# Aplicaciones lineales

10

1

Un morfismo (aplicación) entre módulos debe preservar las operaciones en el módulo, y cuando las preserva se le llama aplicación lineal o transformación lineal

**Def** Sean $M$ y $N$ $R$-módulos. Una función $f: M \to N$ es una aplicación $R$-lineal si

$$f(m+m') = f(m) + f(m') \quad \text{y} \quad f(rm) = rf(m)$$

para cada $r \in R$ y cualesquier $m, m' \in M$

Cuando $V, W$ son $F$-espacios vectoriales, y $T: V \to W$ es una aplicación lineal se acostumbra llamarla transformación lineal

Las aplicaciones lineales entre módulos se llaman también R-homomorfismos o simplemente homomorfismos.

<u>Lema</u> Sean $M, N$ R-módulos. La función $f: M \to N$ es un R-homomorfismo sii

$$f(rm + m') = rf(m) + f(m') \quad (*)$$

para cada $r \in R$ y cualesquier $m, m' \in M$.

<u>Demo</u> $\Rightarrow$) $(*)$ ocurre por definición de R-homomorfismo, pues debe respetar las operaciones.

$\Leftarrow$) Debemos verificar que $f$ respeta las operaciones de módulo: suma y producto por escalar.

$$f(m+m') = f(1 \cdot m + m') \overset{\text{Por } (*)}{=} 1 \cdot f(m) + f(m')$$

(usamos $r=1$) $\qquad = f(m) + f(m')$

$$f(rm) = f(rm + 0) = rf(m) + f(0) = rf(m)$$

porque $f(0)=0$ como a continuación se prueba. ///

Sin duda, ya tenemos
$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$
de modo que
$$f(a)=f(a+0)=f(a)+f(0)$$
así que $f(0)=f(a)-f(a)=0$

<u>Eje</u> Sean $M, N$ $R$-módulos. La aplicación cero o trivial es $0(m)=0_N$ para cualquier $m\in M$

Claramente es un homomorfismo, lo mismo que la aplicación identidad
$$1_M : M \to M.$$

<u>Def</u> Sea $f: M \to N$ un homomorfismo

$\mathrm{Im}(f)=\{f(m): m\in M\}=f[M]$

$\ker(f) = \{m \in M : f(m) = 0_N\}$

es el núcleo del homomorfismo $f$.

Note que $0 \in \ker(f)$.

<u>Def.</u> Sea $M$ un $R$-módulo. El subconjunto $N \subseteq M$ es un $R$-submódulo de $M$ cuando $N$ es $R$-módulo con las operaciones que hereda de $M$.

<u>Prop.</u> [Criterio para submódulos]

Sean $M$ un $R$-módulo y $N \subseteq M$. $N$ es un submódulo de $M$ sii se cumple lo siguiente

1) $N \neq \emptyset$

2) $x + ry \in N$ para cada $r \in R$ y cualesquier $x, y \in N$.

<u>Dem.</u> Si $N$ es submódulo de $M$

$0\in N$, así que $N\neq\emptyset$. Claramente $N$ es cerrado respecto a las operaciones de módulo, de modo que se cumple (2).

$\Leftarrow$) Supongamos que se cumple (1) + (2).

i) $N$ es subgrupo.

Sabemos que $N\neq\emptyset$; tomamos $x\in N$ y $r=-1$

$0=x-x\in N$

Si $x,y\in N$, $r=1$ $x+y\in N$

tomo $0=x$, $r=-1$, entonces $0+(-1)y\in N$

y $N$ contiene inversos aditivos.

Se sigue que $N$ es subgrupo

Sean $n\in N$ y $r\in R$

$0+rn\in N$

Así que $N$ es submódulo.

<u>Prop.</u> Sea $f:M\to N$ un $R$-homomorfismo

$Im(f)$ es submódulo de $M$ y $ker(f)$ es submódulo de $N$

<u>**Dem**</u> $f[M] = im(f)$ es submódulo de $N$. Sin duda, debemos verificar que si $x, y \in f[M]$, y $r \in R$, entonces $x + ry \in f[M]$, según la proposición anterior.

Como $x, y \in f[M]$, existen $a, b \in M$ tales que $x = f(a)$, $y = f(b)$.

Sea $r \in R$. Entonces $a + rb \in M$ y podemos aplicar $f$ a este elemento

$$f(a+rb) = f(a) + rf(b) \in f[M]$$
$$= x + ry$$

En cuanto a $\ker(f)$, usamos el criterio. En efecto, tomemos $x, y \in \ker(f)$ y $r \in R$.

Se sigue que $f(x) = 0 = f(y)$

$x+ry \in M$, así que
$$f(x+ry) = f(x) + rf(y)$$
$$= 0 + r0 \in \ker(f)$$
\#

**Lema** Sean $L, M, N$ $R$-módulos y $f: L \to M$, $g: M \to N$ $R$-homomorfismos. Entonces, $gf: L \to N$ es un $R$-homomorfismo.

**Dem** Ejercicio. \#

**Def** Un $R$-homomorfismo es un isomorfismo cuando es una biyección. Decimos que $M$ es isomorfo al $R$-módulo $N$, denotado $M \cong N$, cuando existe un isomorfismo de $M$ a $N$.

**Lema** Sea $f: M \to N$ un isomorfismo

18

entre los R-módulos M y N.

a) La inversa de f es un isomorfismo

b) Isomorfía es una relación de equivalencia.

<u>Demo</u> a) Tenemos $f: M \longrightarrow N$, $f^{-1}: N \longrightarrow M$. Ya sabemos que $f^{-1}$ es biyección, resta comprobar que respeta las operaciones de módulo

tomamos $x, y \in N$ $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(f(z)+f(u))$

pues $x = f(z)$, $y = f(u)$ para ciertos $z, u \in M$.

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(x+y) &= f^{-1}(f(z)+f(u)) \\
&= f^{-1}(f(z+u)) \\
&= z+u \\
&= f^{-1}(x) + f^{-1}(y)
\end{aligned}
$$

Algo similar ocurre con $f^{-1}(rx) = r f^{-1}(x)$

b) Supongamos que $M \sim N$ sii M y N son isomorfismo. Es claro que $M \sim M$ pues la identidad $1_M : M \to M$ es un isomorfismo.

Si $M \sim N$, $f : M \to N$ veíamos que $f^{-1} : N \to M$, de modo que $N \sim M$.

Si $M \sim N$, $N \sim L$, $f : M \to N$, $g : N \to L$, $h = g \circ f : M \to L$ es un isomorfismo $\#$

Que dos módulos $M, N$ sean isomorfismos nos indica que, a nivel de teoría de módulos, $M$ y $N$ son lo mismo

Prop. Sea $M$ un $R$-módulo y supongamos que $B$ es una base de $M$. Supongamos además que $f : M \to N$ es un isomorfismo. Entonces,

$f[B] = B'$ es una base para $N$, por lo que $N$ es libre.

~~Dem~~ Debemos comprobar que $B'$ genera a $N$ y es l.i.

Sea $n \in N$, entonces $n = f(m)$ para algún $m \in M$, y como $B$ es base de $M$,

$$m = r_1 b_1 + \cdots + r_s b_s \quad r_i \in R \quad b_i \in B$$

$$n = f(m) = f(r_1 b_1 + \cdots + r_s b_s)$$
$$= r_1 f(b_1) + \cdots + r_s f(b_s)$$

y como $f(b_i) \in B'$, concluimos.

$B'$ es l. i.: Sean $b_1', \ldots, b_n' \in B'$ $r_1, \ldots, r_n \in R$; escogemos $b_1, \ldots, b_n \in B$ con $b_i' = f(b_i)$

Ponemos $r_1 b_1' + \cdots + r_n b_n' = 0$

así que $f^{-1}(r_1 b_1' + \cdots + r_n b_n') = f^{-1}(0)$

$$r_1 f^{-1}(b_1') + \cdots + r_n f^{-1}(b_n') = 0$$
$$r_1 b_1 + \cdots + r_n b_n = 0$$

11

y como $B'$ es l.i, deducimos que
$$r_1 = 0 = r_2 = \cdots = r_n$$
Por consiguiente $B'$ es base de $N$. ///

---

<u>Teo</u> Sea $B$ una base del $R$-módulo libre. Por otro lado tenemos un $R$-módulo $N$. Para cada $u \in B$ asociamos un elemento $n_u \in N$. Entonces, existe un $R$-homomorfismo de $M$ en $N$ que aplica cada $u \in B$ en $n_u$.
Además, este morfismo es único.

<u>Dem</u> Definimos $f : M \to N$, de la siguiente manera: para cada $m \in M$ existe una representación única en términos de los elementos de $B$, digamos

$$m = a_1 u_1 + \cdots + a_s u_s$$

$a_j \in R$, $u_j \in B$

Establecemos $f(m) = a_1 n_{u_1} + \cdots + a_s n_{u_s}$

Resta verificar que $f$ es un $R$-homomorfismo

Sean $m, m' \in M$ y $r \in R$

Podemos expresar $m, m'$ como sigue:

$$m = a_1 u_1 + \cdots + a_s u_s$$

$$m' = a_1' u_1 + \cdots + a_s' u_s$$

donde hemos usado los mismos elementos $u_j$ de la base $B$ porque la representación de $m, m'$ involucra una cantidad finita de elementos de $B$ y podemos reunirlos y usar coeficientes $a_i, a_j'$ igual a cero en caso de necesidad.

En consecuencia,

$$f(rm+m') = f((ra_1+a_1')u_1 + \cdots + (ra_s+a_s')u_s)$$

$$= (ra_1+a_1')n_{u_1} + \cdots + (ra_s+a_s')n_{u_s}$$

$$= \sum_{j=1}^{s} ra_j n_{u_j} + \sum_{j=1}^{s} a_j' n_{u_j}$$

$$= r\sum_{j=1}^{s} a_j n_{u_j} + \sum_{j=1}^{s} a_j' n_{u_j}$$

$$= rf(m) + f(m')$$

Respecto a la unicidad, supongamos que $g: M \to N$ es un R-homomorfismo con $g(u) = n_u$ para cada $u \in B$.

Debemos cerciorarnos de que $g = f$ para lo cual basta verificar que $g(m) = f(m)$ para todo $m \in M$. Sea $m \in M$ y lo representamos como elementos de la base

$$m = a_1u_1 + \cdots + a_su_s$$

$$
\begin{aligned}
g(m) &= a_1 g(u_1) + \cdots + a_s g(u_s) \\
&= a_1 n_{u_1} + \cdots + a_s n_{u_s} \\
&= a_1 f(u_1) + \cdots + a_s f(u_s) \\
&= f(a_1 u_1 + \cdots + a_s u_s) \\
&= f(m).
\end{aligned}
$$

///

Esta es una de las propiedades más importantes, se llama la propiedad universal de los módulos libres

<u>Cor</u> Sean $M, N$ $R$-módulos libres con bases $B, C$, respectivamente. Si $|B| = |C|$, entonces $M \cong N$.

<u>Dem</u> Sea $\varphi$ una biyección de $B$ a $C$. Por el teorema, extendemos $\varphi$ a un $R$-homomorfismo $f : M \to N$. En forma

existe un $R$-homomorfismo $g: N \to M$ que extiende a $\varphi^{-1}$. Note que $gf$ aplica cualquier elemento de $B$ en sí mismo. La identidad $1_M$ también aplica cada elemento de $B$ en sí mismo. Por la unicidad del teorema, $gf = 1_M$; en forma similar $fg = 1_N$. De modo que $f$ es un isomorfismo //

__Coro__ Dos espacios vectoriales sobre el mismo campo $F$ son isomorfos sii tienen la misma dimensión (en términos de cardinalidad de una base). En particular, $V \cong F^n$ si $V$ es un espacio $F$-vectorial de dimensión $n$.

__Dem__ Sean $V, W$ $F$-espacios vectoriales

de la misma dimensión.
En tal caso tienen bases $B, C$ respectivamente del mismo tamaño y obtienen la isomorfía del caso previo.
Si tenemos un isomorfismo $f: V \to W$ y $B$ es una base para $V$, $f[B]$ es una base para $W$, como antes vimos. La restricción $f|B : B \to f[B]$ es una biyección, por lo que $\dim(V) = \dim(W)$.
La última afirmación se desprende del hecho de que $\dim_F F^n = n$.

$\#$

Ej Sea $B$ una base del $R$-módulo $M$, digamos $B = \{u_1, \dots, u_n\}$. El isomorfismo de $M$ a $R^n$ que toma $u_i$ en $e_i$ da lugar a la correspondencia entre $m = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$

y $a_1e_1 + \cdots + a_ne_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en $\mathbb{R}^n$

Eje Sea $S = \{1, 2, 3\}$ y considere el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^S$ con su base estándar $\{x_1, x_2, x_3\}$. Por ejemplo la función $f(1) = 2$ $f(2) = -3$ $f(3) = \sqrt{2}$ se puede expresar como $2x_1 - 3x_2 + \sqrt{2}x_3$ de modo que $f$ corresponde a $(2, -3, \sqrt{2})$ en $\mathbb{R}^3$.

# EJERCICIOS

1. Sean $L, M, N$ $R$-módulos. Muestre que $M \oplus N \cong N \oplus M$ y que $(L \oplus M) \oplus N \cong L \oplus (M \oplus N)$.
2. Sean $M, R$ $R$-módulos libres, con $B$ una base para $M$. Confirme que $f: M \to N$ es un isomorfismo sii $f[B]$ es una base

para N.

3. Sean $M, N$ $R$-módulos. Mediante $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ se denota al conjunto de $R$-homomorfismos de $M$ a $N$.

a) Sean $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ y $a, b \in R$. Verifique que la función $h: M \to N$ definida mediante $h(m) = af(m) + bg(m)$ es un $R$-homomorfismo; esto se escribe $h = af + bg$.

De suerte que existe una suma natural y un producto escalar en $\mathrm{Hom}_R(M,N)$

c) Compruebe que $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ es un $R$-módulo.

4. Sean $M, N, M', N'$ $R$-módulos tales que $M \cong N'$ y $N \cong N'$. Constate que $\mathrm{Hom}_R(M,N) \cong \mathrm{Hom}_R(M',N')$

5. Sean $B, C$ bases para los $R$-módulos $M, N$, respectivamente.

Digamos que indizamos a $B, C$

$B = \{u_i : i \in I\}$

$C = \{v_j : j \in J\}$

Para $s \in I$, y $t \in J$ defina

$$f_{st}(u_i) = \begin{cases} v_t & i = s \\ 0 & i \in I - \{s\}. \end{cases}$$

a) Convénzase de que

$D = \{f_{st} \in Hom_R(M, N) : s \in I, t \in J\}$

es linealmente independiente

b) Muestre que $D$ genera a $Hom_R(M, N)$ cuando $M$ es libre de rango finito

c) ¿$D$ genera $Hom_R(M, N)$ cuando $N$ es libre de rango finito?

d) Cuando $M, N$ son libres de rango finito

Pruebe que $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ es libre de rango finito y determine su rango.

6. Sean $V, W$ F-espacios vectoriales de dimensión finita. Deduzca la dimensión de $\mathrm{Hom}_F(V,W)$.

7. Sean $L, M$ R-módulos y $N$ un submódulo de $L$. Ponemos

$$\mathcal{U} = \{f \in \mathrm{Hom}_R(L,M) : f(n) = 0\ \forall n \in N\}$$

Demuestre que $\mathcal{U}$ es un submódulo de $\mathrm{Hom}_R(L,M)$.

8. Sean $L, M, N$ R-módulos.

a) ¿Es verdad que $\mathrm{Hom}_R(L \oplus M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(L,N) \oplus \mathrm{Hom}_R(M,N)$?

b) ¿Es cierto que $\mathrm{Hom}_R(L, M \oplus N) \cong \mathrm{Hom}_R(L,M) \oplus \mathrm{Hom}_R(L,N)$?

9. Sean $U, V$ y $W$ F-espacios vectoriales,

a) ¿Se cumple que
$$\mathrm{Hom}_R(U \oplus V, W) \cong \mathrm{Hom}_F(U, W) \oplus \mathrm{Hom}_F(V, W) ?$$

b) ¿Es verdad que
$$\mathrm{Hom}_F(U, V \oplus W) \cong \mathrm{Hom}_F(U, V) \oplus \mathrm{Hom}_F(U, W) ?$$

10. Sea $M$ un $R$-módulo. Muestra que $\mathrm{Hom}_R(M, M)$ es un anillo (usualmente no conmutativo) donde el producto está dado por
$$(fg)(m) = (f \circ g)(m)$$
para $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, M)$

11. Sea $V$ un $F$-espacio vectorial $\mathrm{Hom}_F(V, F)$ se conoce como el espacio dual de $V$. Cualquier elemento en $\mathrm{Hom}_F(V, F)$ es una funcional lineal en $V$. En general

Si $M$ es un $R$-módulo, $Hom_R(M,R)$ se llama el módulo dual. El espacio dual y el módulo dual se denotan usualmente por $V^*$ y $M^*$, respectivamente.

Sea $M$ un $R$-módulo libre de rango finito con base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$. Demuestre que $B$ da lugar a una base $B' = \{f_1, \dots, f_n\}$ en $M^*$, dada

$$f_j(u_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$B'$ es la base dual.

12. Suponga que tenemos un producto interno $(-,-)$ en $\mathbb{R}^n$ y sea $v_0 \in \mathbb{R}^n$. Muestre que $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(w) = (v_0, w)$ es una funcional lineal en $\mathbb{R}^n$ visto como $\mathbb{R}$-espacio vectorial

13.- Sea $(-,-)$ el producto interno estándar en $\mathbb{R}^3$ respecto a la base estándar $\{e_1, e_2, e_3\}$. Considere $f = ((1,2,3), -) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Exprese $f$ como una combinación lineal de elementos en la base dual de $\{e_1, e_2, e_3\}$

14. Sea $V$ un F-espacio vectorial con base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Para cualquier $(a_1, \dots, a_n) \in F^n$, verifique que existe una única función lineal $f$ en $V$ tal que $f(v_i) = a_i$.

15. Sean $u, v$ vectores distintos en el espacio vectorial de dimensión finita $V$. Cerciórese de que existe un funcional lineal $f$ en $V$ tal que $f(u) \neq f(v)$.