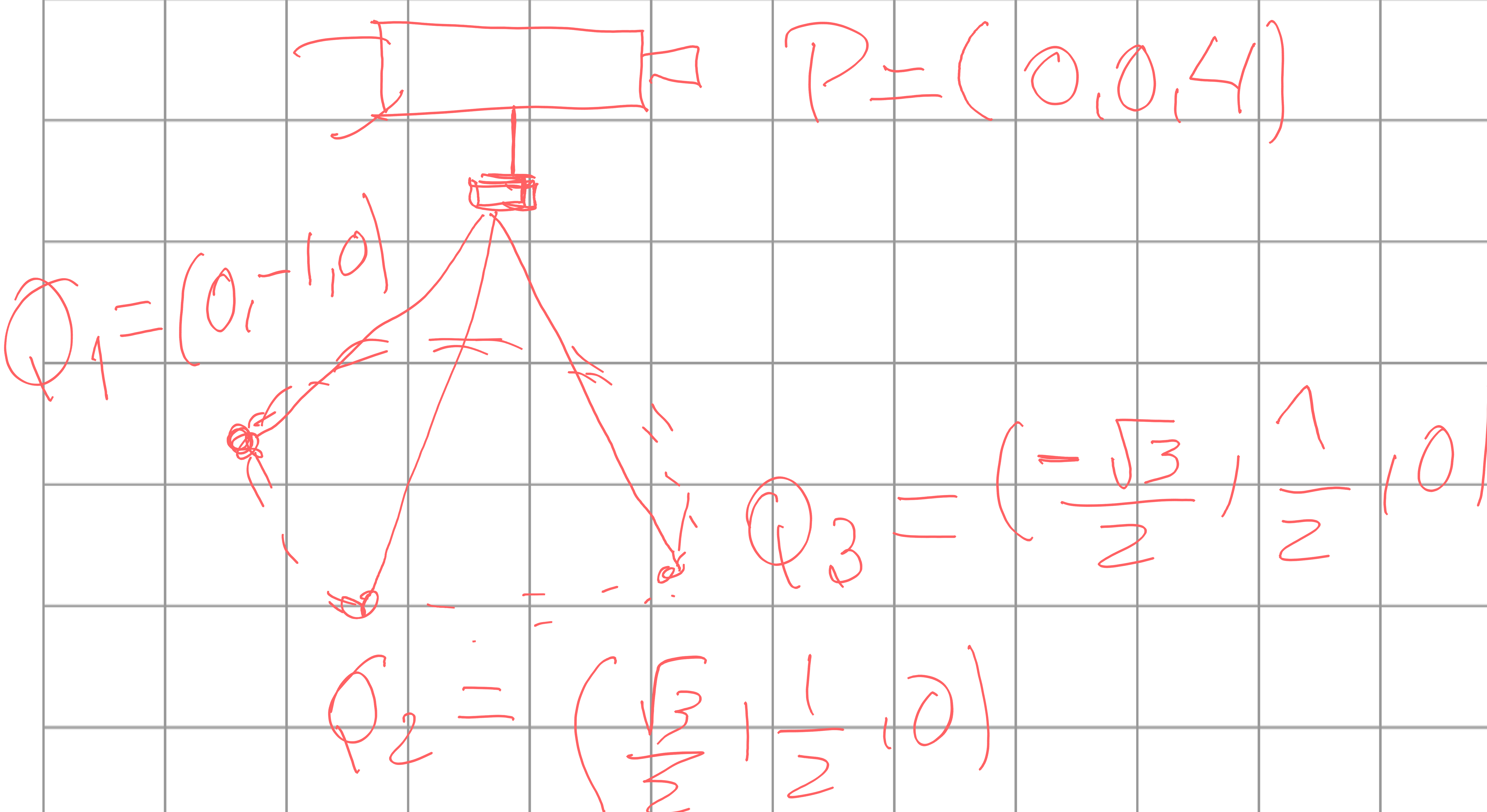
$$\|\bar{v}\|=\sqrt{(-6)^2+(2)^2+(-3)^2}=7$$

Encuentre un vector unitario en la dirección de $\bar{v}$

$$\bar{u}=\frac{1}{7}(-6,2,-3)=-\frac{6}{7}\hat{\imath}+\frac{2}{7}\hat{\jmath}-\frac{3}{7}\hat{k}$$

Eje Una cámara de video pesa 9 lb y está sostenida por un trípode como se ilustra en la figura. Represente la fuerza ejercida en cada pata del trípode como

Vector



Sol Sean $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ los vectores que representan a las fuerzas en las tres patas. De la figura determinamos las direcciones de $\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_3$ como sigue

$$\overline{F}_1 = \overline{PQ_1} = (0-0, -1-0, 0-4) = (0,-1,-4)$$

$$\overline{F}_2 = \overline{PQ_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0, \frac{1}{2}-0, 0-4\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4\right)$$

$$\overline{F}_3 = \overline{PQ_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-0, \frac{1}{2}-0, 0-4\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4\right)$$

Ya que las 3 patas tienen la misma longitud y la fuerza total se distribuye igual en las 3 patas, sabemos que $\|\overline{F}_1\| = \|\overline{F}_2\| = \|\overline{F}_3\|$. Por tanto, existe una constante c tal que

$\overline{F_1} = c(0,-1,-4)$

$\overline{F_2} = c\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4\right)$

$\overline{F_3} = c\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4\right)$

La fuerza total ejercida por la carga es $\overline{F} = (0,0,-9)$

Usamos que

$$\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}$$

Concluimos que $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ y $\overline{F_3}$ tienen componente vertical -3, así que $c(-4) = -3$

$c = 3/4$

Así

$\overline{F_1} = \left(0, -\frac{3}{4}, -3\right)$ $\quad \overline{F_2} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{3}{8}, -3\right)$

$$\overline{F_3} = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{3}{8}, -3\right)$$

EJERCICIOS

1.- Encuentre la ecuación de la esfera dada

a) Centro $(7,1,-2)$ radio 1

b) Centro $(-1,-5,8)$ radio 5

c) Extremos del diametro $(2,1,3),(1,3,-1)$
d) Centro $(-7,7,6)$ tangente al plano xy
e) Centro $(-4,0,0)$ tangente al plano yz

2. Complete cuadrados para escribir la ecuación de la esfera. Encuentre el centro y el radio

a) $x^2+y^2+z^2-2x+6y+8z+1=0$
b) $x^2+y^2+z^2+9x-2y+10z+19=0$
c) $9x^2+9y^2+9z^2-6x+18y+1=0$
d) $4x^2+4y^2+4z^2-24x-4y+8z-23=0$

3. Determine si los puntos son colineales

a) $(0,-2,-5),(3,4,4),(2,2,1)$
b) $(4,-2,7),(-2,0,3),(7,-3,9)$
c) $(0,0,0),(1,3,-2),(2,-6,4)$

4. Muestre que los puntos forman los vértices de un paralelogramo

a) $(2,9,1),(3,11,4),(0,10,2),(1,12,5)$

b) $(1,1,3)$, $(9,-1,-2)$, $(11,2,-9)$, $(3,4,-4)$

Ahora presentamos otra operación entre vectores.

El producto punto de $u=(u_1,\dots,u_n)$ $\bar{v}=(v_1,\dots,v_n)$ es

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n$$

Teo Sean $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ vectores, y c un escalar

1. $\bar{u}\cdot\bar{v}=\bar{v}\cdot\bar{u}$
2) $\bar{u}\cdot(\bar{v}+\bar{w})=\bar{u}\cdot\bar{v}+\bar{u}\cdot\bar{w}$
3) $c(\bar{u}\cdot\bar{v})=c\bar{u}\cdot\bar{v}=\bar{u}\cdot c\bar{v}$
4) $\bar{0}\cdot\bar{v}=0$
5) $\bar{v}\cdot\bar{v}=\|\bar{v}\|^2$

Eje. Sea $\bar{v}=(1,1,0)$, $\bar{w}=(0,0,1)$ $\bar{u}=(1,0,0)$

$$\bar{v}\cdot\bar{v}=1\cdot1+1\cdot1+0\cdot0=2$$

$$\|\bar{v}\|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$$

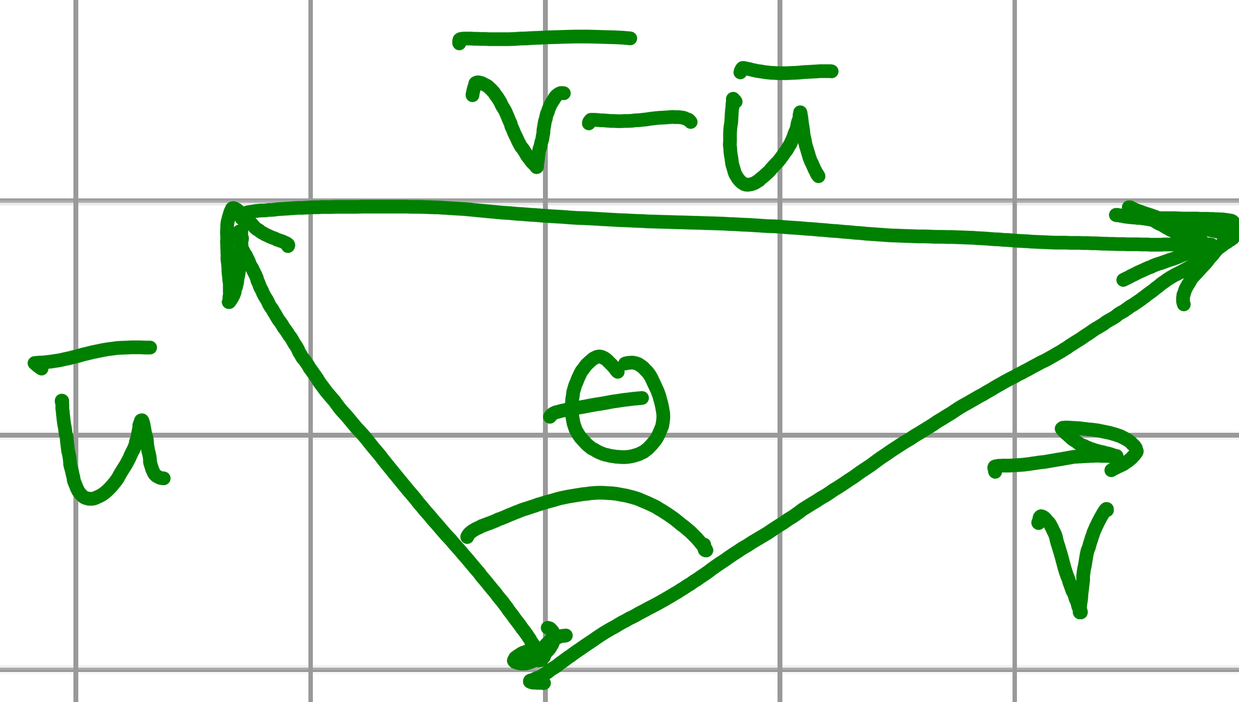
$$\bar{v}\cdot\bar{v}=\|\bar{v}\|^2$$

$$\bar{w}\cdot\bar{u}=0$$

note que $\bar{u}$ y $\bar{w}$ son perpendiculares entre si

El ángulo entre dos vectores $\neq 0$ es el ángulo θ $0 \leq \theta \leq \pi$ es como se muestra

(*)

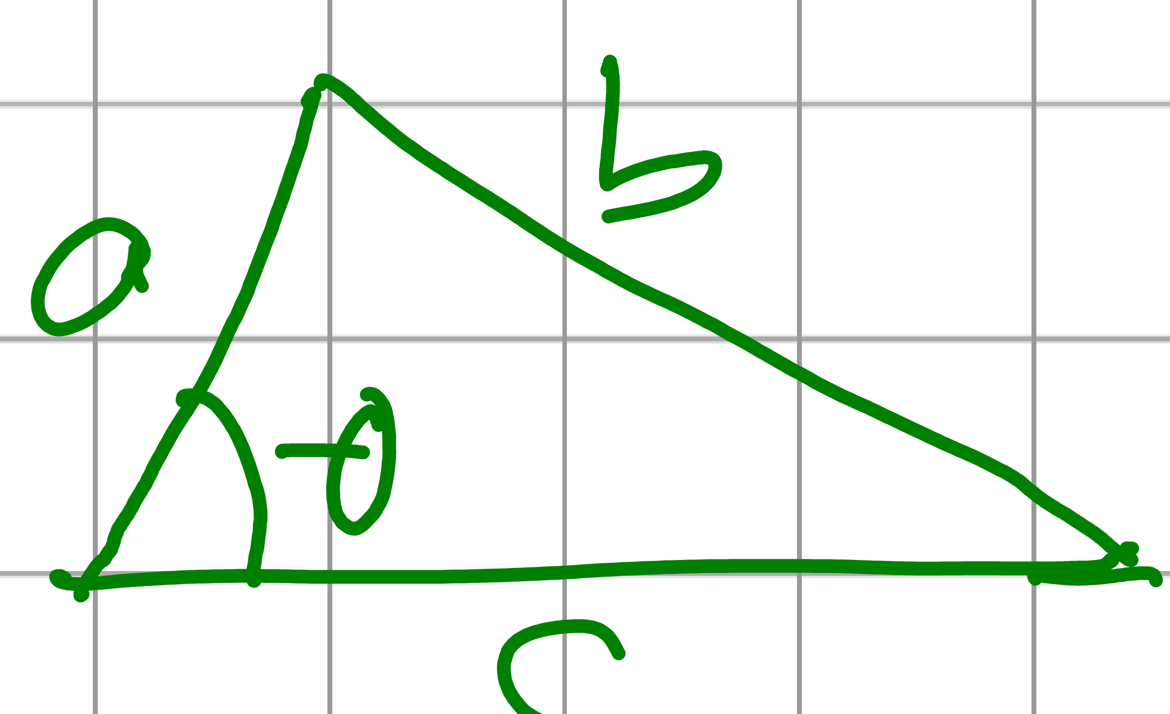


Teo Si θ es el ángulo entre los vectores distinto de cero $\bar{v}, \bar{u}$, donde $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces

$$\cos\theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\|}$$

Dem

Recordemos la ley de los cosenos



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta$$

Considere el triángulo determinado por los vectores $\bar{u}, \bar{v}, \bar{v}-\bar{u}$

como en la figura (*) arriba
Por la ley de los cosenos

$$\|\bar{v}-\bar{u}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - 2\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|\cos\theta$$

Además,

$$\|\bar{v}-\bar{u}\|^2 = (\bar{v}-\bar{u}) \cdot (\bar{v}-\bar{u})$$

$$= (\bar v - \bar u)\cdot \bar v - (\bar v - \bar u)\cdot \bar u$$

$$= \bar v\cdot\bar v - \bar u\cdot\bar v - \bar v\cdot\bar u + \bar u\cdot\bar u$$

$$= \|\bar v\|^2 - 2\bar u\cdot\bar v + \|\bar u\|^2$$

regresemos a la ley de los cosenos

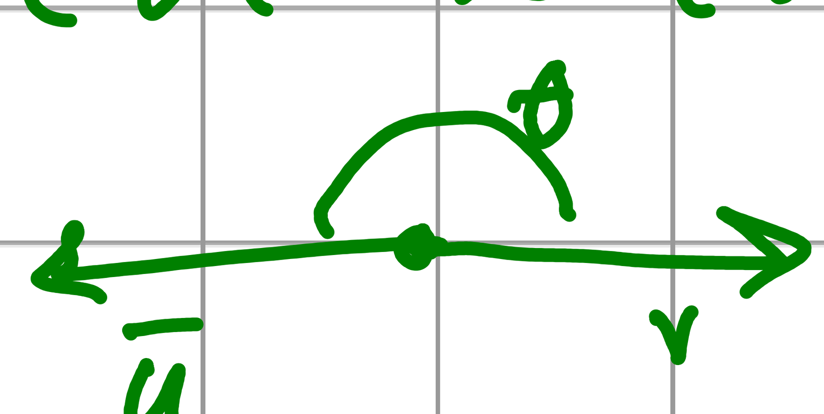
$$\|\bar v\|^2 - 2\bar u\cdot\bar v + \|u\|^2 = \|u\|^2 + \|\bar v\|^2 - 2\|\bar u\|\,\|\bar v\|\cos\theta$$

$$-2\bar u\cdot\bar v = -2\|\bar u\|\,\|\bar v\|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\bar u\cdot\bar v}{\|\bar u\|\,\|\bar v\|}$$

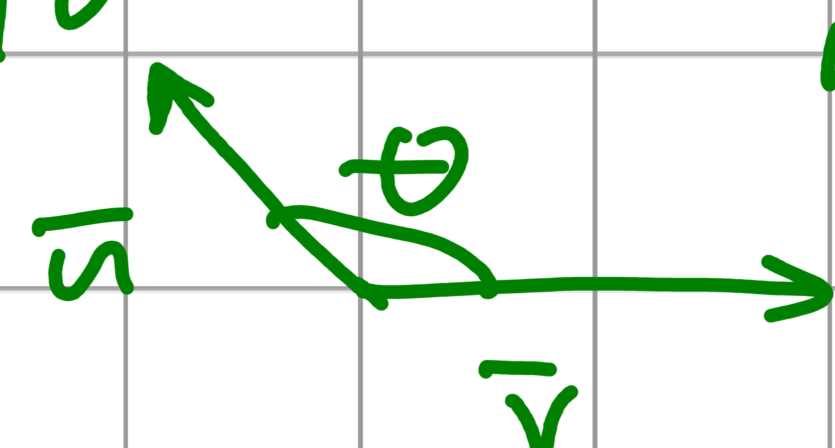
Como $\|\bar u\|$ y $\|\bar v\|$ son positivos, $\bar u\cdot\bar v$ y $\cos\theta$ tienen el mismo signo

La ilustración muestra las posibles orientaciones en 2 dimensiones



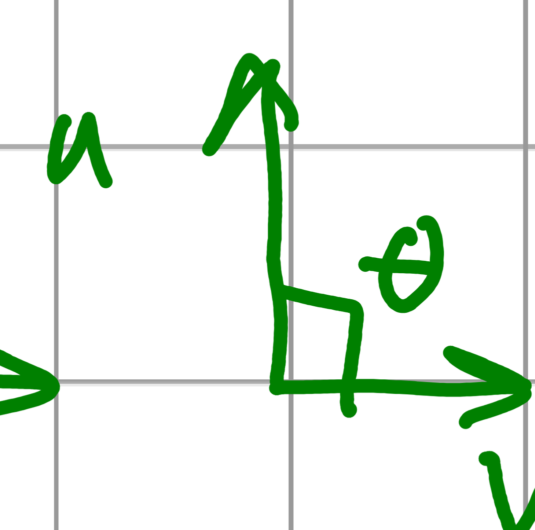
$\theta = \pi$

$\cos\theta = -1$



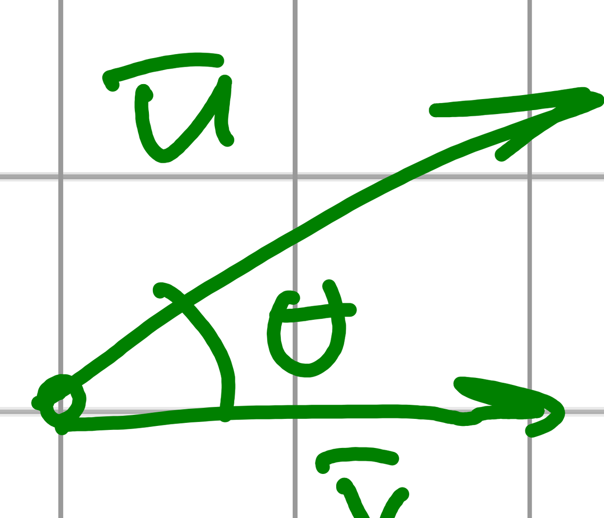
$\pi/2 < \theta < \pi$

$-1 < \cos\theta < 0$



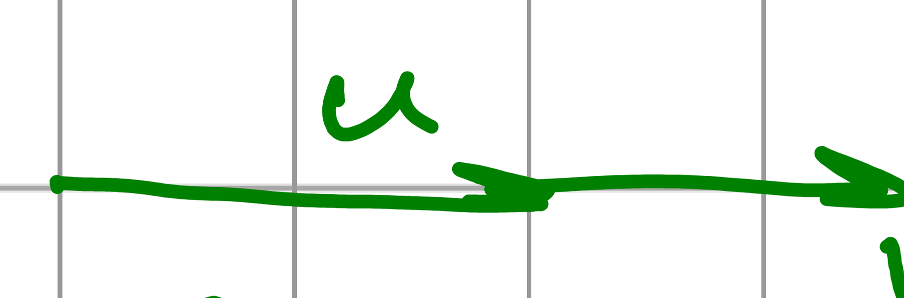
$\theta = \pi/2$

$\cos\theta = 0$



$0 < \theta < \pi/2$

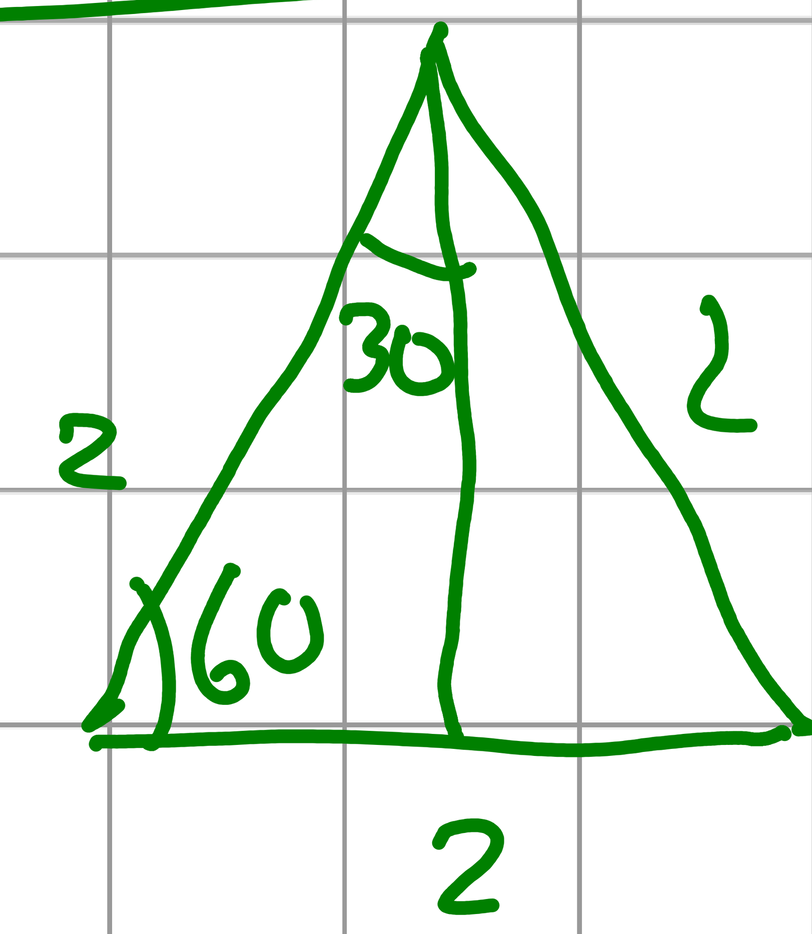
$0 < \cos\theta < 1$



$\theta = 0$

$\cos\theta = 1$

Def. Los vectores $\bar{u}, \bar{v}$ son ortogonales cuando $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$



Eje Para $\bar{u} = (3,-1,2)$

$\bar{v} = (-4,0,2)$

$\bar{w} = (1,-1,-2)$

$\bar{z} = (2,0,-1)$

a) ángulo entre $\bar{u}, \bar{v}$

$$\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|} = \frac{-12+0+4}{\sqrt{14}\sqrt{20}}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{70}}$$

Cuando $\bar{u}\cdot\bar{v} < 0$, $\theta = \cos^{-1}\frac{-4}{\sqrt{70}}$

≈ 2.069 rad.

b) ángulo entre $\bar{u}, \bar{w}$

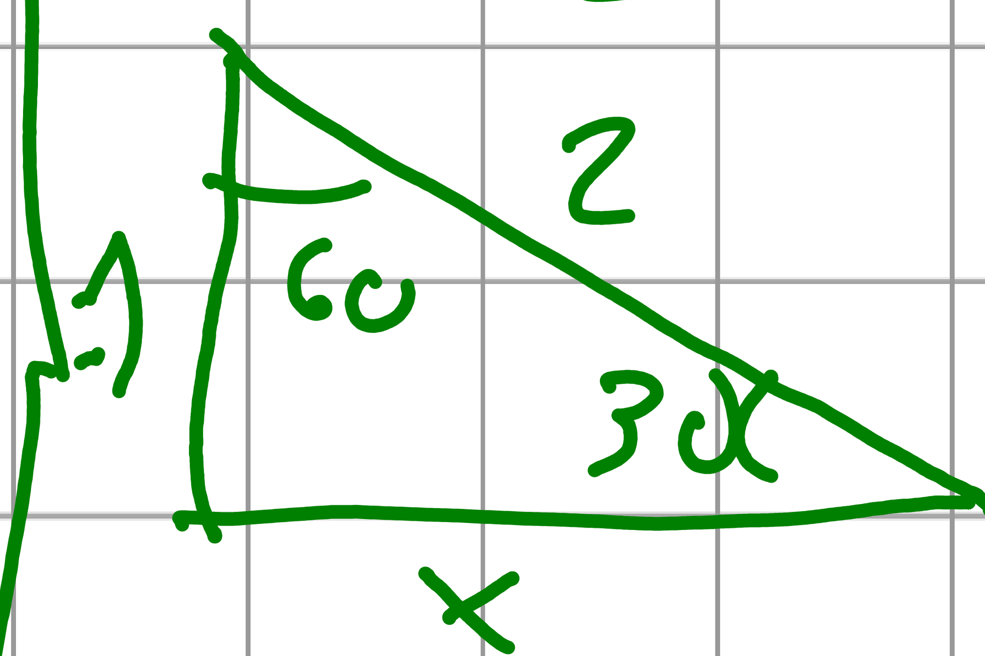
$$\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{w}}{\|\bar{u}\|\|\bar{w}\|} = \frac{0}{\sqrt{84}} = 0$$

Como $\bar{u}\cdot\bar{w} = 0$, $\bar{u}, \bar{w}$ son ortogonales, así que

$\theta = \pi/2$

c) ángulo entre $\bar{v}$ y $\bar{z}$

$$\cos\theta = \frac{\bar{v}\cdot\bar{z}}{\|\bar{v}\|\|\bar{z}\|} = \frac{-10}{\sqrt{100}} = -1$$



$x^2 + 1^2 = 2^2$

$x^2 = 3$

$x = \sqrt{3}$

$\operatorname{Sen} 30 = \frac{1}{2}$

$\cos 60 = \frac{1}{2}$

$180° = \pi$ rad

$60° = \frac{\pi}{3}$

$30° = \frac{\pi}{6}$

$45 = \frac{\pi}{4}$

$= -1$

Por lugar $\theta = \pi$

Note que $\bar{v}, \bar{z}$ son paralelos con

$\bar{v} = -2\bar{z}$

Si conocemos el ángulo entre $\bar{u}, \bar{v}$ podemos escribir

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\| \cos\theta$$

<u>Eje</u> Dados $\|\bar{u}\| = 10$, $\|\bar{v}\| = 7$ y que el ángulo entre $\bar{u}, \bar{v}$ es $\pi/4$ determinar $\bar{u} \cdot \bar{v}$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\| \cos\theta$$

$$= (10)(7) \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= 70 \frac{\sqrt{2}}{2}$$