Determinantes

El grupo simétrico S_n

Este grupo consiste en los biyecciones

$$f:\{1,\dots,n\}\longleftrightarrow\{1,\dots,n\}$$

Las biyecciones se conocen también como permutaciones. Por ejemplo $\sigma\in S_5$

$$\sigma(1)=3,\ \sigma(2)=4,\ \sigma(3)=1,\ \sigma(4)=5,\ \sigma(5)=2$$

Se expresa como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

El primer renglón no tiene que seguir un orden,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Otra forma de representar los elementos de S_n se conoce como ciclo. Un r-ciclo

es una serie de r elementos en
$S=\{1,\dots,n\}$
de la forma $\gamma=(n_1 n_2 n_3 \cdots n_r)$
donde los números $n_1, n_2, \dots, n_r$
deben ser distintos entre sí.
El ciclo γ expresa la permutación

$$n_1 \stackrel{\gamma}{\longmapsto} n_2 \stackrel{\gamma}{\longmapsto} n_3 \stackrel{\gamma}{\longmapsto} \dots \stackrel{\gamma}{\longmapsto} n_r \stackrel{\gamma}{\longmapsto} n_1$$

mientras que $\gamma(n)=n$ para $n \notin \{n_1, \dots, n_r\}$
El ciclo $(n_2 n_3 n_4 \cdots n_r n_1)$ expresa la
misma permutación que el ciclo $(n_1 n_2 \cdots n_r)$
Existen r formas diferentes de expresar el
mismo ciclo.
Un 1-ciclo es simplemente la aplicación
identidad en S; se escribe también 1
El producto de dos ciclos es la composición
de dos permutaciones. Una permutación

arbitraria se expresa como el producto de varios ciclos. Por ejemplo, sea $\sigma = (1\,2\,3)(3\,4)(5)(1\,5\,3) \in S_5$

El 1-ciclo (5) es redundante y tales ciclos se omiten usualmente.

$\sigma : \{1,2,3,4,5\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5\}$

σ la podemos visualizar como sigue:

Componer los ciclos de derecha a izquierda

$$\underset{(1\,5\,3)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}} \underset{(5)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}} \underset{(3,4)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{(1\,2\,3)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}$$

El resultado es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

donde empezamos con el 1 en el primer ciclo $(1\,5\,3)$ leemos 5 pasamos al segundo ciclo (5), leemos 5, pasamos al 3^{er} ciclo $(3\,4)$

leemos 5, cuarto ciclo leemos 5 así $\sigma(1)=5$. El resto de valores se obtiene en forma similar.

Concluir que podemos escribir también

$\sigma=(1\ 5\ 4)(2\ 3)$

Def: Decimos que dos ciclos son ajenos cuando no tienen entradas en común.

Note que dos ciclos ajenos necesariamente conmutan.

Teo: Cualquier permutación en S_n se puede expresar como producto de ciclos ajenos. El producto es único si no tenemos en cuenta 1-ciclos y expresiones diferentes en cada ciclo, aunado al orden de los ciclos que aparecen.

Dem: Buscar la prueba en cualquier libro de teoría de grupos

<u>Ej.</u> Sea $\sigma = (1\,3\,5)(2\,4) = (1\,3\,5)(6)(2\,4)$
$= (4\,2)(5\,1\,3)$
una permutación en S_6. Las 3 expresiones son lo mismo.

Un problema con la notación de ciclos es que no queda claro en que S_n estamos. Por ejemplo $(1\,2\,3)$ puede estar en cualquier S_n para $n \geq 3$.

<u>Def</u> Un 2-ciclo es una transposición.

<u>Prop.</u> Cualquier permutación en S_n se puede expresar como producto de transposiciones.

<u>Dem.</u> Note que $(n_1\, n_2 \ldots n_r) = (n_1, n_r)(n_1, n_{r-1}) \cdots (n_1, n_2)$ es un producto de $r-1$ transposiciones. En general, una permutación es un producto de ciclos ajenos por el teor. Debemos

desmontar cada ciclo en producto de transposiciones quizá cada uno tiene de que ya no sea igual. ⋙

Existen diferentes formas, en general, de desmontar una permutación en producto de transposiciones. Sin embargo, algo queda igual.

<u>Teo</u> Sea $\sigma \in S_n$. Si

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_s$$
$$= \tau_1' \tau_2' \cdots \tau_t'$$

donde τ_i, τ_j' son transposiciones, entonces s, t tienen la misma paridad.

<u>Dem</u> En realidad, este y varios resultados en seguida se demuestran en libros de teoría de grupos o combinatoria fácilmente, y no son de nuestro interés (la demostración).

Def Decimos que una permutación en S_n es par si es producto de una cantidad par de transposiciones. En otro caso, decimos que es una permutación impar. Para $\sigma \in S_n$ definimos el signo de σ como

$$sg(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ es par} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ es impar} \end{cases}$$

Coro Para $\sigma, \pi \in S_n$ ocurre que

$$sg(\sigma\pi) = sg(\sigma)\, sg(\pi). \quad \#$$

Un r-ciclo es par si r es impar.
Un r-ciclo es impar si r es par.
Se puede usar el corolario para determinar si una permutación es par o impar.

Def Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$

con entradas en un anillo R. Definimos el determinante de A como

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (sg(\sigma))\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Básicamente, cada término en la suma consiste en exactamente una entrada de cada renglón y cada columna. El determinante sólo involucra suma y multiplicación, por lo que tiene sentido considerar anillos R.

Expresemos $\det(A_n)$ en n pequeños

$$\det(A_1) = sg(1)\, a_{11} = a_{11}$$

$$\det(A_2) = sg(1)\, a_{11} a_{22} + sg(1\ 2)\, a_{12} a_{21}$$
$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\det(A_3) = sg(1)\, a_{11} a_{22} a_{33} + sg(1\ 2\ 3)\, a_{12} a_{23} a_{31}$$
$$+ sg(1\ 3\ 2)\, a_{13} a_{21} a_{32} + sg(2\ 3)\, a_{11} a_{23} a_{32}$$
$$+ sg(1\ 3)\, a_{13} a_{22} a_{31} + sg(1\ 2)\, a_{12} a_{21} a_{33}$$
$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} -$$

19

$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

La expresión para $\det(A_4)$ tiene 24 términos

Examinemos el signo de algunos términos en $\det(A_4)$. Se puede conjeturar que el signo de $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$ es positivo, si notamos que

$$\begin{pmatrix} & & & a_{14} \\ a_{21} & & & \\ & a_{32} & & \\ & & a_{43} & \end{pmatrix}$$

Sin embargo, la σ correspondiente es

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 3\ 2)$$

debemos anteponer un $-$ al término señalado, y así podemos seguir, sin averiguar nada productivo.

Una expresión alternativa para $\det(A)$.

Lema Sea R un anillo y $A=(a_{ij})$ una matriz de $n\times n$ con entradas en R. Entonces,

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

En la def. original las entradas en cada sumando para el determinante se orden por el renglón. El lema lo hace sobre columnas.

Lema Suponga que φ es un homomorfismo de anillos de R a S. Sea $A=(a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño n sobre R. Entonces $\det((\varphi(a_{ij}))) = \varphi(\det(A))$.

Prop. Sean R un anillo y $A\in M_n(R)$.

1) El determinante de A es igual al determinante de su transpuesta

2) Si A tiene un renglón de ceros, o una

Columna de ceros, el determinante de A es cero

3) Sean $r \in \mathbb{R}$ y B la matriz que se obtiene al remplazar un renglón de A (o columna) con r veces el renglón (o columna).
Entonces $\det(B) = r \det(A)$.

4) Sea B la matriz que se obtiene al intercambiar dos renglones (o dos columnas) de A.
Entonces, $\det(B) = -\det(A)$.

5) Si A tiene renglones (o columnas) repetidos su determinante es 0

5) Suponga que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

el determinante de A es $\longrightarrow$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se cumple algo correspondiente para columnas.

6) Sea B la matriz que se obtiene al sumar un múltiplo escalar del i_1-ésimo renglón (o columna) al i_2-renglón (o columna) de A. Entonces $\det(A) = \det(B)$. #

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & -5 & 2 \\ 4 & -4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$ Factorizando columna 1

$$= 4\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$ Factorizando renglón 4

$$= 4 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Sum (-1) Col 1 a col 4

$$= 4 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

Sumamos (-3) Col 2 a col 3

Sum 3 Col 2 a col 4

$$= 32 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

factorizar col 3 y col 4

$$= 32 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sum 3 Col 3 a col 4

$$= 32$$

EJERCICIOS

1. Muestre que $\langle (1\,2), (1\,3), \ldots (1\,n) \rangle$

Como grupo

2. Determine

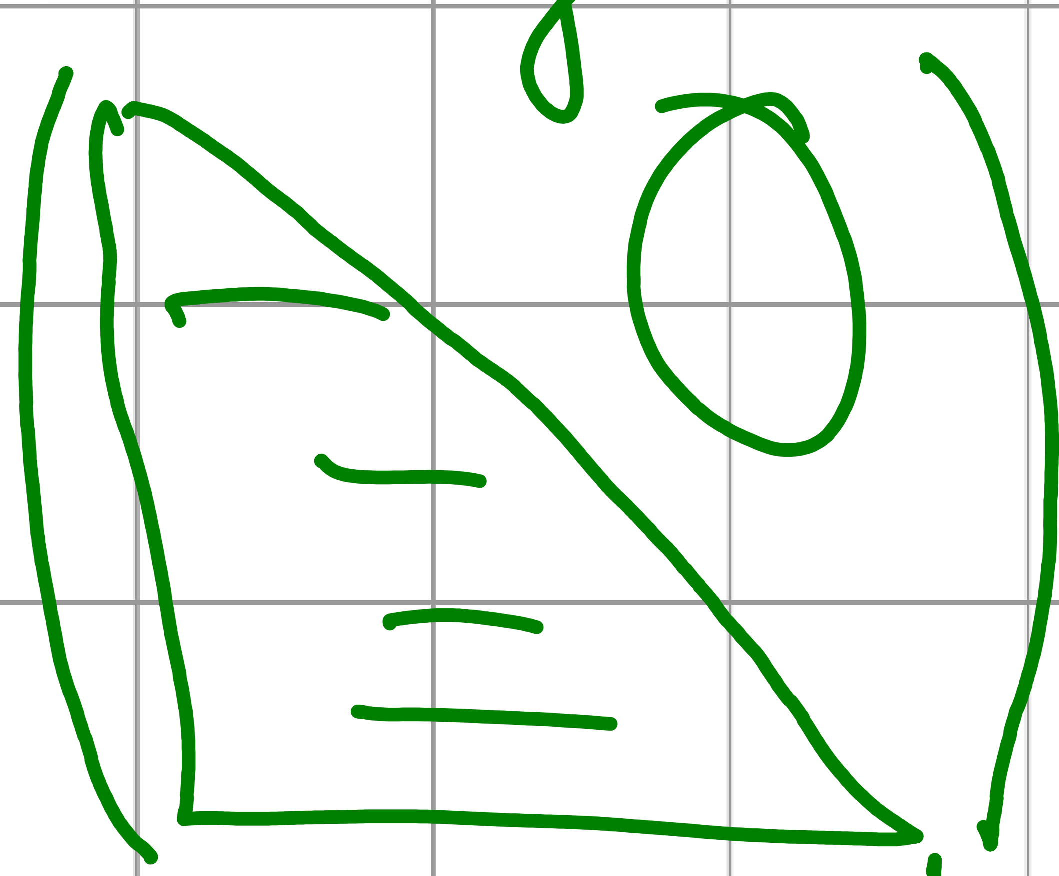
$sg(1\,2\,3\,4\,5)(2\,3\,4\,5)(1\,3\,5\,7\,9)(2\,5\,9)$

3. Calcule el determinante de

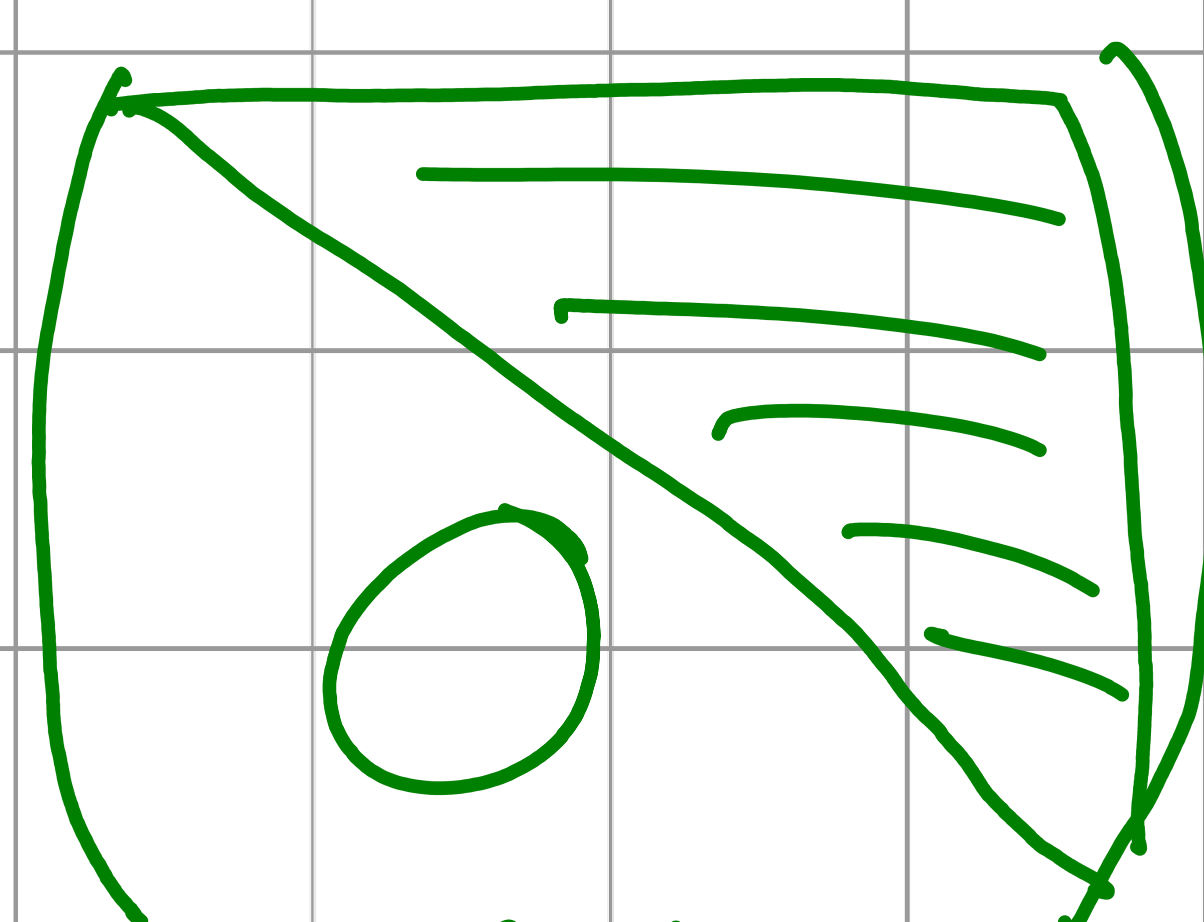
$$A = e_{11} + 2e_{13} + 2e_{22} + 4e_{24} + 3e_{31} + 4e_{33} + e_{42} + e_{44} \in M_4(\mathbb{Z}_6)$$

4. Sea A una matriz diagonal. Muestre que $\det(A)$ es el producto de las entradas en la diagonal

5.



Matriz triangular inferior



Matriz triangular superior

Sea A una matriz cuadrada triangular. Constate que el det de A es el producto de los elementos de la diagonal

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. En lo inmediato veremos a A como un m-vector columna con n-vectores renglón como sus entradas. Esto es, escribimos

$$A = \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_m \end{pmatrix}$$

donde $\bar{r}_i$ es un n-vector para cada i

Note que

$$(a_1, a_2, \dots, a_m)\begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_m \end{pmatrix} = a\bar{r}_1 + \cdots + a_m\bar{r}_m$$

Si multiplicamos A por un m-vector renglón a la izquierda, obtenemos una combinación lineal de los renglones de A. En general

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \cdots & a_{\ell m} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a_{11}\bar{r}_1 + \cdots + a_{1m}\bar{r}_m \\ a_{21}\bar{r}_1 + \cdots + a_{2m}\bar{r}_m \\ \vdots \\ a_{\ell 1}\bar{r}_1 + \cdots + a_{\ell m}\bar{r}_m \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos A por una matriz de $l \times m$ a la izquierda, obtenemos una matriz de $l \times n$ cuyos renglones son combinaciones lineales de los renglones de A. Decimos que multiplicar A por una matriz a la izquierda es equivalente a realizar una operación con los renglones de A.

En forma correspondiente, podemos ver a A como un n-vector renglón con m-vectores columna como sus entradas

$$A = (\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n)$$

Ocurre que

$$(\bar{C}_1 \ \bar{C}_2 \ \cdots \ \bar{C}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$= (b_{11}\bar{C}_1 + b_{21}\bar{C}_2 + \cdots + b_{n1}\bar{C}_n, \ b_{12}\bar{C}_1 + b_{22}\bar{C}_2 + \cdots + b_{n2}\bar{C}_n, \ldots, b_{1p}\bar{C}_1 + \cdots + b_{np}\bar{C}_n)$$

Cuando multiplicamos A por una matriz $n \times p$ a la derecha obtenemos una matriz $m \times p$ cuyas columnas son combinaciones lineales de las columnas de A.

Decimos que multiplicar A por una matriz a la derecha equivale a realizar una operación en las columnas de A.

Ej Sea $\bar{r}_1 = (1,2)$ $\bar{r}_2 = (3,4)$

$2\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = (5,8)$

$\bar{r}_1 - 3\bar{r}_2 = (-8,-10)$

Podemos describir esto como

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}$$

Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Las siguientes operaciones en los renglones (columnas) de A se llaman operaciones element. en renglones (columnas)

- Intercambiar dos renglones (columnas) de A
- Multiplicar un renglón (columna) de A por un escalar unidad (tiene inverso)
- Sumar un múltiplo escalar de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna).

Estas operaciones se llaman de tipo I, II, III

Una operación elemental renglón (columna) se puede inducir multiplicando la matriz por otra apropiada a la izquierda (derecha). Las matrices apropiadas se llaman elementales, y se dicen de tipo I, II o III según la operación elemental realizada (de tipo I, II, III)

Las matrices elementales de tipo I se obtienen intercambiando renglones en la matriz identidad I.

Algo comparado son las matrices elementales de tipo II y III

Eje Calcule los siguientes productos

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$

a la izquierda tenemos una elemental de tipo I, de modo que el producto es

$$\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -7 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{pmatrix}$ La matriz a la derecha es elemental de tipo II.

multiplicar la 2ª columna por -0.9, de suerte que el producto es $\begin{pmatrix} 1 & -1.8 \\ -7 & -1.8 \\ -4 & -8.1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$ Aquí, sumamos 7 veces al primer renglón y lo sumamos al tercero

20

El producto es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 2 \\ 3 & 23 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Realizamos dos operaciones renglón consecutivas seguida de una operación elemental columna de tipo I:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 2 \\ 3 & 23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6.3 & -1.8 \\ 3 & 23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1.8 & 6.3 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -7 & 2 & 3 \\ -4 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz a la derecha no es elemental.

pero se obtiene de realizar 2 operaciones columna: añadimos 7 veces la 3ª columna a la 1ª y multiplicamos la 2ª columna por 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -7 & 2 & 3 \\ -4 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 14 & 6 & 3 \\ 45 & 27 & 7 \end{pmatrix}$$

Prop. Las matrices elementales son invertibles y la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental del mismo tipo

Dem: Ejercicio. #

Lema Sea $a, b \in R$ y u una unidad de R

Supongamos que P_{ij}, $D_i(u)$ y $T_{ij}(b)$ son

matrices elementales de tamaño n.
Entonces,

i) $\det P_{ij} = -1$

ii) $\det D_i(u) = u$

iii) $\det T_{ij}(b) = 1$.

Por tanto, el determinante de las matrices elementales son unidades en R.

<u>Dem</u> Ejercicio. XXX

<u>Cor</u> Sean A, E matrices cuadradas de tamaño n en un anillo R y E una matriz elemental. Entonces,

$$\det(EA) = \det(E)\det(A)$$
$$= \det(AE)$$

XXX

<u>Cor</u> Sean R un anillo, $b \in R$, u una unidad de R, P_{ij}, $D_i(u)$ y $T_{ij}(b)$ matrices elementales de tamaño n. Entonces,

i) $\det(P_{ij}^{-1}) = -1$

ii) $\det(D_i(u)^{-1}) = u^{-1}$

iii) $\det(T_{ij}(b)^{-1}) = 1$

EJERCICIOS

En los ejercicios las matrices son sobre el anillo R

1. Para $i \neq j$ muestra que

$$I = D_i(-1)\, T_{ji}(-1)\, T_{ji}(1)\, P_{ij}$$
$$= D_j(-1)\, T_{ij}(1)\, T_{ji}(-1)\, T_{ij}(1)\, P_{ij}$$

Por tanto, una matriz elemental de tipo I es un producto de matrices elementales de tipo II y III.