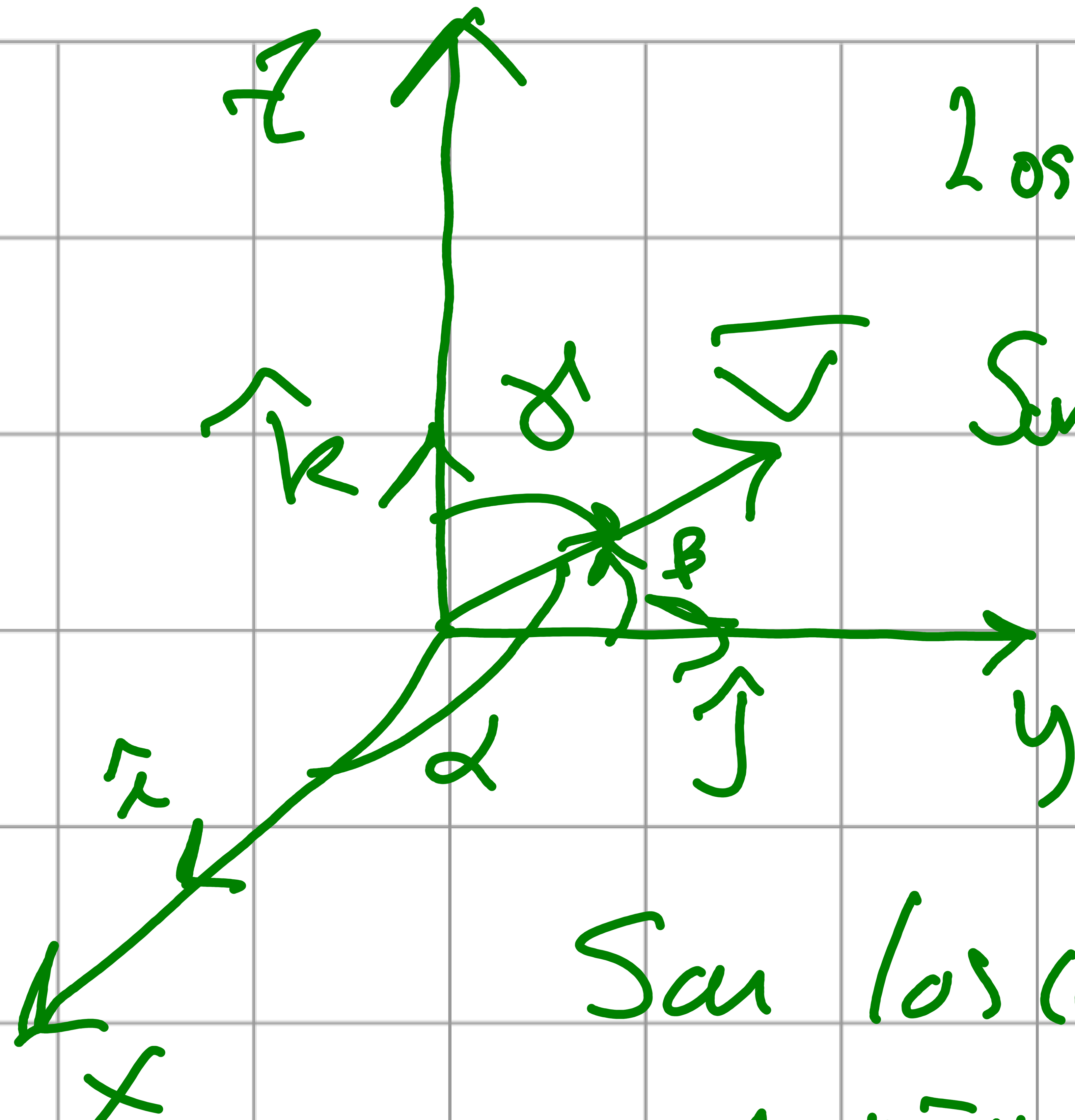
4



Los ángulos α, β, γ son los ángulos directores de $\bar v$ y $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ son los cosenos directores de $\bar v$

Ya que $\bar v\cdot\hat\imath = \|\bar v\|\,\|\hat\imath\|\cos\alpha = \|\bar v\|\cos\alpha$

y $\bar v\cdot\hat\imath = (v_1, v_2, v_3)\cdot(1,0,0) = v_1$

Se sigue que $\cos\alpha = v_1/\|\bar v\|$

Con un razonamiento similar con $\hat\jmath$ y $\hat k$ deducimos que

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\|\bar v\|} \qquad \cos\beta = \frac{v_2}{\|\bar v\|} \qquad \cos\gamma = \frac{v_3}{\|\bar v\|}$$

Por tanto, para cualquier vector $\bar v \neq \bar 0$, su forma normalizada es

$$\frac{\bar v}{\|\bar v\|} = \frac{v_1}{\|\bar v\|}\hat\imath + \frac{v_2}{\|\bar v\|}\hat\jmath + \frac{v_3}{\|\bar v\|}\hat k$$

$$= \cos\alpha\,\hat\imath + \cos\beta\,\hat\jmath + \cos\gamma\,\hat k$$

y como $\frac{\bar v}{\|\bar v\|}$ tiene norma 1, deduce que

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (*)

Ej: Determine los cosenos y ángulos directores para el vector $\bar{v} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ y compruebe (*)

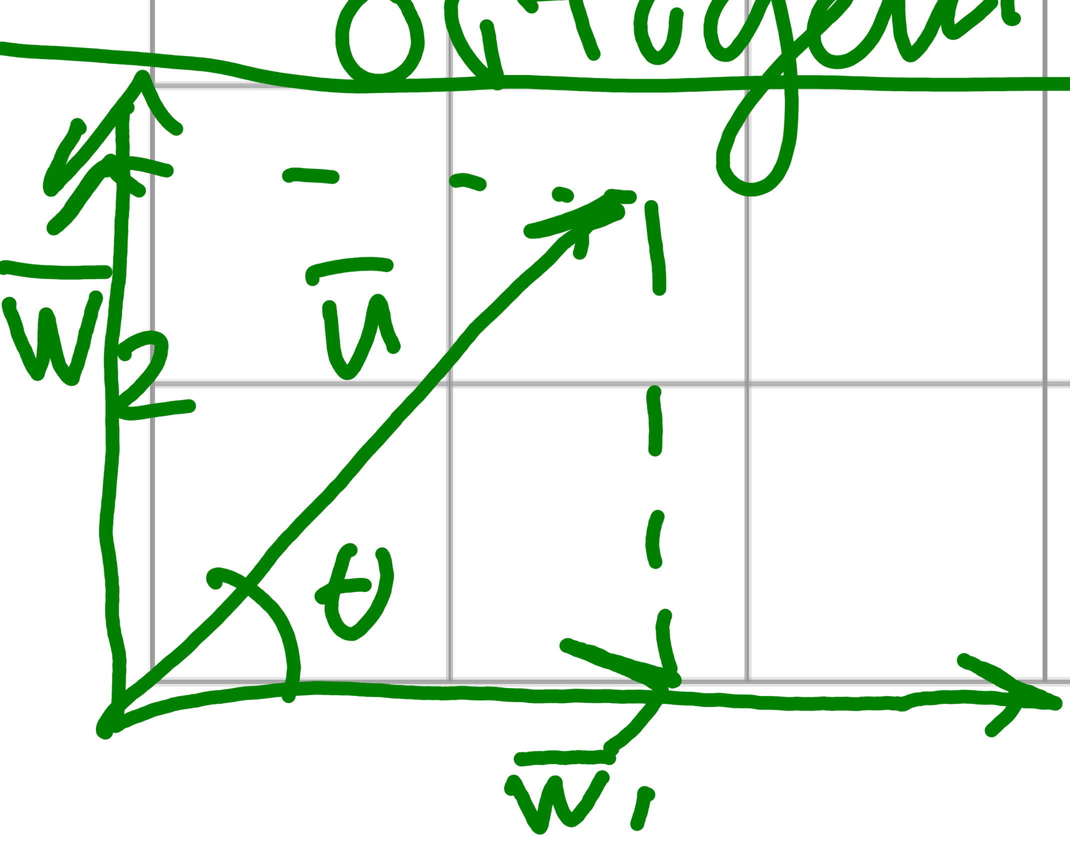
Sol: $\|\bar{v}\| = \sqrt{29}$

$\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$ $\quad \cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{29}}$ $\quad \cos\gamma = \dfrac{4}{\sqrt{29}}$

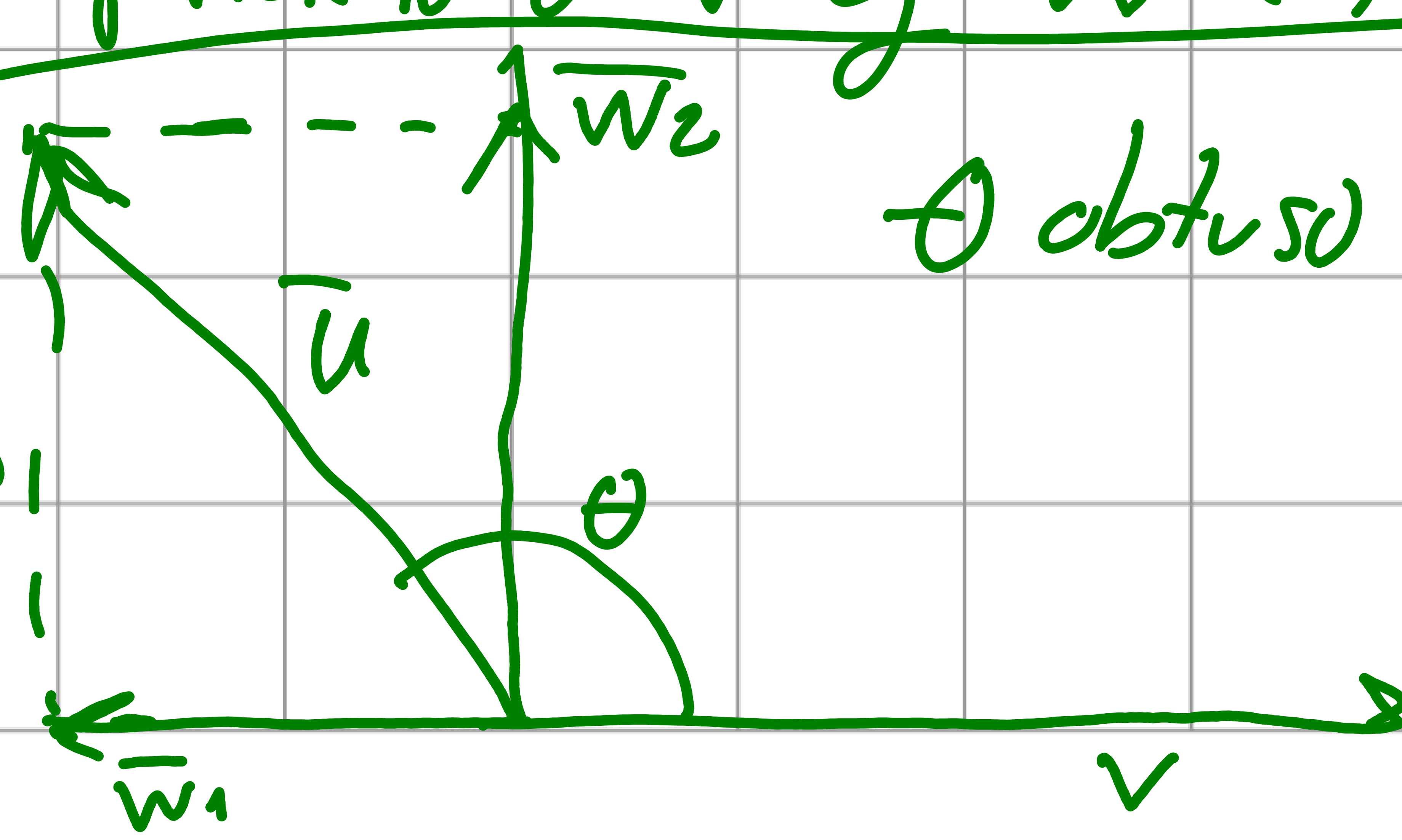
$\alpha \approx 68.2^\circ$ $\quad \beta \approx 56.1^\circ$ $\quad \gamma \approx 42.0^\circ$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{29} + \frac{9}{29} + \frac{16}{29} = 1$$

Sean $\bar{u}, \bar{v}$ vectores no cero. Más aún, sea $\bar{u} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$ donde $\bar{w}_1$ es paralelo a $\bar{v}$ y $\bar{w}_2$ es ortogonal a $\bar{v}$



θ agudo

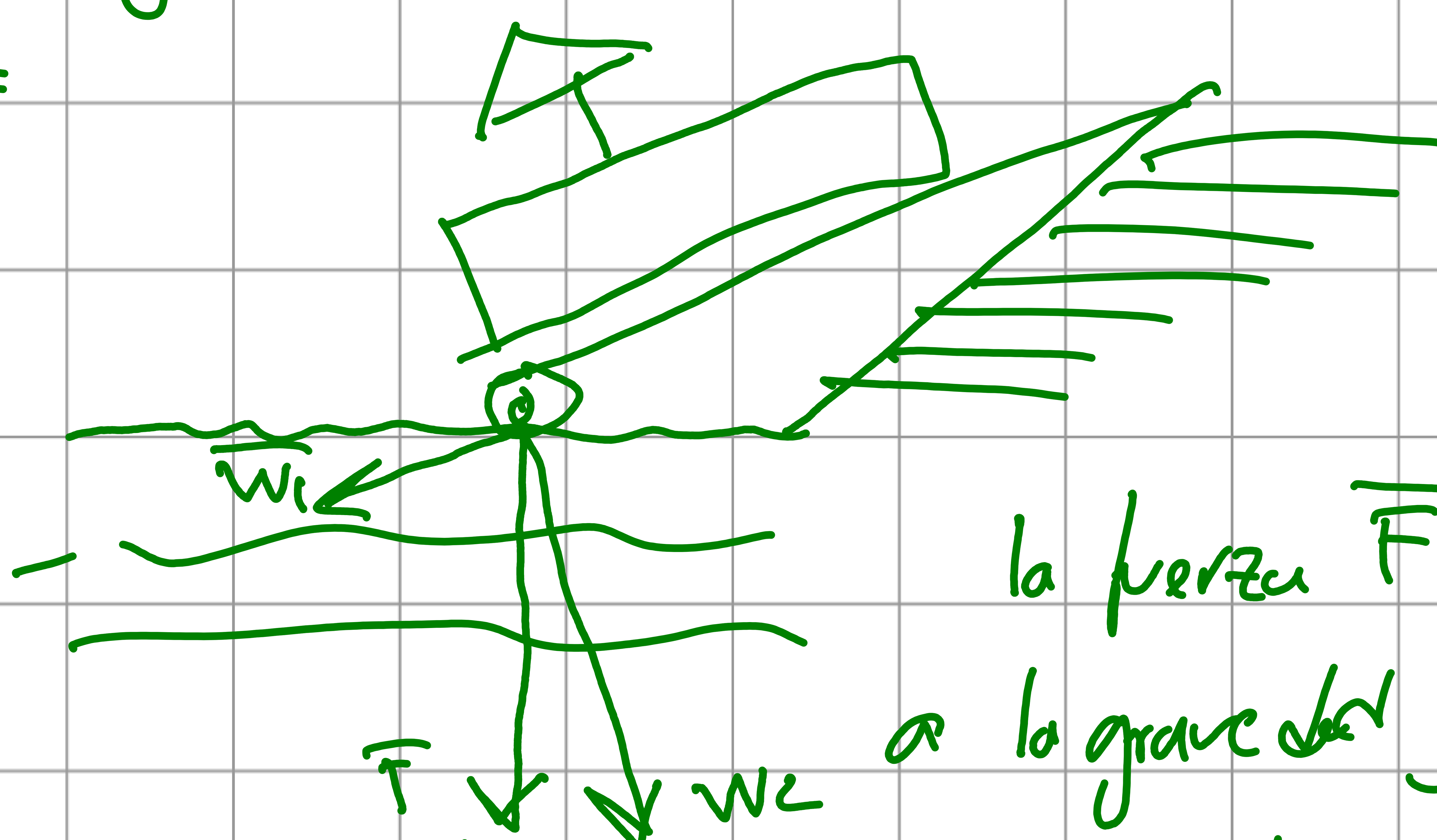


θ obtuso

1. $\overline{w}_1$ es la proyección de $\bar{u}$ sobre $\bar{v}$ o el vector componente de $\bar{u}$ en $\bar{v}$ y se denota $\overline{w}_1 = \text{Proy}_{\bar{v}}\,\bar{u}$

2. $\overline{w}_2 = \bar{u} - \overline{w}_1$ es el vector componente de $\bar{u}$ ortogonal a $\bar{v}$

Eje



la fuerza $\overline{F}$ debido a la gravedad jala al bote hacia abajo de la rampa y contra ella. Estas fuerzas $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2$ son ortogonales y son las componentes de $\overline{T}$

$$\overline{F} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2$$

$\overline{w}_1$ indica la fuerza necesaria para evitar que el bote se deslice hacia abajo, w_2 indica la fuerza que las ruedas enfrentan.

Eje Encuentre la componente de $\bar{u}=(5,10)$ ortogonal a $\bar{v}=(4,3)$ dado

$$W_1 = \text{Proy}_{\bar{v}}\, u = (8,6)$$

y $\bar{u}=(5,10)=\bar{w}_1+\bar{w}_2$

Sol. Como $\bar{u}=\bar{w}_1+\bar{w}_2$, donde $\bar{w}_1$ es paralelo a $\bar{v}$, se sigue que $\bar{w}_2$ es la componente de $\bar{u}$ ortogonal a $\bar{v}$. Así,

$$\begin{aligned}\bar{w}_2 &= \bar{u}-\bar{w}_1\\ &= (5,10)-(8,6)\\ &= (-3,4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_2\cdot\bar{v} &= (-3,4)\cdot(4,3)\\ &= -12+12\\ &= 0\end{aligned}$$

Teo Si $\bar{u},\bar{v}$ son vectores $\neq\bar{0}$, entonces la proyección de $\bar{u}$ sobre $\bar{v}$ es

$$\text{Proy}_{\bar{v}}\,\bar{u} = \left(\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{v}\|^2}\right)\bar{v}$$

La proyección de $\bar{u}$ sobre $\bar{v}$ se puede escribir como un múltiplo escalar de un vector unitario en la dirección de $\bar{v}$. Esto es,

$$\left(\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{v}\|^2}\right)\bar{v} = \left(\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{v}\|}\right)\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = (k)\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$$

El escalar k es la componente de $\bar{u}$ en la dirección de $\bar{v}$. Así

$$k = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \|\bar{u}\|\cos\theta$$

<u>Ej.</u> Determine la proyección de $\bar{u}$ sobre $\bar{v}$ y el vector componente de $\bar{u}$ ortogonal a $\bar{v}$ para $\bar{u} = 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $\bar{v} = 7\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}$

<u>Sol.</u> La proyección de $\bar{u}$ sobre $\bar{v}$ es

$$\bar{w}_1 = \text{Proy}_{\bar{v}}\,\bar{u} = \left(\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{v}\|^2}\right)\bar{v}$$

$$= \left(\frac{12}{54}\right)(7\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k})$$

$$= \frac{14}{9}\hat{\imath} + \frac{2}{9}\hat{\jmath} - \frac{4}{9}\hat{k}$$

El componente vector de $\bar{u}$ ortogonal a $\bar{v}$ es el vector

$$\bar{w}_2 = \bar{u} - \bar{w}_1 = (3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2\hat{k}) - \left(\frac{14}{9}\hat{\imath} + \frac{2}{9}\hat{\jmath} - \frac{4}{9}\hat{k}\right)$$

$$= \frac{13}{9}\hat{\imath} - \frac{47}{9}\hat{\jmath} + \frac{22}{9}\hat{k}$$