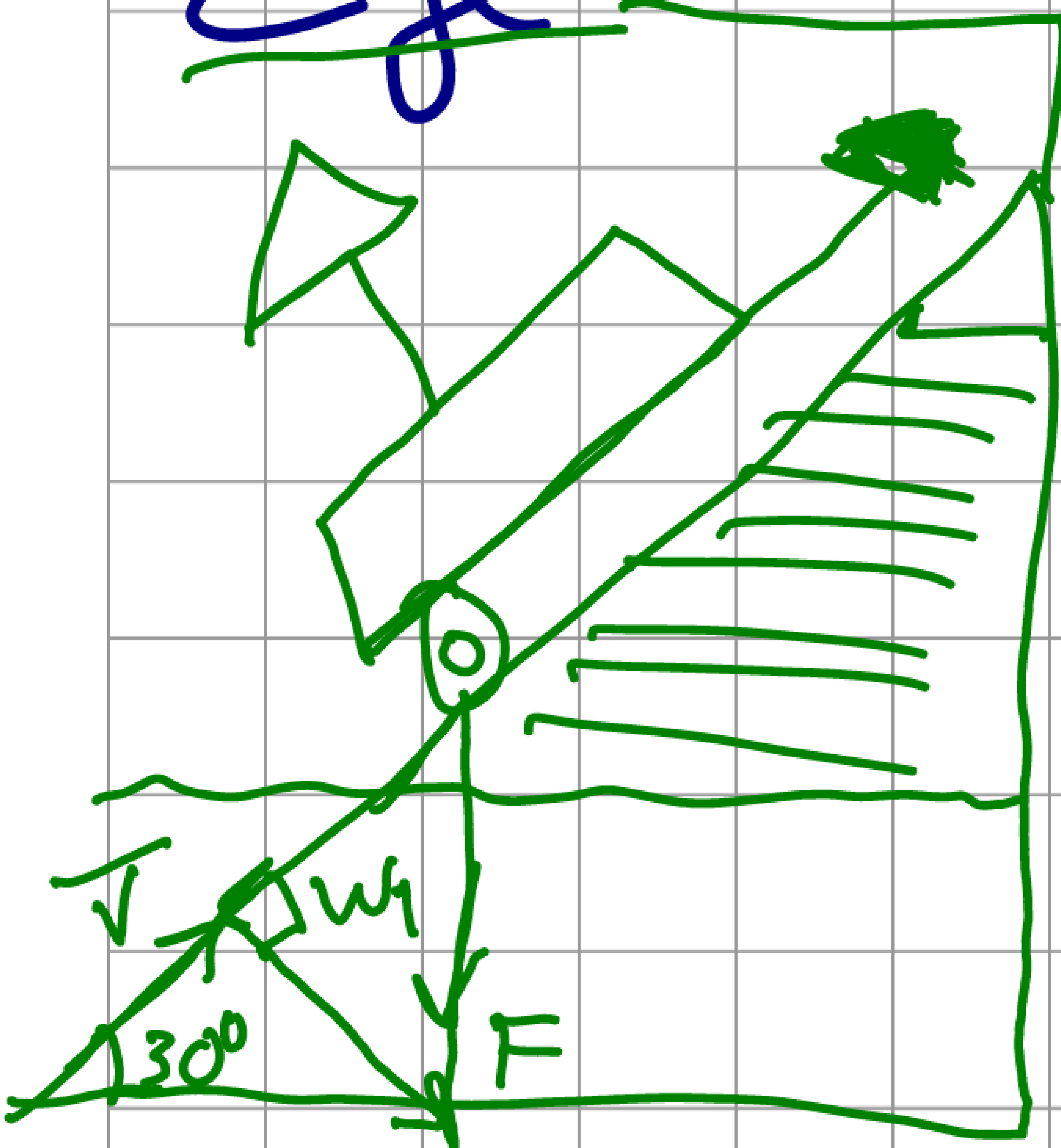
Eje 15

Una lancha de 600 lb está inclinada 30°. ¿Qué fuerza se requiere para impedir que la lancha se deslice hacia abajo?



$w_1 = \text{Proy}_v(F)$

Sol. Ya que la gravedad actúa verticalmente, la representamos por el vector $\bar F = -600\hat j$

Para determinar la fuerza requerida que evite el deslizamiento, proyectamos $\bar F$ en el vector unitario $\bar V$ en la dirección de la rampa

$$\bar V = \cos 30^\circ \hat i + \sin 30^\circ \hat j$$

$$= \frac{\sqrt3}{2}\hat i + \frac{1}{2}\hat j$$ (Vector unitario sobre la rampa)

La proyección de $\bar F$ en $\bar V$ es

$$\bar W_1 = \text{Proy}_{\bar v}\bar F = \left(\frac{\vec F \cdot \bar V}{\|\bar V\|^2}\right)\bar V$$

$$= (\bar F \cdot \bar V)\bar V$$

$$= (-600)\left(\tfrac{1}{2}\right)\bar V = -300\left(\frac{\sqrt3}{2}\hat i + \frac{1}{2}\hat j\right)$$

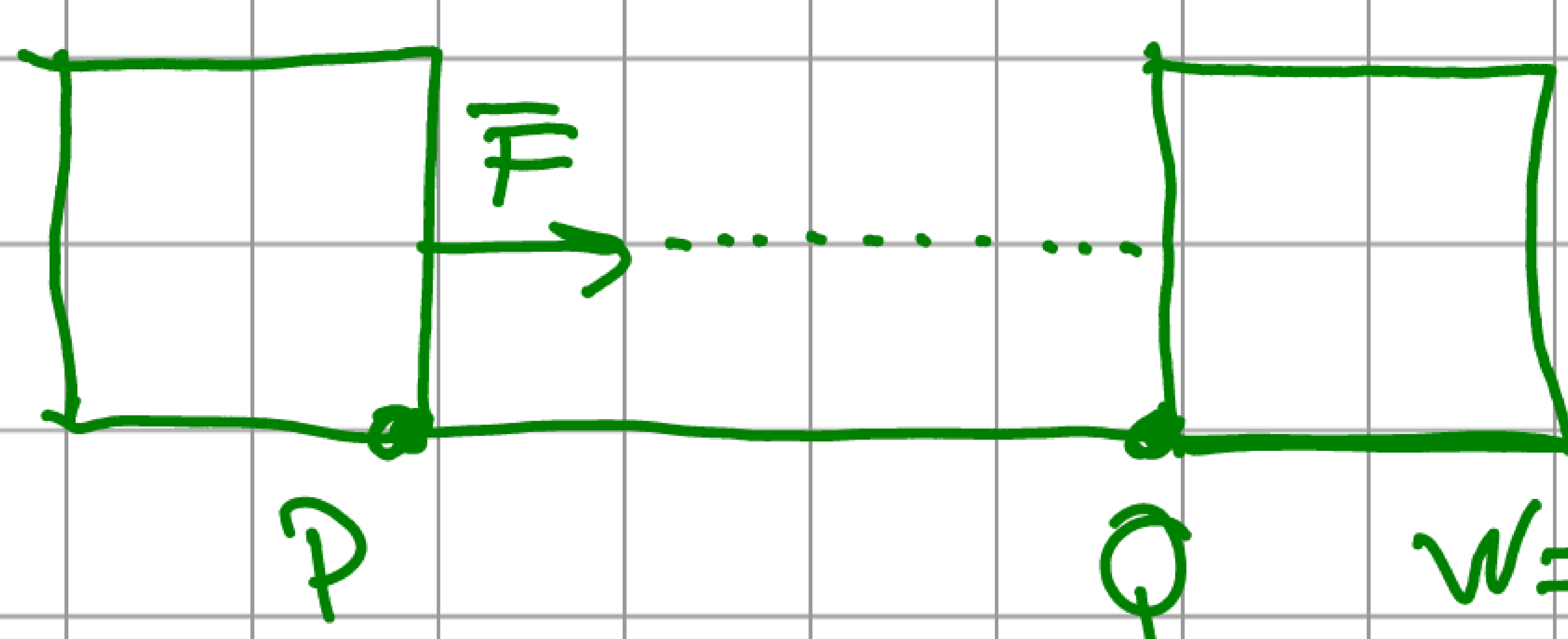
12

La magnitud de esta fuerza es 300 así que se requiere una fuerza de 300 lb para que la lancha no se resbale.

El trabajo W efectuado por la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la línea de movimiento de un objeto está dado por

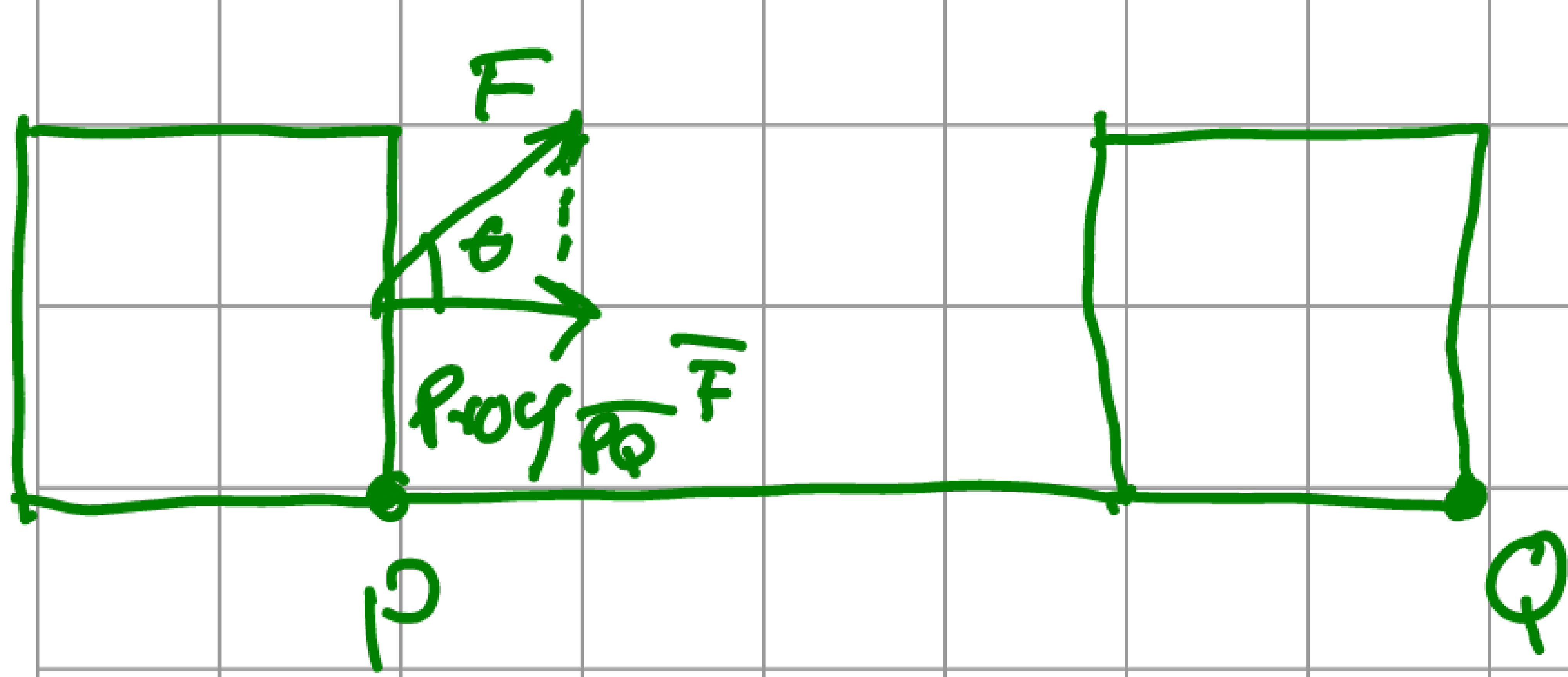
$$W = (\text{magnitud de la fuerza})(\text{distancia})$$
$$= \|\vec{F}\| \, \|\overrightarrow{PQ}\|$$

como se ve en la figura (a)



$W = \|\vec{F}\| \, \|\overrightarrow{PQ}\|$

(a)



(b) $W = \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}} \vec{F}\| \, \|\overrightarrow{PQ}\|$

La fuerza actúa en un ángulo θ con la línea de movimiento.

3

Cuando la fuerza constante $\overline{F}$ no actúa sobre la línea, la figura (b) el trabajo W está dado por

$$W = \|proy_{\overline{PQ}}\,\overline{F}\|\,\|\overline{PQ}\|$$

$$= (\cos\theta)\,\|\overline{F}\|\,\|\overline{PQ}\|$$

$$= \overline{F}\cdot\overline{PQ}$$

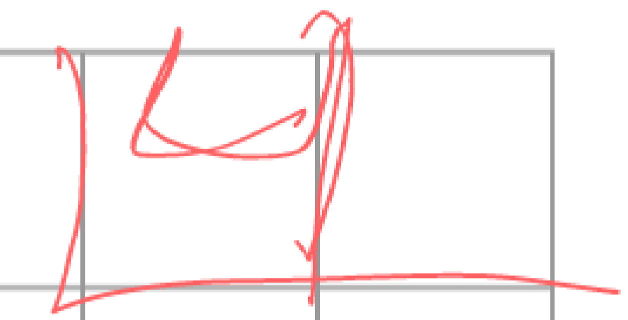
Def

El trabajo dado por una fuerza constante $\overline{F}$ cuando su punto de aplicación es sobre el vector $\overline{PQ}$ es,

1) $W = \|proy_{\overline{PQ}}\,\overline{F}\|\,\|\overline{PQ}\|$ (En forma de proyección)

2) $W = \overline{F}\cdot\overline{PQ}$ (En forma de producto punto)

Eje. Para cerrar una puerta deslizante, una persona jala una cuerda con una fuerza constante de 50 lb con un ángulo de 60°

Determine el trabajo dado al mover la puerta 12 ft para cerrarla. 

<u>Sol</u> Usamos una proyección

$$W = \|\text{proy}_{\overline{PQ}} \vec{F}\| \, \|\overline{PQ}\|$$

$$= \cos 60^\circ \, \|\vec{F}\| \, \|\overline{PQ}\|$$

$$= \frac{1}{2}(50)(12)$$

$$= 300 \text{ ft lb}$$

EJERCICIOS

1. Determine a) $\bar{u}\cdot\bar{v}$, b) $\bar{u}\cdot u$, c) $\|\bar{v}\|^2$
d) $(\bar{u}\cdot\bar{v})\bar{v}$, e) $\bar{u}\cdot(3\bar{v})$

i) $u = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$
$\bar{v} = \hat{\imath} - \hat{k}$

ii) $\bar{u} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}$
$\bar{v} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$

iii) $\bar{u} = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$
$\bar{v} = \sqrt{2}e_1 - \sqrt{3}e_4$
$\mathbb{R}^4$

iv) $\bar{u} = e_2 + e_5$
$\bar{v} = e_1 - e_3 - e_5$
$\mathbb{R}^5$

2. Determine el ángulo entre los vectores,

i) $\bar{u} = (1, 1, 2)$
$\bar{v} = (0, 0, 3)$

ii) $\bar{u} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$
$\bar{v} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$

15

iii) $\bar{u} = \cos\frac{\pi}{6}\,\hat{\imath} + \operatorname{Sen}\frac{\pi}{6}\,\hat{\jmath}$
$\bar{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\hat{\imath} + \operatorname{Sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\hat{\jmath}$

iv) $\bar{u} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + k$
$\bar{v} = i - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$

v) $\|\bar{u}\| = 8$, $\|\bar{v}\| = 5$
el ángulo entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$ es $\pi/3$

vi) $\|\bar{u}\| = 40$ $\|\bar{v}\| = 25$ y el ángulo entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$ es $5\pi/6$

3. Establezca si los vectores $\bar{u}, \bar{v}$ son ortogonales, paralelos o nada

i) $\bar{u} = (4, 3)$
$\bar{v} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$

ii) $\bar{u} = -\frac{1}{3}(i - 2\hat{\jmath})$
$\bar{v} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$

iii) $\bar{u} = (2, -3, 1)$
$\bar{v} = (-1, -1, -1)$

iv) $\bar{u} = (\cos\theta, \operatorname{Sen}\theta, -1)$
$\bar{v} = (\operatorname{Sen}\theta, -\cos\theta, 0)$

4. Dados los vértices de un triángulo, determine

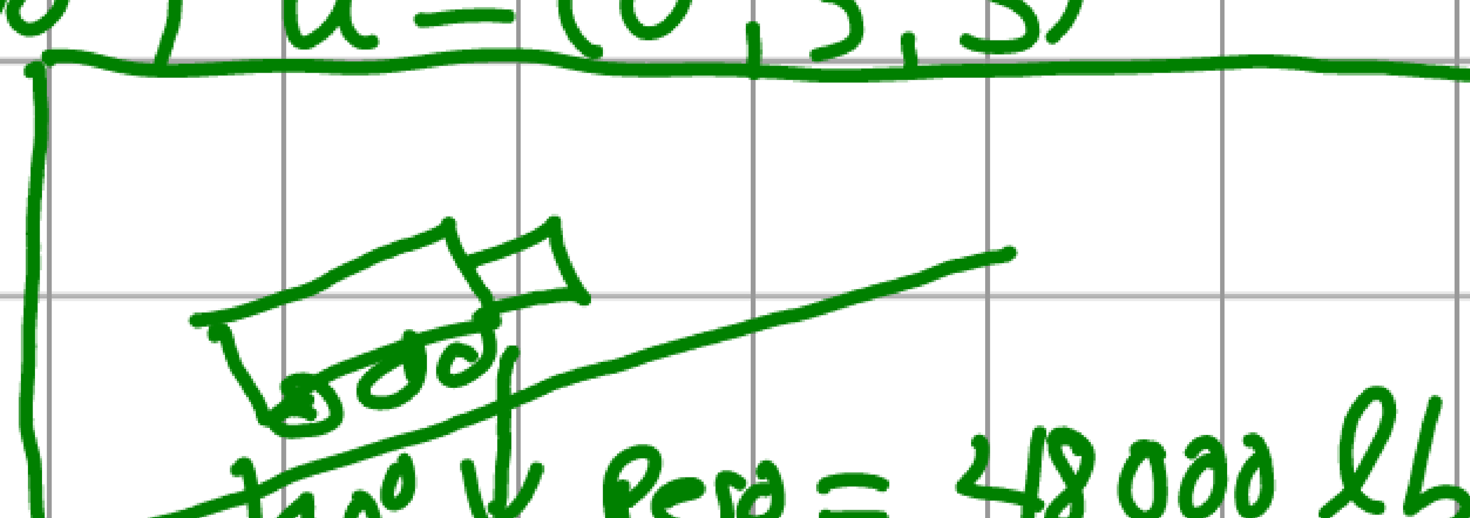
si es agudo, obtuso o rectángulo
¡Explique!
a) $(1,2,0)$, $(0,0,0)$, $(-2,1,0)$
b) $(-3,0,0)$, $(0,0,0)$, $(1,2,3)$
c) $(2,0,1)$, $(0,1,2)$, $(-0.5, 1.5, 0)$

5. Determine los ángulos y cosenos directores de $\bar{u}$ y verifique que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

a) $\bar{u} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ b) $\bar{u} = 5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$
c) $\bar{u} = (-1, 5, 2)$ d) $\bar{u} = 7\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$

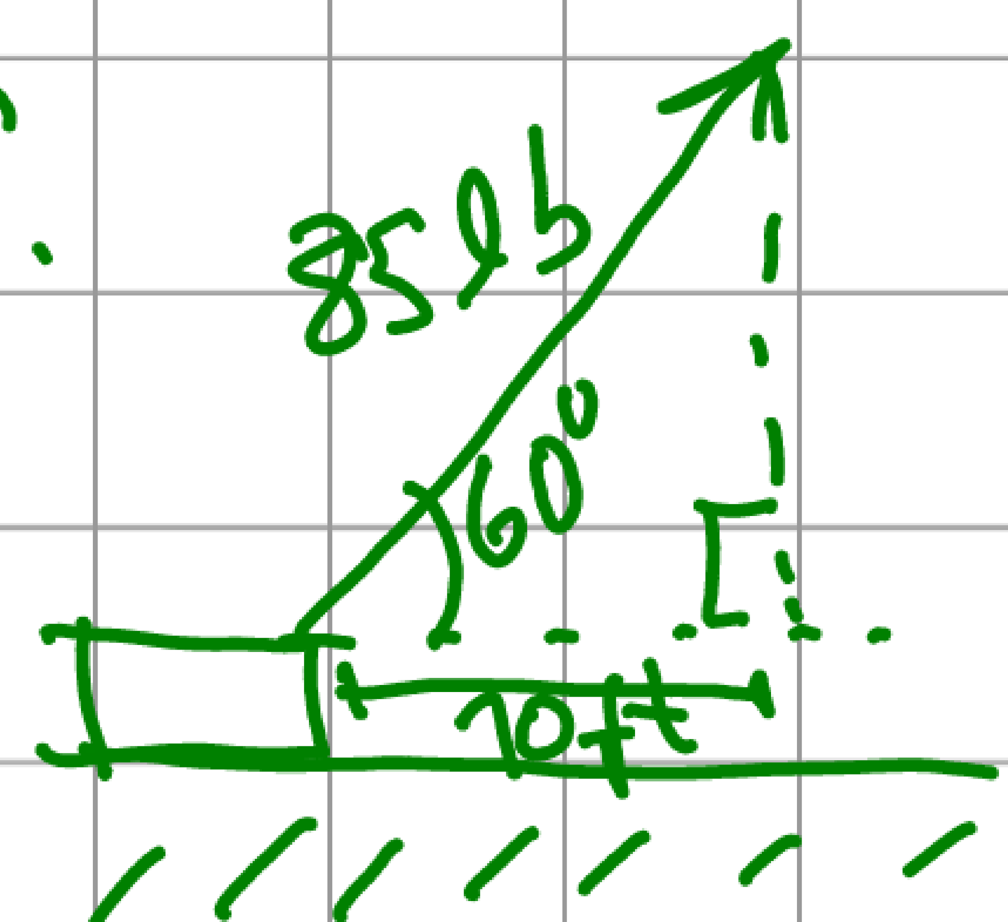
6. a) Encuentre la proyección de $\bar{u}$ sobre $\bar{v}$
b) Determine la componente de $\bar{u}$ ortogonal a $\bar{v}$.

i) $\bar{u} = (6,7)$, $\bar{v} = (1,4)$
ii) $u = (9,7)$ $\bar{v} = (1,3)$
iii) $\bar{u} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ $\bar{v} = 5\hat{\imath} + \hat{\jmath}$
iv) $\bar{u} = (0,3,3)$ $\bar{v} = (-1,1,1)$

7. 

Un camión de 48000 lb está estacionado en una

pendiente de 10°. Supongo que la única fuerza a considerar es la de la gravedad.
Determine a) la fuerza requerida para evitar que resbale el camión.
b) la fuerza perpendicular a la colina

8. 

Se jala un objeto 10 ft en el piso usando una fuerza de 85 lb, cuya dirección es de 60°. Determine el trabajo efectuado

---

El producto cruz

Def Sean $\bar{u}, \bar{v}$ vectores en $\mathbb{R}^3$

$u = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$

Se define el producto cruz de $\bar{u}, \bar{v}$ como

$$\bar{u} \times \bar{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\hat{\imath} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\hat{\jmath} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\hat{k}$$

La definición es sólo para vectores en $\mathbb{R}^3$ (aunque puede tener algún sentido en $\mathbb{R}^2$

La forma usual de recordar esta fórmula es mediante un determinante.

$$\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Se calcula mediante sus "menores"

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \hat{\imath}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left(u_2v_3 - v_2u_3\right)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \rightsquigarrow -\hat{\jmath}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} = -\hat{\jmath}\left(u_1v_3 - v_1u_3\right)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \hat{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \hat{k}\left(u_1v_2 - u_2v_1\right)$$

Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 6 - 5\cdot 3 = -9$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

9

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \pi & 2 \end{vmatrix} = 2\sqrt{2} - \pi\sqrt{3}$$

$\bar{u} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ $\qquad \bar{v} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \hat{\imath} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$- \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= i(4-1) - \hat{\jmath}(-2-3) + \hat{k}(1+6)$$

$$\underline{= 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 7\hat{k}}$$

$$\bar{v} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(1-4)$$

$$- \hat{\jmath}(3+2)$$

$$+ \hat{k}(-6-1)$$

$$= -3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 7\hat{k}$$

$$\bar{v} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(-2+2) - \hat{\jmath}(-6+6) + \hat{k}(3-3)$$

$$= \vec{0}$$

Teo Sean $\vec{u}, \bar{v}, \vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y c un escalar. Se cumplen las siguientes propiedades

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\bar{v} \times \bar{u})$
2. $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) + (\bar{u} \times \bar{w})$
3. $c(\bar{u} \times \bar{v}) = c\bar{u} \times v = u \times c\bar{v}$
4. $\bar{u} \times \bar{0} = \bar{0} \times \bar{u} = \bar{0}$
5. $\bar{u} \times \bar{u} = \bar{0}$
6. $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$

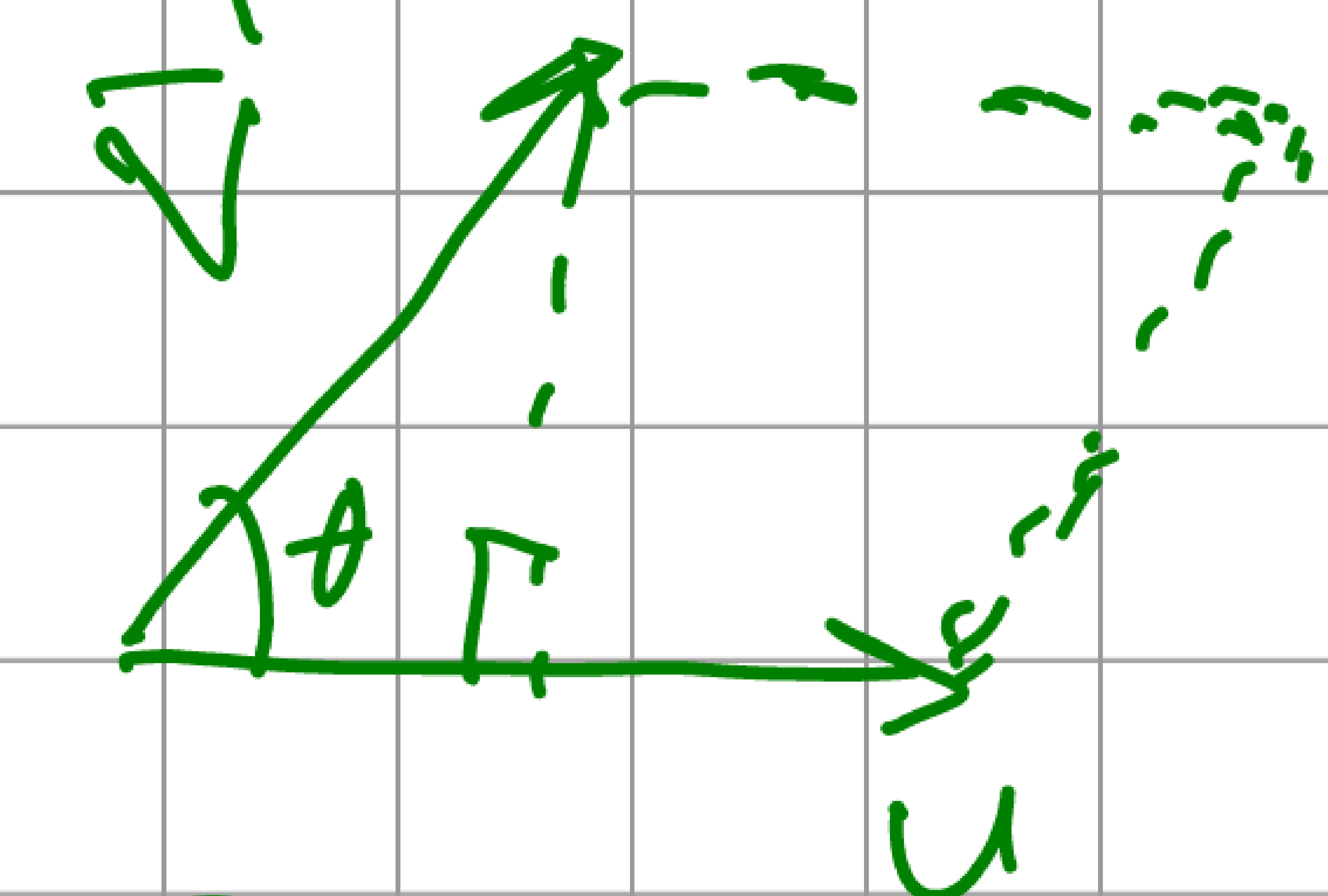
Teo Sean $\bar{u}, \bar{v}$ vectores $\neq \bar{0}$ en $\mathbb{R}^3$ con un ángulo θ entre ellos. Entonces,

1) $\bar{u} \times \bar{v}$ es un vector ortogonal tanto a $\bar{u}$ como a $\bar{v}$

2) $\|\bar{u} \times \bar{v}\| = \|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\| \operatorname{Sen}\theta$

3) $\bar{u}\times\bar{v}=0$ sii u es un múltiplo escalar de $\bar{v}$, esto es, son paralelos.

4) $\|\bar{u}\times\bar{v}\|$ = al área del paralelogramo



$\|\bar{v}\|\,\text{sen}\,\theta$ (*)

Por ejemplo para probar 2, usamos que $\cos\theta = \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{(\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|)}$

$$\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\,\text{sen}\,\theta = \|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\sqrt{1-\frac{(\bar{u}\cdot\bar{v})^2}{\|\bar{u}\|^2\|\bar{v}\|^2}}$$

$$= \sqrt{\|\bar{u}\|^2\|\bar{v}\|^2-(\bar{u}\cdot\bar{v})^2}$$

$$= \sqrt{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2}$$

$$= \sqrt{(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_1v_3-u_3v_1)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2}$$

$$= \|\bar{u}\times\bar{v}\|$$

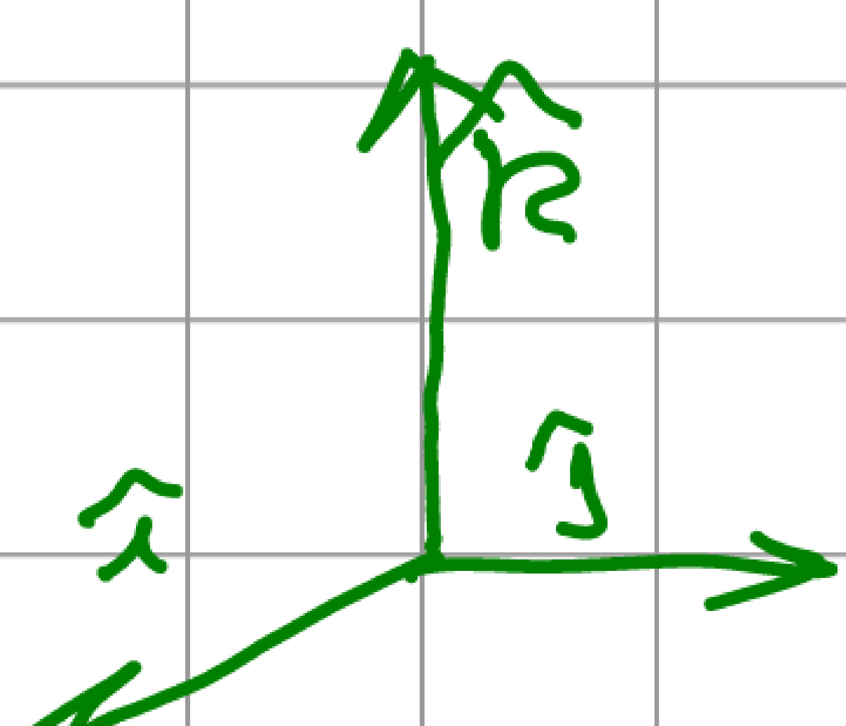
Para probar 4 usamos la figura (*) que es un paralelogramo con lados $\bar{v}$ y $\bar{u}$

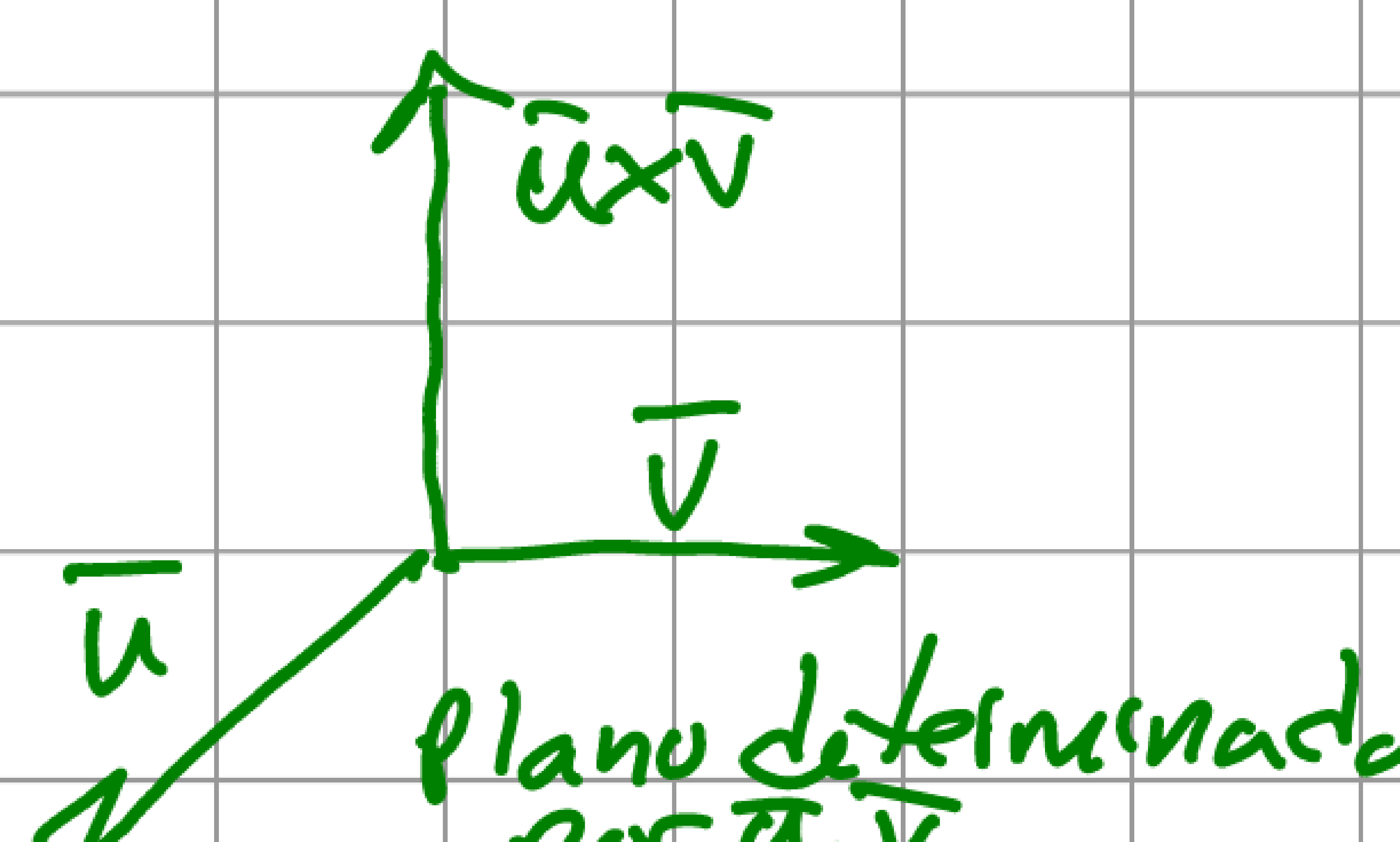
Ya que la altura del paralelogramo es $\|\bar{v}\| \operatorname{Sen}\theta$, el área es

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \text{base} \times \text{altura} \\ &= \|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\| \operatorname{Sen}\theta \\ &= \|\bar{u}\times\bar{v}\| \end{aligned}$$

Tanto $\bar{u}\times\bar{v}$ como $\bar{v}\times\bar{u}$ son vectores perpendiculares al plano determinado por $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

Para recordar la orientación de los vectores $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{u}\times\bar{v}$, se comparan con los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k} = \hat{i}\times\hat{j}$





Ej: Encuentre un vector unitario ortogonal a $\bar{u} = \hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ y a $\bar{v} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$

Sol: El producto cruz $\bar{u}\times\bar{v}$ es ortogonal a $\bar{u}$ y $\bar{v}$

13

$$\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3\hat{i} + 2\hat{j} + 11\hat{k}$$

En vista de que

$$\|\bar{u}\times\bar{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 11^2}$$
$$= \sqrt{134}$$

Vector unitario

$$\frac{\bar{u}\times\bar{v}}{\|\bar{u}\times\bar{v}\|} = -\frac{3}{\sqrt{134}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{134}}\hat{j} + \frac{11}{\sqrt{134}}\hat{k}$$

Eje

Tenemos los vértices de un cuadrilátero

$A = (5,2,0)$ $B = (2,6,1)$, $C = (2,4,7)$

$D = (5,0,6)$

Muestre que el cuadrilátero es un paralelogramo y determine su área

Sol Los lados son

$\overline{AB} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ $\quad\overline{CD} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$

$= -\overline{AB}$

$\overline{AD} = 0\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ $\quad\overline{CB} = 0\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$

$= -\overline{AD}$

Se sigue que $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ es paralelo a $\overline{CB}$ de modo que sí es un paralelogramo con $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ son lados adyacentes

Como

$$\overline{AB}\times\overline{AD} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 26\hat{i} + 18\hat{j} + 6\hat{k}$$

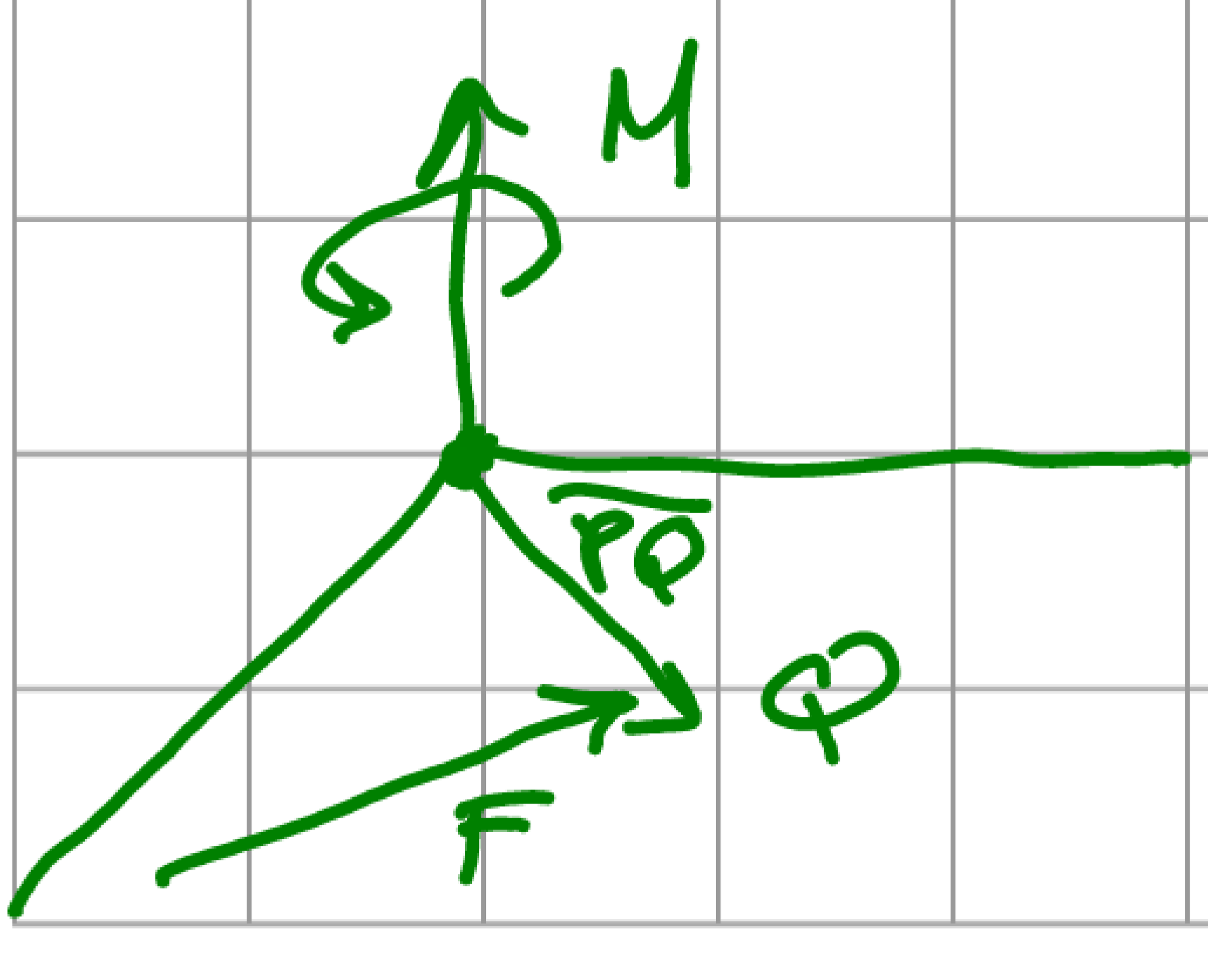
El área del paralelogramo es

$$\|\overline{AB}\times\overline{AD}\| = \sqrt{1036} \approx 32.19$$

Si se quiere, se puede averiguar si la figura es un rectángulo, calculando el ángulo entre los lados

---

En física, el producto cruz se usa para medir el torque = el momentum M de una fuerza $\overline{F}$ alrededor de un punto P

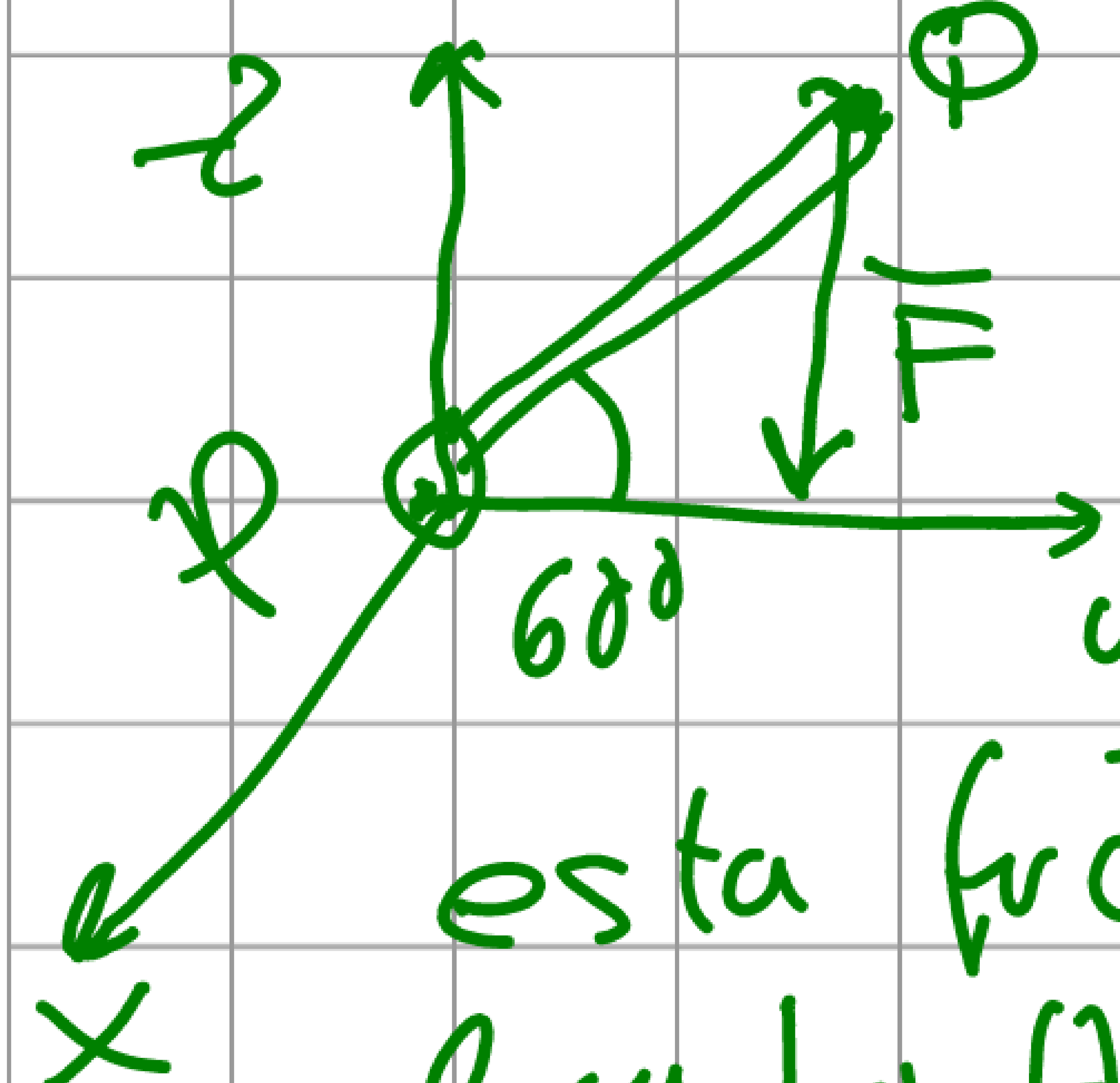


Si el punto de aplicación de la fuerza es Q, el momentum de $\overline{F}$ alrededor de P es

$$M = \overline{PQ}\times\overline{F}$$

La magnitud del momentum mide la tendencia del vector $\overline{PQ}$ para rotar contra reloj alrededor un eje determinado por $\overline{M}$

Eje



Una fuerza vertical de 50 lb se aplica en el extremo de un tubo de 1ft fijado en un eje en el punto P. Determine el momentum de esta fuerza alrededor del punto P cuando $\theta = 60^\circ$

Sol. Digamos $\overline{F} = -50\hat{k}$

el tubo es,

$$\overline{PQ} = \cos 60\,\hat{j} + \operatorname{Sen} 60\,\hat{k}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{k}$$

El momentum de $\overline{F}$ alrededor de P es,

$$\overline{M} = \overline{PQ} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & -50 \end{vmatrix}$$

$$= -25\,\hat{\imath}$$

la magnitud es 25

16

El triple producto escalar

Dados los vectores $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ en el espacio, el producto de $\bar{u}$ y $\bar{v} \times \bar{w}$

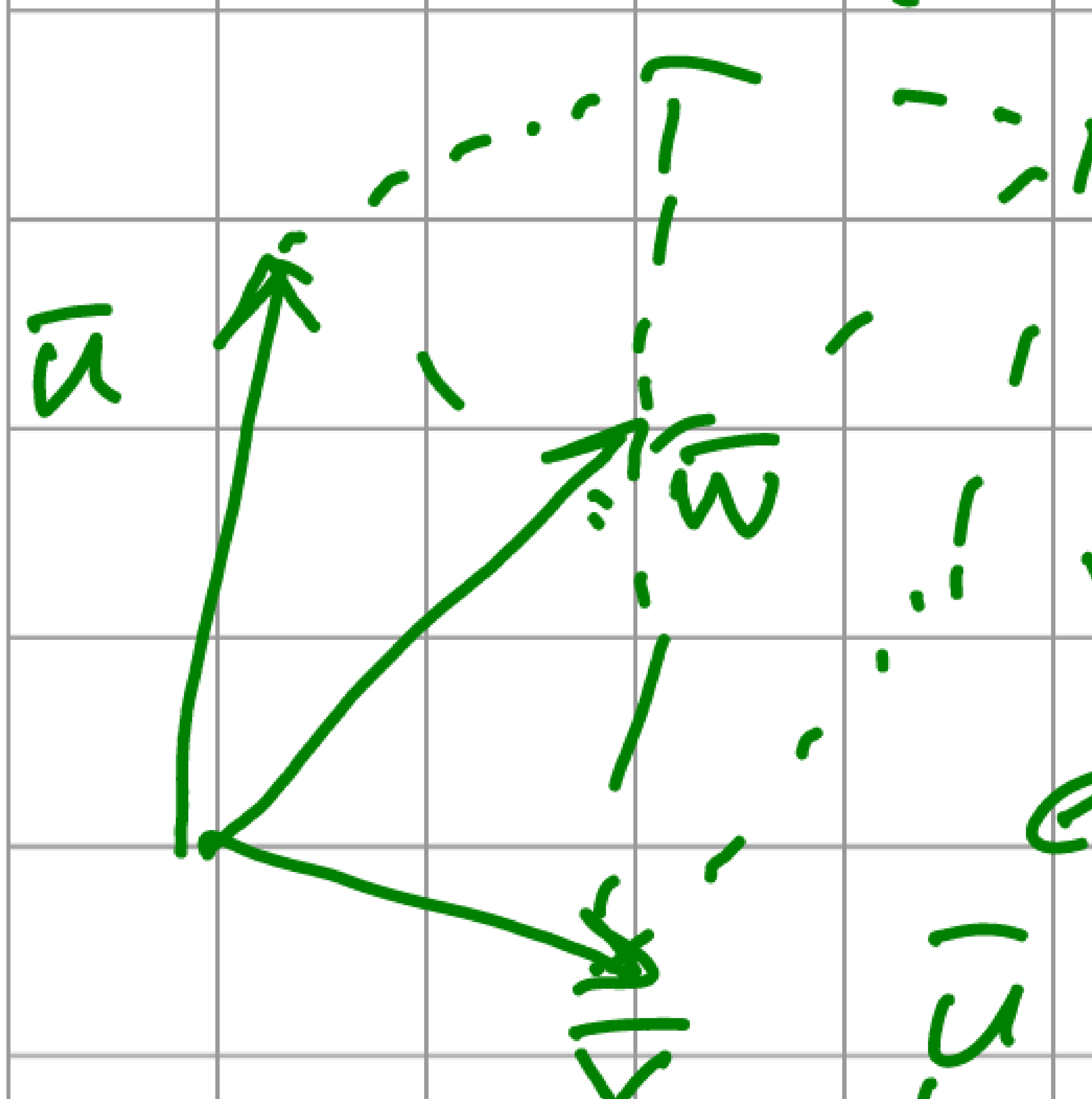
$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$$

Se llama el triple producto escalar

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

El valor del determinante se multiplica por -1 cuando se intercambian dos renglones. Si hacemos dos de tales intercambios, el valor del determinante queda sin cambio:

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \bar{v} \cdot (\bar{w} \times \bar{u})$$
$$= \bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$$



Cuando los vectores $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ no están en el mismo plano, el triple producto escalar $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$ se usa para determinar el volumen del paralelepípedo con lados deter-

minados por $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$.
Así, el volumen de dicho paralelepípedo

$$V = |\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})|$$

Eje Determine el volumen con lados

$$\bar{u} = 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + \hat{k}$$
$$\bar{v} = 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$
$$\bar{w} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$$

Sol.

$$V = |\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})|$$
$$= \left|\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

$$= 3(2+2) + 5(0+6) + 1(0-6)$$
$$= 12 + 30 - 6$$
$$= 36$$

Nota que si los tres vectores son coplanares, el triple producto es cero. La recíproca: si el triple

Producto es cero

$$\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})=0$$

Significa que $\bar{u}$ es perpendicular a $\bar{v}\times\bar{w}$, de modo que $\bar{u}$ está en el mismo plano que $\bar{v}$, $\bar{w}$

EJERCICIOS

1. Encuentre el valor

a) $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}$, b) $\hat{\jmath}\times\hat{\imath}$ c) $\hat{\imath}\times\hat{k}$ d) $\hat{k}\times\hat{\imath}$

2. Calcule $\bar{u}\times\bar{v}$, $\bar{v}\times u$ y $\bar{v}\times\bar{v}$

a) $\bar{u}=-2\hat{\imath}+4\hat{\jmath}$ $\bar{v}=3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+5\hat{k}$

b) $\bar{u}=(7,3,2)$ $\bar{v}=(1,-1,5)$

c) $\bar{u}=(2,1,-9)$ $\bar{v}=(-6,-2,-1)$

3. Encuentre $\bar{u}\times\bar{v}$ y confirme que este producto es ortogonal a $\bar{u}$ y $\bar{v}$

a) $\bar{u}=(4,-1,0)$ $\bar{v}=(-6,3,0)$

b) $\bar{u}=(-5,2,3)$ $\bar{v}=(0,1,8)$

4.- Determine un vector unitario ortogonal a $\bar{u}$ y $\bar{v}$

a) $\bar{u}=(4,-3,1)$ $\bar{v}=(2,5,3)$

b) $\bar{u}=(-8,-6,4)$ $\bar{v}=(10,-12,-2)$

5. Determine el área del paralelogramo

a) $\bar{u}=\hat{j}$ $\bar{v}=\hat{j}+\hat{k}$

b) $\bar{u}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ $\bar{v}=\hat{j}+\hat{k}$

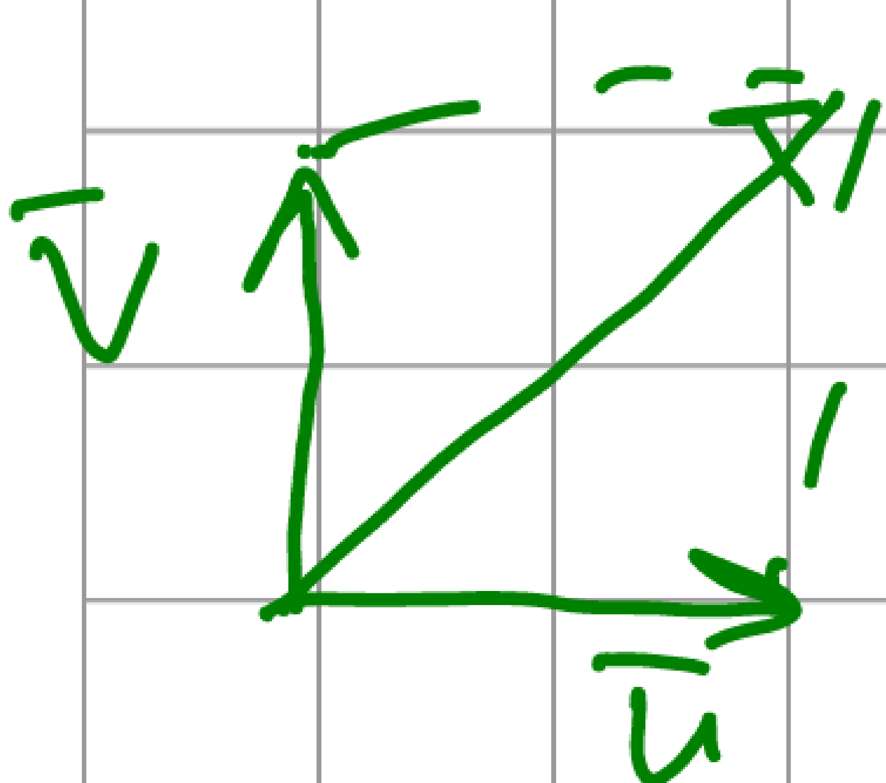
c) $\bar{u}=(3,2,-1)$ $\bar{v}=(1,2,3)$

6. Constate que los puntos dados son los vértices de un paralelogramo y calcule su área

a) $A=(0,3,2)$, $B=(1,5,5)$, $C=(6,9,5)$, $D=(5,7,2)$

b) $A=(2,-3,1)$, $B=(6,5,-1)$, $C=(7,2,2)$ $D=(3,-6,4)$

7. Calcule el área del triángulo con los vértices dados

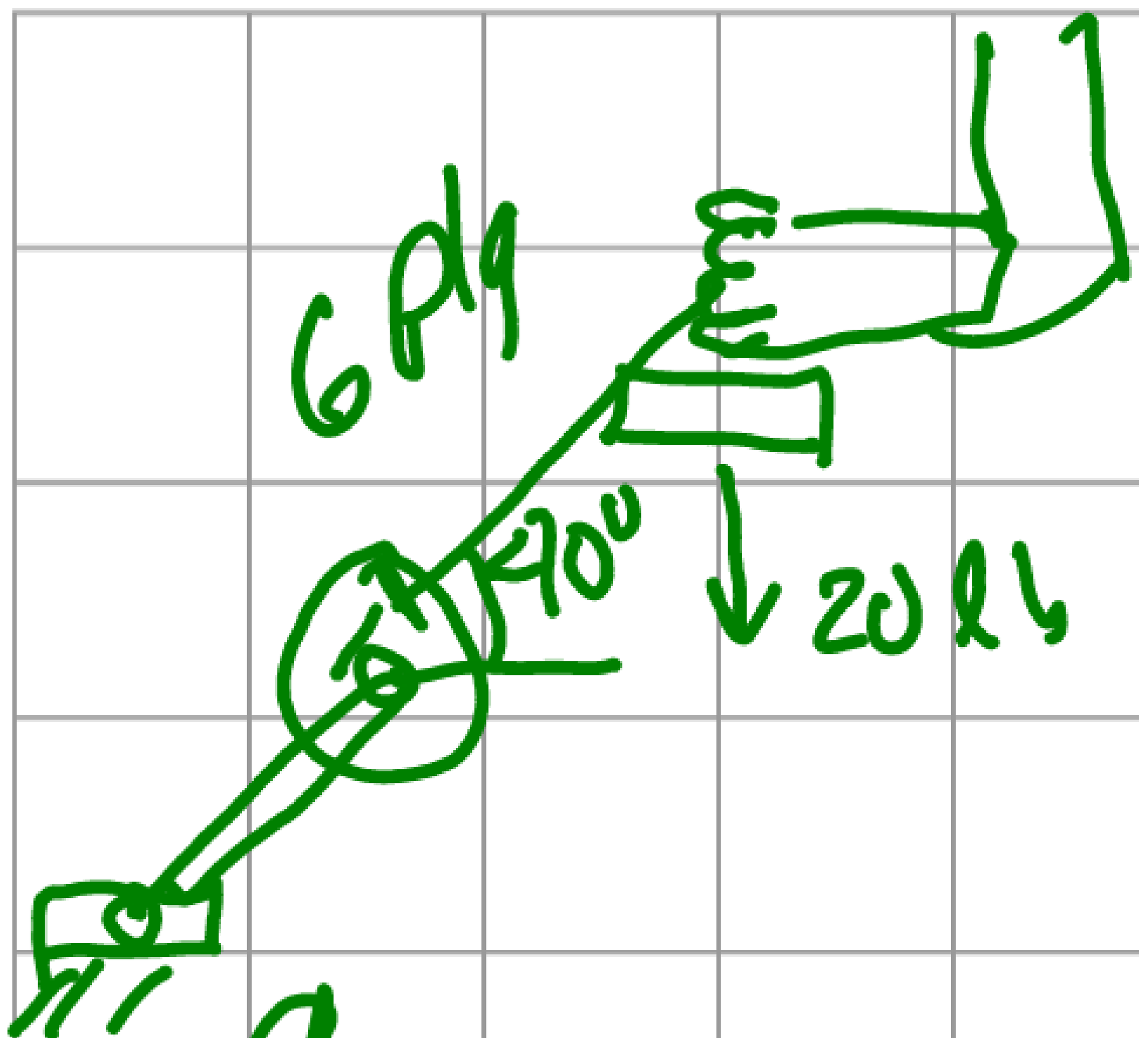


El triángulo tiene la mitad del área

a) $A=(0,0,0)$ $B=(1,0,3)$ $C=(-3,2,0)$

b) $A=(2,-3,4)$ $B=(0,1,2)$ $C=(-1,2,0)$

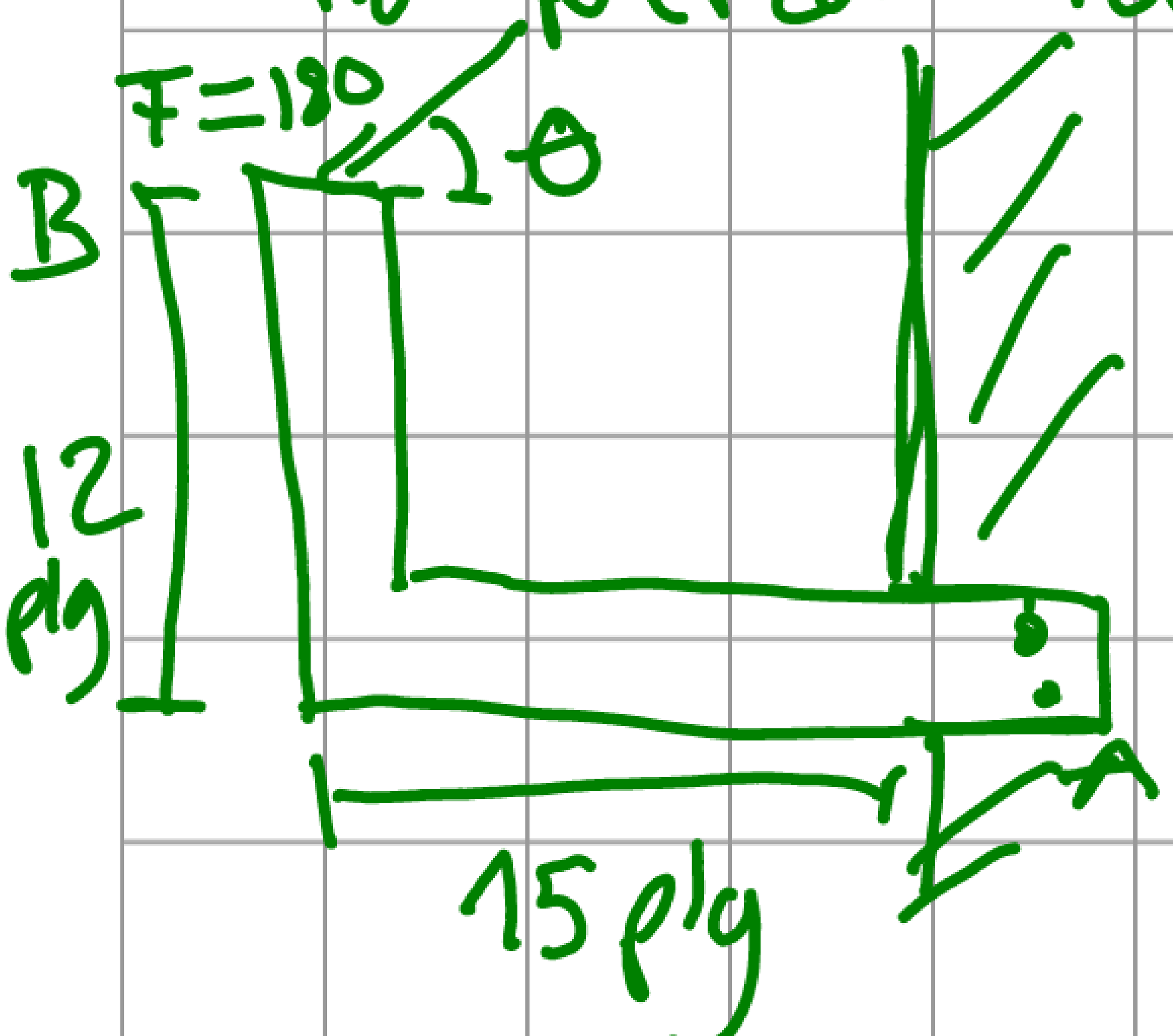
8. Los frenos de una bicicleta se aplican usando una fuerza de 20 lb en el pedal cuando se establece un ángulo de 40°



Con la horizontal. el pedal tiene 6 plg de longitud. Determine el torque

9.

Una fuerza 180 lb actúa en la ménsula mostrada



a) Determine el vector $\overline{AB}$ y el vector $\overline{F}$, en términos de θ,

b) Encuentre la magnitud del momentum alrededor de A evaluando $\|\overline{AB} \times \overline{F}\|$

c) Usando (b) determine la magnitud del momentum cuando $\theta = 30^\circ$

d) Use (b) para calcular el ángulo θ cuando la magnitud del momentum es máximo. En ese ángulo, ¿cuál es la relación entre los vectores $\overline{F}$ y $\overline{AB}$?

10. Calcule $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$

a) $u = \hat{\imath}$ $\quad \bar{v} = \hat{\jmath}$ $\quad w = \hat{k}$

b) $u = (1,1,1)$ $\quad \bar{v} = (2,1,0)$ $\quad \bar{w} = (0,0,1)$

c) $\bar{u} = (2, 0, 1)$ $\bar{v} = (0, 3, 0)$, $\bar{w} = (0, 0, 1)$ 21

11. Determine el volumen del paralelepípedo

a) $\bar{u} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$ $\bar{v} = \hat{\jmath} + \hat{k}$ $\bar{w} = \hat{\imath} + \hat{k}$

b) $\bar{u} = (1, 3, 1)$ $\bar{v} = (0, 6, 6)$ $\bar{w} = (-4, 0, -4)$

12. Calcule el volumen del paralelepípedo con los vértices dados.

a) $(0,0,0)$, $(3,0,0)$, $(0,5,1)$, $(2,0,5)$, $(3,5,1)$, $(5,0,5)$, $(2,5,6)$, $(5,5,6)$

b) $(0,0,0)$, $(0,4,0)$, $(-3,0,0)$, $(-1,1,5)$, $(-3,4,0)$, $(-1,5,5)$, $(-4,1,5)$, $(-4,5,5)$