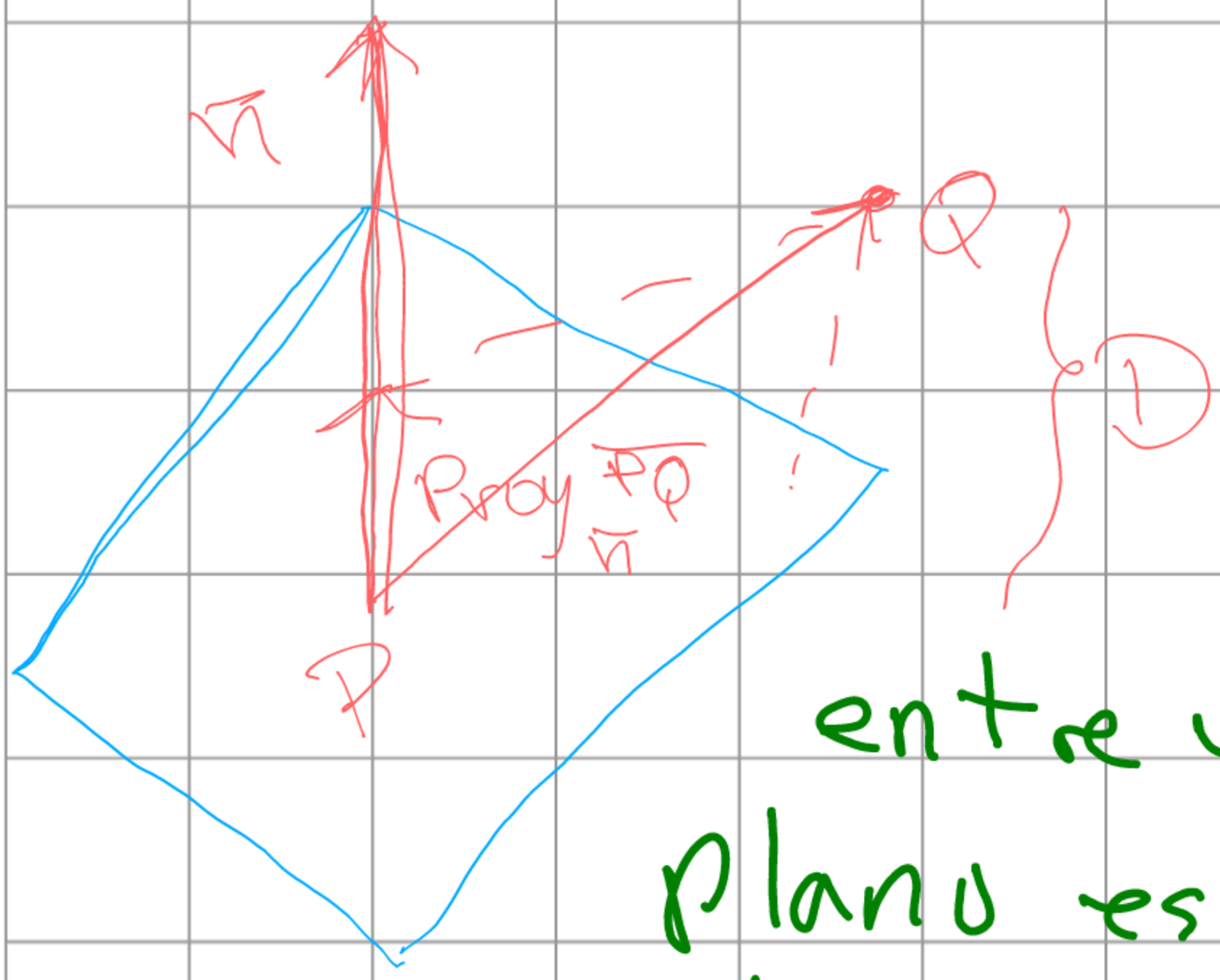
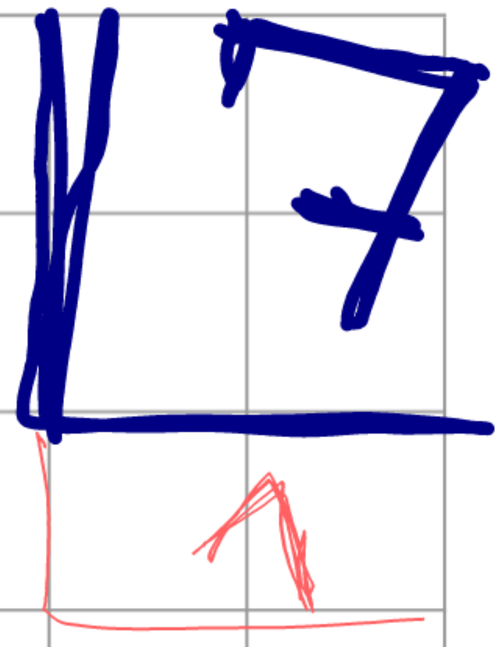
Distancias





La distancia D entre un punto Q y un plano es la longitud del segmento de recta más corto que conecte Q con el plano (como en la figura)

Para cualquier punto P en el plano, se puede encontrar esta distancia al proyectar el vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre la normal $\vec{n}$. La long. de esta proyección es la distancia buscada

Teo La distancia entre un plano y un pto Q (no en el plano) es

$$D = \| \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{PQ} \| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

donde P es un punto en el plano y $\vec{n}$ es normal al plano

Para encontrar un punto en el plano $ax+by+cz=0$, donde $a\neq 0$, sea $y=0$ y $z=0$. Entonces, $ax+d=0$ y concluimos que el punto $\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right)$ está en el plano.

Ej. Determine la distancia entre los puntos $Q(1,5,-4)$ y el plano $3x-y+2z=6$

Sol Sabemos que $\vec{n}=(3,-1,2)$ es normal al plano. Para encontrar un punto en el plano, hacemos $y=0=z$ y obtenemos el punto $P(2,0,0)$. El vector de P a Q es,

$$\overrightarrow{PQ}=(1-2,\ 5-0,\ -4-0)$$

$$=(-1,5,-4)$$

Usando la fórmula

$$D=\frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}=\frac{|(-1,5,-4)\cdot(3,-1,2)|}{\sqrt{9+1+4}}$$

$$= \frac{|-3-5-8|}{\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{14}}$$

Del teorema se puede determinar la distancia entre el punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ y el plano $ax+by+cz+d=0$ es

$$D = \frac{|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

o $$D = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Donde $P(x_1, y_1, z_1)$ es un punto en el plano y $d = -(ax_1+by_1+cz_1)$

Tenemos los planos paralelos $3x-y+2z-6=0$ y $6x-2y+4z+4=0$. Para determinar la distancia entre ellos, escogemos un punto

en el primer plano, como

$(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 0)$

Del segundo determinamos $a = 6, b = -2, c = 4$

y $d = 4$ para ambos que la distancia es,

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

La distancia entre un punto y una recta en el espacio se asemeja a la distancia entre un punto y un plano, excepto que se reemplaza el producto punto por la longitud del producto cruz y el vector normal $\vec{n}$ por un vector de dirección de la recta.

Teo La distancia entre un punto Q y una recta en el espacio es

$$D = \frac{\| \overline{PQ} \times \bar{u} \|}{\| \bar{u} \|}$$

donde $\bar{u}$ es un vector dirección fijo de la recta y P es un punto en la recta

Demo En la figura sea D la distancia entre Q y la recta. Entonces

$$D = \| \overline{PQ} \| \operatorname{Sen} \theta$$

donde θ es el ángulo entre $\bar{u}$ y $\overline{PQ}$

Así, $\| \bar{u} \| \, \| \overline{PQ} \| \operatorname{Sen} \theta = \| \bar{u} \times \overline{PQ} \|$

Por tanto,

$$D = \| \overline{PQ} \| \operatorname{Sen} \theta = \frac{\| \overline{PQ} \times \bar{u} \|}{\| \bar{u} \|}$$

Eje Encuentre la distancia entre el punto $Q(3,-1,4)$ y la recta

$$x = -2+3t \qquad y = -2t \qquad z = 1+4t$$

Sol. Sumar los números directores $3,-2,4$ un vector de dirección para la recta, $\bar{u} = (3,-2,4)$. Para determinar un punto en la recta, sea $t=0$ y obtenemos $P = (-2,0,1)$. Así;

$$\overline{PQ} = (3-(-2), -1-0, 4-1)$$

$$= (5,-1,3)$$

y el producto cruz

$$\overline{PQ} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$= (2,-11,7)$$

Usamos el teorema

$$D = \frac{\| \overline{PQ} \times \bar{u} \|}{\| \bar{u} \|} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6}$$

EJERCICIOS

17

1. Encuentre un conjunto de ecuaciones paramétricas y simétricas para la recta que pasa por el punto dado y es paralelo al vector o recta dada.

	Punto	Paralelo a
a)	$(0,0,0)$	$\vec{v} = (3,1,5)$
b)	$(0,0,0)$	$\vec{v} = (-2, 5/2, 7)$
c)	$(-2,0,3)$	$\vec{v} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$
d)	$(-3,0,2)$	$\vec{v} = 6\hat{j} + 3\hat{k}$
e)	$(1,0,1)$	$x = 3+3t,\ y = 5-2t$
		$z = -7 + t$

2. Escriba un conjunto de ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por los dos puntos

a) $(5,-3,-2)$, $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$

b) $(7, -2, 6)$, $(-3, 0, 6)$

c) $(0, 0, 25)$, $(10, 10, 0)$

3. Encuentre un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta mencionada.

a) La recta pasa por el punto $(2, 3, 4)$ y es paralela al plano XZ y al plano yz

b) La recta pasa por el punto $(-4, 5, 2)$ y es paralela al plano xy y al plano yz

c) La recta pasa por el punto $(2, 3, 4)$ y es perpendicular al plano dado por $3x + 2y - z = 6$

d) La recta pasa por el punto $(2, 1, 2)$ y es paralela a la recta $x = -t$, $y = 1 + t$, $z = -2 + t$

4. - Determine las coordenadas de un punto P en la recta y un vector $\vec{v}$ paralelo a la recta

a) $x = 3 - t,\ y = -1 + 2t,\ z = -2$ 19

b) $x = 4t,\ y = 5 - t,\ z = 4 + 3t$

c) $\frac{x+3}{5} = \frac{y}{8} = \frac{z-3}{6}$

5.- Determine si las rectas son paralelas, o idénticas

a) $x = 6 - 3t,\ y = -2 + 2t,\ z = 5 + 4t$

$x = 6t,\ y = 2 - 4t,\ z = 13 - 8t$

b) $x = 1 + 2t \quad y = -1 - t \quad z = 3t$

$x = 5 + 2t \quad y = 1 - t \quad z = 3t$

c) $\frac{x-8}{4} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+9}{3}$

$\frac{x+4}{-8} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+18}{-6}$

6. Establezca si las rectas se intersectan, de ser así, determine el punto de intersección y el ángulo entre las rectas.

a) $x = 4t + 2$, $y = 3$, $z = -t + 1$ 10

$x = 2s + 2$ $y = 2s + 3$ $z = s + 1$

b) $x = -3t + 1$ $y = 4t + 1$ $z = 2t + 4$

$x = 3s + 1$ $y = 2s + 4$ $z = -s + 1$

c) $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-2}{6} = z - 3$

$\frac{x-3}{2} = y + 5 = \frac{z+2}{4}$