Submódulos y Subespacios

Def Sean R un anillo y M un R-módulo. Decimos que un subconjunto $N \subseteq M$ es un R-submódulo si N es un R-módulo con la suma y multiplicación escalar que N hereda de M.

Sea F un campo y V un espacio F-vectorial. Decimos que un subconjunto $W \subseteq V$ es un F-subespacio si W es un espacio F-vectorial con la adición $\oplus$ y multiplicación que W hereda de V.

Note que un R-módulo o un espacio F-vectorial <u>no</u> puede ser vacío porque en el grupo abeliano <u>siempre</u> debe aparecer el 0

Más aún, si $N \subseteq M$, N es subgrupo de M cuando ocurre lo siguiente:

- es cerrado respecto a la suma, esto
- $\forall x, y \in N (x+y \in N)$

N es cerrado respecto a inversos aditivo:

$\forall x \in N \exists y \in N (x+y=0)$

Pero el hecho de que N sea subgrupo de M no asegura que sea submódulo o subespacio, para ello se necesita que N sea cerrado respecto a multiplicación escalar, esto es para cualquier $a \in R$

$\forall m \in N (am \in N)$

El siguiente lema proporciona un criterio para determinar submódulos o subespacios

Lema [Criterio de submódulo/Subespacio]
Sean R un anillo y M un R-módulo. Un subconjunto $N \subseteq M$ es un submódulo de M si, si se satisfacen las tres condiciones siguientes

i) $0 \in N$

ii) $n+n' \in N$ siempre que $n, n' \in N$

iii) $an \in N$ siempre que $a \in R$, $n \in N$.

Este criterio se cumple también para subespacios, cuando R es un campo.

Demo $\Rightarrow$) Por lo dicho previamente ii) y iii) se cumplen. En cuanto a i), como N es módulo, debe tener identidad aditiva, esto es un elemento $n \in N$ con

$$n+n=n$$

Así, $0+n=n=n+n$ en M, de modo

que $0=n\in N$ por la ley de cancelación en M.

$\Leftarrow$) i) garantiza que $N\neq\emptyset$, mientras que ii) que existe una adición en N que se herede de M.

(iii) da lugar a que $-n=(-1)n\in N$ para cada $n\in N$

$$\begin{aligned} 1\cdot n+(-1)\cdot n &= (1+(-1))\cdot n \\ &= 0\cdot n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Deducimos que N es un subgrupo aditivo de M. (iii) también garantiza que existe una multiplicación escalar en N que se herede de M.

Esto confirma que N es un R-módulo ##

Def: Sea M un R-módulo. Es claro que

$\{0\}$ es un submódulo de M, llamado el submódulo trivial. M mismo es un submódulo de M, el submódulo impropio de M. Un submódulo N de M con

$$N \subsetneq M$$

es un submódulo propio de M.

Eje

- Un ideal I en un anillo R es un R-submódulo de R
- Si R es un anillo,

$$\{(a,0) \in R^2 : a \in R\}$$

es un R-submódulo de R^2.

La diagonal

$$\{(a,a) \in R^2 : a \in R\}$$

es un R-submódulo de R^2.

Eje El conjunto de funciones $f: I \to \mathbb{R}$ (I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$) es un $\mathbb{R}$-subespacio de $\mathbb{R}^I$

El conjunto de funciones $f: I \to \mathbb{R}$ diferenciables es un $\mathbb{R}$-subespacio del $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones $f: I \to \mathbb{R}$ continuas.

Eje Recuerde que un grupo abeliano G es un $\mathbb{Z}$-módulo

Los subgrupos de G son $\mathbb{Z}$-submódulos de G, pues los subgrupos también son abelianos

Para la recíproca, sea H un $\mathbb{Z}$-submódulo de un grupo abeliano G. Por ser submódulo y el lema criterio, $0 \in H$ y H es cerrado respecto a la suma. Además $-h=(-1)h\in H$ para cada $h\in H$. Se sigue que H es un subgrupo de G. De este modo, un subconjunto de un grupo abeliano G es un subgrupo sii es un $\mathbb{Z}$-submódulo.

Ejercicios A

1. Sea M un R-módulo. Demuestre las siguientes, ($m\in M$, $a\in R$)

a) $a0_M=0_M$

b) $0_R m=0_M$

c) $(-1)m=-m$ (-1 es el inverso aditivo de 1 en R y $-m$ el inverso aditivo de m en M).

d) Si R es un campo y $am=0$, entonces $a=0$ o $m=0$.

Dé un ejemplo que ilustre el hecho de que d) no necesariamente se cumple cuando R no es un campo.

2. Otro criterio para submódulo. Muestre que un subconjunto N de M es un submódulo de M sii se satisfacen las siguientes condiciones

i) $N \neq \emptyset$

ii) $an + n' \in N$ siempre que $a \in R$ y $n, n' \in N$

3. Muestre que los submódulos de R son exactamente los ideales de R.

4. Muestre que el conjunto de matrices cuadradas diagonales,

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in M_n(R) : a_i \in R \right\}$$

es un submódulo de $M_n(R)$.

5. Sean S un conjunto y $s_0 \in S$. Verifique que $\{f \in R^S : f(s_0) = 0\}$ es un R-submódulo de R^S.

6. Sean $M_1, \dots, M_n$ R-módulos. Recuerde que el producto directo $M_1 \times \cdots \times M_n$ es un grupo aditivo (suma coordenada a coordenada). Tenemos una multiplicación escalar

$$a(m_1, \dots, m_n) = (am_1, \dots, am_n)$$

para $a \in R$ y $m_i \in M_i$. Corrobore que esto convierte $M_1 \times \cdots \times M_n$ en un R-módulo. Este módulo se suele denotar

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$$

y se llama la suma directa de los M_i.

7. Suponga que I es un conjunto de índices y $\{X_i : i \in I\}$ es una familia de conjuntos.

Definimos

$$\prod_{i\in I} X_i = \{(x_i : i\in I) : x_i \in X_i \text{ para cada } i \in I\}$$

y lo llamamos el producto directo de los X_i. Sea $\{M_i : i\in I\}$ una familia de R-módulos. Cerciórese de que el producto directo de los R-módulos $\prod_{i\in I} M_i$ es un R-módulo con respecto a la suma y producto escalar coordenada a coordenada

$$(m_i : i\in I) + (m_i' : i\in I) = (m_i + m_i' : i \in I)$$

$$a(m_i : i\in I) = (am_i : i\in I)$$

donde $a\in R$ y $(m_i : i\in I), (m_i' : i\in I) \in \prod_{i\in I} M_i$.

8. Sea M_i un R-módulo para cada $i\in I$. Define $\bigoplus_{i\in I} M_i$ el conjunto

$\{(m_i : i \in I) : m_i \in M_i, m_i = 0$ excepto para una cantidad finita de $i \in I\}$

Se llama la suma directa de los M_i.

Éste es un subconjunto del producto directo $\prod_{i \in I} M_i$. Constate que $\bigoplus_{i \in I} M_i$ es un R-submódulo de $\prod_{i \in I} M_i$ con la suma y multiplicación escalar heredada.

Note que el producto directo y la suma directa son lo mismo cuando I es finito, pero pueden no coincidir cuando I es infinito. Por ejemplo, $(1,1,1,\ldots)$ es un elemento de $\prod_{i \in I} \mathbb{Z}_i$ pero no de $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_i$.

9. Sean M un R-módulo y M_i un submódulo de M para cada $i \in I$. Muestre que

$\bigcap_{i\in I} M_i$ es un submódulo de M.

10. Sea M un R-módulo y M_1, M_2 submódulos de M. Cerciórese de que $M_1 \cup M_2$ es un submódulo de M si $M_1 \subseteq M_2$ o $M_2 \subseteq M_1$.

11. Sean M un R-módulo y M_1, M_2, N submódulos de M. Pruebe que $N \subseteq M_1$ o $N \subseteq M_2$ si $N \subseteq M_1 \cup M_2$.

12. Sean M un R-módulo y S un conjunto. Construya una suma natural en M^S y una multiplicación escalar por elementos de R, de tal suerte que M^S se convierte en un R-módulo

13. Si $(G, *)$, $(H, \circ)$ son grupos y $f: G \longrightarrow H$ es una función, decimos que

que f es un homomorfismo de grupos cuando

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2),\ f(0_G) = 0_H$$

para cualesquier $g_1, g_2 \in G$.

- Si f es un homomorfismo inyectivo decimos que f es monomorfismo
- Si f es un homomorfismo sobre, f es un epimorfismo
- Si f es homomorfismo inyectivo (monomorfismo) y sobre (epimorfismo) decimos que f es un isomorfimo

Si G, H son anillos los definiciones previas se extienden a anillo pidiendo que la funcion f también respeta el producto de anillos, a decir, si $(G, *, \cdot_G)$, $(H, \circ, \cdot_H)$ son anillos y $f: G \to H$, se cumple lo

Previo y que

$$f(g_1 \cdot_G g_2) = f(g_1) \cdot_H f(g_2)$$

para cualesquier g_1, g_2, $f(1_G) = 1_H$

En este sentido hablamos de

- homomorfismo de anillos
- monomorfismo de anillos
- epimorfismo de anillos
- isomorfismo de anillos

En el caso de módulos

$(M_1, +_1, 0_{M_1})$ $(M_2, +_2, 0_{M_2})$

sobre el anillo R

Si $f: M_1 \to M_2$

Se pide adicionalmente que

$$f(am) = a f(m)$$

para todo $m \in M$ y cada $a \in R$.

En todos los casos $f: G \to G$ un homomorfismo

Se llama un endomorfismo.

Sea $\varphi: R \to S$ un homomorfismo de anillos y M un S-módulo. Muestre que M también un R-módulo si definimos la multiplicación escalar mediante

$$a \cdot m = \varphi(a) \cdot m \qquad a \in R,\ m \in M$$

14. Sea M un R-módulo.

Defina.

$$\mathrm{Ann}_R M = \{a \in R : am = 0\ \forall m \in M\}$$

Se conoce como el anulador de M en R. Verifique $\mathrm{Ann}_R M$ es un ideal de R.

15. En este ejercicio suponemos que el anillo R <u>no</u> es necesariamente conmutativo. Con este antecedente definimos

Las nociones de R-módulo izquierdo y derecho

Decimos que el grupo abeliano M es un R-módulo derecho o que es un módulo derecho sobre R si existe una aplicación

$$\begin{aligned} M \times R &\longrightarrow M \\ (m,a) &\longmapsto m \cdot a \end{aligned}$$

tal que

i) $m \cdot 1 = m$

ii) $(m+n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a$

iii) $m \cdot (a+b) = m \cdot a + m \cdot b$

iv) $(m \cdot b) \cdot a = m \cdot (ab)$

para cualesquier $a, b \in R$ y cualesquier $m, n \in M$.

Sean R un anillo no conmutativo y M un

R-módulo izquierdo. Defina la multiplicación escalar derecha como la aplicación

$$M \times R \longrightarrow M$$
$$(m, a) \longmapsto m \cdot_r a = a^{-1} \cdot_\ell m$$

Corrobore que $\cdot_r$ convierte a M en un R-módulo derecho.