Rango y nulidad

12

1

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal entre dos $\mathbb{F}$-espacios vectoriales. La dimensión de $Im(T)$ es llamada el rango de T y se denota $\rho(T)$. $\ker(T)$ se conoce como el espacio nulo de T. La dimensión de $\ker(T)$ se conoce como la nulidad de T y se denota $\mu(T)$.

Suponga que nos dan la T mencionada. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Entonces,

$$Im(T) = \langle \{T(v_1), \dots, T(v_n)\} \rangle$$

Podemos reducir este conjunto generador a una base para $Im(T)$ y obtener el rango de T.

<u>Prop.</u> Sea $T: V \to W$ una transformación lineal entre dos $\mathbb{F}$-espacios vectoriales. Entonces,

$$\rho(T) + \mu(T) = \dim(V).$$

<u>Dem.</u> Usamos el primer teorema de isomorfismo, obtenemos

12

$$\operatorname{Im}(T) \cong V/\ker(T)$$

Por consiguiente,

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim \frac{V}{\ker T}$$
$$= \mu(T) + \dim(\operatorname{Im}(T))$$
$$= \mu(T) + \rho(T)$$

Supongamos que tenemos un sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$(1) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

sobre el anillo R. Para resolver este sistema considere el R-homomorfismo

$$f: R^n \to R^m$$
$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \left(\textstyle\sum_j a_{1j}\alpha_j, \dots, \sum_j a_{mj}\alpha_j\right) \quad (2)$$

La solución de (1) es $\ker(T)$, un submódulo de R^n. Cuando $R = F$ es un campo la situación se simplifica y se estudia en el kinder.

Eje Encuentre la dimensión del espacio solución del sistema

$$3x + 4y - 2z = 0, \quad 2x - 2y + 3z = 0$$

en $\mathbb{Q}$

<u>Sol</u> La dimensión del espacio solución es la nulidad de la transformación lineal

$$T: \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^2$$

$$T(x,y,z) = (3x+4y-2z,\ 2x-2y+3z)$$

Usamos la base estándar $\{e_1, e_2, e_3\}$ para determinar $\rho(T)$. Ocurre que

$$\begin{aligned} Im(T) &= \langle \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\} \rangle \\ &= \langle \{(3,2), (4,-2), (-2,3)\} \rangle \\ &= \mathbb{Q}^2 \end{aligned}$$

Así, $\mu(T) = 3 - \rho(T) = 3 - 2 = 1$

Regresemos al problema de resolver un sistema de ecuaciones

$$(3) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

sobre $\mathbb{R}$. Primero encontramos una solución particular $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ para (3) si es consistente.

Sea T la transformación lineal dada en (2), y se afirma que el conjunto solución es $c+\ker(T)$. Sea $v\in \ker(T)$. En consecuencia

$$T(c+v)=T(c)+T(v)=T(c)=b$$
$$=(b_1,\dots,b_m)$$

Por tanto, $c+v$ es solución de (3).
Para la recíproca, si c' es solución de (3) ocurre que

$$T(c'-c)=T(c')-T(c)$$
$$=b-b$$
$$=0.$$

Se sigue que $c'-c\in \ker(T)$ y $c'=c+(c'-c)\in c+\ker(T)$ y se corrobora nuestra afirmación.

EJERCICIOS

1. Sean M un R-módulo y $N\subseteq K$ un submódulo de M. Muestre que K/N es un submódulo de M/N
2. Sean M, N R-submódulos y $f:M\to N$ un R-homomorfismo. Constate que

$$\operatorname{Im}(f)=\langle f(m_1), f(m_2),\dots, f(m_s)\rangle$$

3. Sean M, N submódulos de L

a) Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes

i) $L = M + N$ y $M \cap N = \{0\}$

ii) $L = M + N$ y M, N son independientes

iii) todo elemento en L se puede escribir en la forma $l = m + n$, $m \in M$, $n \in N$ en forma única.

b) Suponga que M, N satisfacen una de las condiciones (i)–(iii). Corrobore que la función

$$f: M \oplus N \to L$$
$$f(m,n) = m+n$$

es un isomorfismo.

Esto es, si tenemos un trío (L, M, N) que satisface una de las condiciones en (a), decimos que L es la suma directa interna de M y N, lo que se denota $L = M \oplus N$.

4. Sean $M_1, M_2, \dots, M_n$ submódulos del R-módulo L, y suponga que se cumplen las condiciones siguientes.

a) $L = M_1 + \cdots + M_n$

b) Los M_i satisfacen la condición triangular

$M_1 \cap M_2 = \{0\}$

$(M_1 + M_2) \cap M_3 = (0)$

$(M_1 + M_2 + \cdots + M_{n-1}) \cap M_n = (0)$

Cerciórese de que la suma directa interna

$M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, y que L es isomorfo

a la suma directa externa

$M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$

6.- Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de F^n sobre F.

Confirme que

$$V \cong Fv_1 \oplus \cdots \oplus Fv_n$$
$$\cong F^n$$

7.- ¿En cuáles de los casos siguientes se cumple que $\mathbb{C}^4 = \langle\{x, y\}\rangle \oplus \langle\{u, v\}\rangle$?

a) $x = (1,1,0,0)$, $y = (1,0,1,0)$, $u = (0,1,0,1)$
$v = (0,0,1,1)$

b) $x = (-1,1,1,0)$, $y = (0,-1,1,1)$ $u = (1,0,0,0)$
$v = (0,0,0,1)$

c) $x = (1,0,0,1)$, $y = (0,1,1,0)$ $u = (1,0,1,0)$
$v = (0,1,0,1)$

8. Sean U, V, W, X F-espacios vectoriales de dimensión finita, $T: V \to W$, $T_1: U \to V$, $T_2: W \to X$ transformaciones lineales

a) Confirme que $\rho(TT_1) \leq \rho(T)$ y $\rho(T_2T) \leq \rho(T)$

b) Verifique $\rho(T_1T) = \rho(T)$ si T_1 es un isomorfismo

c) Corrobore que $\rho(T_2T) = \rho(T)$ si T_2 es un isomorfismo

9. Sea I un conjunto arbitrario (posiblemente infinito) que usamos como conjunto de índices. Sean N un R-módulo y $\{M_i : i \in I\}$ una familia de R-módulos

a) Muestre que $\bigoplus_{i \in I} M_i$ está generado por el conjunto de elementos con sólo una coordenada distinta de cero

b) Supongamos que $f_i : M_i \to N$ es un R-homomorfismo para cada $i \in I$. Sea $(m_i : i \in I) \in \bigoplus_{i \in I} M_i$. La notación $\sum_{i \in I} f_i(m_i)$ tiene sentido ya que $f_i(m_i) = 0$

excepto por una cantidad finita de $i \in I$. Demuestre que la aplicación f de $\bigoplus_{i \in I} M_i$ a N, que toma $(m_i : i \in I)$ y lo aplica en $\sum_i f_i(m_i)$ es un R-homomorfismo.

Una matriz $n \times 1$ se llama un n-vector columna. Una matriz $1 \times n$ es un n-vector renglón. Sea M un R-módulo libre con $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base. En lo sucesivo, es importante el orden de los elementos de la base. Usamos $\beta = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ para denotar una base ordenada de M. Para $x = \sum_{j=1}^{n} b_j u_j \in M$, decimos que $(b_1, \dots, b_n)$ las coordenadas de x con respecto a la base ordenada β, y este vector renglón se denota $x_\beta^{(r)}$. Por otra parte, usamos $x_\beta^{(c)}$ para denotar al vector columna consistente en las coordenadas de x con respecto a β. Para ser precisos.

$$X_\beta^{col} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \quad \text{cuando } x = \sum_{j=1}^{n} b_j u_j$$

<u>Def</u> Sea R un anillo, $A=(a_{ij})_{l\times m}$ y $(b_{ij})_{m\times n}$ matrices sobre R. Definimos el producto de A por B como

$$AB = (c_{ij})_{l\times n}, \text{ donde } c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

<u>Lema</u> Sea R un anillo. Las siguientes identidades se cumplen

(i) $(A_{l\times m} B_{m\times n}) C_{n\times p} = A_{lm} (B_{m\times n} C_{n\times p})$

ii) $(A_{l\times m} + B_{l\times m}) C_{m\times n} = A_{l\times m} C_{m\times n} + B_{l\times m} C_{m\times n}$

iii) $A_{l\times m}(B_{m\times n} + C_{m\times n}) = A_{l\times m} B_{m\times n} + A_{l\times m} C_{m\times n}$

<u>Dem</u> Ejercicio ⨳

Sean M, N R-módulos de rango finito, $\beta = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\beta' = (v_1, \ldots, v_m)$ bases ordenadas para M, N respectivamente. Un R-homomorfismo de M a N está

está completamente determinado por las imágenes $f(u_1), \dots, f(u_n)$. Sea

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \qquad j = 1, \dots, n$$

Si x es un elemento de U tal que $x = \sum_{j=1}^{n} b_j u_j$ entonces,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j f(u_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(b_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j \right) v_i$$

Si $f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i v_i$, entonces $c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j$.

Esto se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

La matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ se llama la matriz que representa f con respecto a las bases β, β' en notación columna. Observe que $f(x)_{\beta'}^{col} = A x_{\beta}^{col}$, donde

$$A = \left(f(u_1)_{\beta'}^{col}, \dots, f(u_n)_{\beta'}^{col} \right).$$

11

Podemos identificar x con X_β^{col} vía el isomorfismo que u_i de M a e_i de R^m

Es factible tratar un módulo libre como M como R^m y N como R^n

Obviamente, se puede elegir usar matrices para representar R-homomorfismos en notación renglón. Usamos A^{tr} para denotar la transpuesta de A dada por

$$A^{tr} = (b_{ij})_{n\times m}, \text{ donde } b_{ij} = a_{ji}$$

En notación renglón

$$X_\beta^{rg} = (b_1, \ldots, b_n) \quad y \quad f(x)_{\beta'}^{rg} = (c_1, \ldots, c_m)$$

Note que A^{tr} es la matriz que representa a f con respecto a las bases β y β' en notación β'. Se cumple que

$$f(x)_{\beta'}^{rg} = X_\beta^{rg} A^{tr}, \text{ donde } A^{tr} = \begin{pmatrix} f(u_1)_{\beta'}^{rg} \\ \vdots \\ f(u_n)_{\beta'}^{rg} \end{pmatrix}$$

para cualquier x en M.

Para usar la notación columna o renglón es sólo cuestión de gusto. En lo sucesivo usamos notación columna.

Def. La matriz identidad I_n en $M_n(R)$

es aquella matriz de $n \times n$ que tiene 1 en la diagonal y 0 en el resto. 12

$I_n = (\delta_{ij})_{n \times n}$ donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ en otro caso.

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es invertible si existe una (única) matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AB = BA = I_n$. Decimos que B es la matriz inversa de A y escribimos $B = A^{-1}$

1) Sea $AB = BA = I$. Supongamos que C es otra matriz tal que

$$AC = CA = I$$

Entonces, $C = IC = (BA)C = B(AC)$

$$= BI = B$$

de suerte que la inversa es única y tiene sentido escribir A por A^{-1}

2) Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$

Ya que el producto de matrices es no conmutativo en general, debemos tener en cuenta que $AB = I_n$ no necesariamente implica que $BA = I_n$. Sin embargo, cuando A es una matriz cuadrada sobre un anillo conmutativo, la situación es diferente, como después veremos.

Lema Sean A, B matrices invertibles en $M_n(R)$. Se cumplen las siguientes afirmaciones.

a) La matriz identidad es invertible y $I_n^{-1} = I_n$

b) La matriz A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$

c) La matriz AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Prop. Sean M, N, P R-módulos libres con bases ordenadas finitas β, β', β''

a) La matriz que representa al R-homomorfismo $h: M \to M$ con respecto a β es la matriz identidad de tamaño $|\beta|$ si: $h = 1_M$.

b) Sean $f: M \to N$ y $g: N \to P$ R-homomorfismos. Supongan que A es la matriz que representa a f con respecto a β, β' y B es la matriz que representa a g respecto a β', β''. La que representa a gf con respecto a β, β'' es BA.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f", "A"'] \arrow[rr, bend left, "gf", "BA"'] & N \arrow[r, "g", "B"'] & P
\end{tikzcd}$$

$$\beta \qquad\qquad \beta' \qquad\qquad \beta''$$

c) Supongo que $|\beta| = |\beta'| < \infty$. Entonces, f es un isomorfismo sii A es una matriz invertible. En este caso, A^{-1} es la matriz que representa a f^{-1} respecto a β', β.

<u>Demo</u> Pues

$$\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$
$$\beta' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$$
$$\beta'' = \{w_1, w_2, \dots, w_\ell\}$$

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \quad y \quad B = (b_{ij})_{\ell\times m}$$

a) es trivial

b) Por hipótesis,

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

$$g(v_j) = \sum_{i=1}^{\ell} b_{ij} w_i \qquad j = 1, 2, \dots, m$$

Esto implica

$$gf(u_j) = g\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} v_k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\, g(v_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \left[a_{kj}\left(\sum_{i=1} b_{ik} w_i\right)\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} b_{ik}\right) w_i$$

Para $j = 1, 2, \ldots, n$. Así, la matriz que representa a gf respecto β y β'' es $C = (c_{ij})_{\ell \times n}$ donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}$

En consecuencia,

$C = BA$ por definición.

c) Supongo que $|\beta| = |\beta'| = n$.

Supongamos que f es un isomorfismo y sea D la matriz que representa a f^{-1} con respecto a β', β. Como $f^{-1}f = 1_M$, se cumple que $DA = I_n$ por (a) y (b). En forma similar, ocurre que $AD = I_n$ pues $ff^{-1} = 1_N$. Por tanto, A es invertible y $D = A^{-1}$

Para la recíproca, sea $g: N \to M$ un R-homomorfismo representado por A^{-1} con respecto a β', β. Por (b), la matriz que representa a gf con respecto a β, β es $A^{-1}A = I_n$. De (a) obtenemos que $gf = 1_M$. En forma análoga, se cumple que $fg = 1_N$. Así, f es un isomorfismo y $g = f^{-1}$. ///

Def. La matriz que representa a 1_M respecto a β, β' se llama la base de cambio de β a β'

Coro Sea M un R-módulo de rango finito. Cualquier matriz cambio de base para M es invertible.

Dem El resultado se sigue de la Prop. previa (c) pues 1_M es un isomorfismo de M en M. De hecho

La matriz cambio de base de β' en β es la inversa de la matriz cambio de base de β a β'. ##

<u>Eje</u> Sea α la base ordenada estándar para $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ y

$$\beta = (f_1 = (1,0,0), f_2 = (1,1,0), f_3 = (1,1,1))$$

a) Verifique que β es también una base para $\mathbb{R}^3$

b) Encuentre las matrices cambio de base

(i) de β a α

ii) de α a β

c) Exprese $(4,-5,36) \in \mathbb{R}^3$ como una combinación lineal de elementos de β.

<u>Sol.</u> a) Note que

(1) $e_1 = f_1$, $e_2 = f_2 - f_1$ $e_3 = f_3 - f_2$

lo que muestra que β genera $\mathbb{R}^3$.

Sea $af_1 + bf_2 + cf_3 = (0,0,0)$

donde, $a,b,c \in \mathbb{R}$. Esto propicia un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a+b+c&=0 \\ b+c&=0 \\ c&=0 \end{aligned}$$

18

Se verifica que la única solución es la trivial, por lo que β es l.i.

Así, β es base

b) i) Note que

$$1_{\mathbb{R}^3}(f_1)=f_1=e_1$$
$$1_{\mathbb{R}^3}(f_2)=f_2=e_1+e_2$$
$$1_{\mathbb{R}^3}(f_3)=f_3=e_1+e_2+e_3$$

La matriz cambio de base de β a α es

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Note que
$$1_{\mathbb{R}^3}(e_1)=e_1=f_1$$
$$1_{\mathbb{R}^3}(e_2)=e_2=-f_1+f_2$$
$$1_{\mathbb{R}^3}(e_3)=e_3=-f_2+f_3$$

La matriz cambio de base de α a β

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que el inverso de $1_{\mathbb{R}^3}$ es $1_{\mathbb{R}^3}$.
De la proposición (c) sabemos que A y B deben ser inversas mutuamente.

c) La coordenada $(4,5,36)$ con

respecto a α es $(4,-5,36)$
Podemos aplicar la matriz cambio de base B de α a β para determinar las coordenadas de $(4,-5,36)$ con respecto a β

$$B\begin{pmatrix}4\\-5\\36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-5\\36\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}9\\-41\\36\end{pmatrix}$$

Esto es, $(4,-5,36)=9f_1-41f_2+36f_3$. $\square$

<u>Cor</u> Sean M,N R-módulos libres de rango finito, f un R-homomorfismo de M a N. Supongan que β,β' son bases ordenadas para M, γ,γ' para N. Sea A la matriz por f con respecto a β y γ. Sea P la matriz cambio de base de β' a β y Q de γ' a γ. La matriz para f respecto a β' y γ' es $Q^{-1}AP$.

En la práctica, usualmente se escogen β y γ como las bases estándar de tal forma que las matrices cambio de base P, Q sean fáciles de calcular.

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow[P]{1_M} & M & \xrightarrow[A]{f} & N & \xrightarrow[Q^{-1}]{1_N} & N \\ & \text{cambio de base} & & & & \text{cambio de base} & \\ \beta' & & \beta & & \gamma & & \gamma' \end{array}$$

Dem D la proposición (b), $Q^{-1}AP$ es la matriz que representa a

$$f = 1_N \circ f \circ 1_M \qquad \#\#\#$$

Def

Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Decimos que A es equivalente a B cuando existen matrices invertibles P y Q tales que $B = Q^{-1}AP$

Una matriz $m\times n$ A sobre el campo F puede verse como

$$(\bar{c}_1\ \bar{c}_2\ \cdots\ \bar{c}_n)_{m\times n}$$

donde los $\bar{c}_j$ son m-vectores columna. El subespacio generado por $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n$ se llama el espacio columna de A.

que es un subespacio de F^m.
La dimensión del espacio columna de A se llama el rango columna de A y se denota colrango(A). Algo similar ocurre con los renglones.

Def. Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita. Si A es una de las matrices representando la transformación lineal $T: V \to W$ en notación columna, entonces $rk(T) = Colrk(A)$.

Dem. Sea $A = (a_{ij})_{m \times n}$ la matriz que representa a T respecto a las bases ordenadas β, γ, $\beta = (v_1, \dots, v_n)$, $\gamma = (w_1, w_2, \dots, w_m)$. Sea $U: W \to F^m$ la transformación lineal que aplica w_i a e_i. Se verifica que U es un isomorfismo. Note que

$$
\begin{aligned}
(UT)(v_j) &= U(T(v_j)) \\
&= U\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = T(u_j)_{\gamma}^{col}$$

si suponemos que los elementos en F^m son vectores columna. En consecuencia la imagen de U_T es el espacio columna de A. Ocurre que $\mathrm{colrk}(A) = \mathrm{rk}(U_T) = \mathrm{rk}\, T$. ///

EJERCICIOS

1. Muestre que $M_n(R)$ es un anillo
2. Sea $A \in M_n(R)$ tal que $A = P_1 P_2 \cdots P_n$ donde los P_i son matrices invertibles en $M_n(R)$. Muestre que A es invertible en $M_n(R)$ y que $A^{-1} = P_n^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1}$
3. Sea $\beta = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ una base ordenada para un R-módulo M de rango finito. Sea $P = (p_{ij})_{n\times n}$ una matriz invertible y
$$v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} u_i \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Pruebe que $\beta' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ es una base ordenada para M y que la matriz cambio de base de β' a β es P.

4. ¿es la aplicación conjugación $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un $\mathbb{C}$-transformación lineal? Si es así, encuentre la matriz que representa a f con respecto a $\{1\}$ y $\{1\}$. ¿es f un $\mathbb{R}$-transformación lineal? Si es así, determine la matriz que representa a f respecto a $(1, i)$, $(i, 1)$.

5. Sea $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ y T una aplicación de $M_2(\mathbb{R})$ en sí mismo que aplica X en PX. Corroborar que T es un $\mathbb{R}$-homomorfismo y determine la matriz que representa a T respecto a $\alpha = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$ y α.

6. Determine matrices A, B sobre $\mathbb{Z}$ tales que AB es la identidad, pero BA no lo es.

7. Sean M, N R-módulos con base de tamaño n y m, respectivamente. Verifique que

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \cong M_{m \times n}(R)$$

8. Sea $f: M_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n\times m}(\mathbb{R})$ la aplicación que aplica A en A^{tr}.
¿Es f un $\mathbb{R}$-homomorfismo? Si lo es, encuentre una matriz que representa a f con respecto a $\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23}\}$ y $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}, e_{31}, e_{32}\}$ cuando $m=2$ y $n=3$.

9. Sean $\{x_1, \dots, x_k\}$ y $\{y_1, \dots, y_k\}$ conjuntos l.i. en un espacio vectorial de dimensión n V sobre el cuerpo F. Sean β una base ordenada para V y $v_i = (x_i)_\beta^{col}$, $w_i = (y_i)_\beta^{col}$, respectivamente.

a) Muestre que $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ y $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ son l.i. en F^n

b) Confirme que existe una matriz cuadrada invertible A con $Av_i = w_i$ $i=1,\dots k$.

10. Sean $A \in M_{m\times n}(F)$, D, E matrices invertibles de tamaño m y n, respectivamente. Constate que $\operatorname{colrk}(DA) = \operatorname{colrk}(A) = \operatorname{colrk}(AE)$.