Combinaciones lineales e independencia lineal

13

Def Sean M un R-módulo y $m_1, \ldots, m_n \in M$. Un elemento de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m_i \qquad a_i \in R$$

es una combinación lineal de $m_1, \ldots, m_n$ sobre R. Por convención, definimos la suma vacía como el vector cero.

Ej. Considere $u = (1,-1,3)$, $v = (1,-3,4)$ y $w = (1,1,2)$ en $\mathbb{Z}^3$. ¿es u una combinación lineal de v y w sobre $\mathbb{Z}$? ¿sobre $\mathbb{Q}$?

Planteamos

$$(1,-1,3) = a(1,-3,4) + b(1,1,2)$$

$1 = a+b \quad -1 = -3a+b, \quad 3 = 4a+2b$

Si resolvemos las ecuaciones en $\mathbb{Q}$,

$$a = b = 1/2$$

es la única solución. Por lo tanto $(1, -1, 3)$ no es combinación lineal de v, w en $\mathbb{Z}$. Pero sí en $\mathbb{Q}$.

Eje ¿es $\bar{1}$ una $\mathbb{Z}$-combinación lineal de $\bar{6}$ y $\bar{8}$ en $\mathbb{Z}_{39}$?

Como $(-1)6 + 8 = 2$

Se cumple que $(-20)6 + (20)8 = 40$

de modo que

$$(-20)\bar{6} + (20)\bar{8} = \overline{40} = \bar{1}$$

en $\mathbb{Z}_{39}$.

Sea $S \subseteq M$, así que al menos existe un submódulo de M que contiene a S (el mismo), de suerte que si consideramos la familia de submódulos de M

que contienen a S, esta familia no es vacía, y si tomamos la intersección de esta familia obtenemos un submódulo de M que contiene a S. Formalmente,

Sea $\mathcal{F}$ la familia

$$\{N \subseteq M : N \text{ es submódulo de } M, S \subseteq N\}.$$

Como $M \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \neq \phi$, así que $\bigcap \mathcal{F}$ es un submódulo de M (Ejercicio).

$S \subseteq \bigcap \mathcal{F}$, porque cada elemento $N \in \mathcal{F}$ satisface $S \subseteq N$

Más aún $K = \bigcap \mathcal{F}$ es el menor submódulo de M que contiene a S (menor respecto a la contención)

Esto es si L es submódulo de M y $S \subseteq L$, entonces $K \subseteq L$.

Ciertamente, si $S \subseteq L$ y L es submódulo de M, L es un elemento de $\mathcal{F}$, por lo que $\bigcap \mathcal{F} \subseteq L$, esto es

$$K = \bigcap \mathcal{F} \subseteq L.$$

<u>Def</u>. Sean M un R-módulo y S un subconjunto de M. Usamos $\langle S \rangle$ para denotar el menor submódulo que contiene a S. Si $S = \{m_1, \dots, m_n\}$, escribimos simplemente $\langle m_1, \dots, m_n \rangle$ para $\langle S \rangle$.

Si $M = \langle S \rangle$, decimos que S genera M sobre R. También decimos que S es un conjunto generador o de generadores para M. Si S es finito, diremos que M es finito generado

Ocurre que $\langle \emptyset \rangle = \langle 0 \rangle = \{0\}$ es el módulo trivial.

Antes de proseguir es conveniente repasar dos operaciones entre conjuntos que usamos antes, y sobre el conjunto vacío

1° Unión

Es claro que $A \cup B$ significa el conjunto que contiene tanto a los elementos de A como los de B

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup B = B$ sii $A \subseteq B$
- $A \cup \emptyset = A$

2°) El conjunto vacío que se

denota $\emptyset$.

Recuerde que $A \subseteq B$ significa que todo elemento de A es elemento de B. De modo que si escribimos

$$A \nsubseteq B$$

quiere decir que no todo elemento de A es elemento de B, que existe al menos un elemento de A que no es elemento de B.

Por esto, se cumple que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, es decir, $\emptyset \subseteq A$ para todo conjunto A, de lo contrario, si $\emptyset \nsubseteq A$, significaría que existe un elemento de $\emptyset$ que no pertenece a A, lo cual es imposible.

Así, existe un conjunto muy especial, el conjunto vacío.

3') Intersección

$A \cap B$ es el conjunto que consiste en los elementos que pertenecen tanto a A como a B

Así! $A \cap B \subseteq A$

$A \cap B \subseteq B$

$A \subseteq B$ sii $A \cap B = A$

Decimos que A y B son ajenos cuando carecen de elementos en común, es decir,

$$A \cap B = \emptyset$$

Pero todos hechos son más o menos triviales y seguramente el estudiante ya los conocía.

Lo que es realmente importante es

como se extienden estas nociones.

Para empezar, la unión

Ya sabemos lo que significa la unión

$A \cup B$ o incluso de una

cantidad finita

$A_1 \cup \cdots \cup A_n$

de conjuntos.

Pero considere una familia arbitraria

de conjuntos $\mathcal{F}$ que puede ser

finita o infinita; $\mathcal{F}$ es un conjunto

de conjuntos, esto es, los elementos de

$\mathcal{F}$ son conjuntos.

Definimos $\bigcup \mathcal{F}$ como el

conjunto de elementos que

pertenecen a algún elemento de

$\mathcal{F}$. Formalmente

$\bigcup \mathcal{F} = \{ z : \text{existe } a \in \mathcal{F} \text{ con } z \in a \}$

Más formal

$$\bigcup \mathcal{F} = \{ z : \exists a \in \mathcal{F} (z \in a) \}.$$

y lo mejor que puede hacer el alumno es aprender a escribir con esta formalidad, pues de esta manera se evitan muchos malos entendidos y errores.

Así como $\emptyset$ es un conjunto muy especial existe otra colección de conjuntos de extrema relevancia.

El universo de conjuntos, que se denota como

$$V$$

es la colección de todos los conjuntos

Así, si A es cualquier conjunto ocurre que $A \in V$

Igualmente, cuando escribimos

$$Z \in V$$

simplemente estamos diciendo que Z es un conjunto.

Pero hay algo muy importante en torno a la colección V.

Se trata de que V es una colección de conjuntos <u>que no es un conjunto</u>.

Si consideramos o pensamos que V es un conjunto casi de inmediato se puede generar una contradicción

No es el momento de extendernos

en este asunto, lo que debe quedar claro es que la colección V es demasiado grande para ser un conjunto.

Con estas ideas en mente podemos generalizar la intersección de conjuntos. Otra vez, ya sabemos que significa

$$A \cap B$$

inclusu $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$

En la intersección

$$Z = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

viven aquellos conjuntos que son elemento de cada A_i

así, $x \in Z$ sii $x \in A_i$ para $i = 1, \ldots, n$

Ahora, considere una familia de conjuntos

$\mathcal{F}$. Primero supondremos que $\mathcal{F}$ no es vacía, por lo que en $\mathcal{F}$ existe al menos un conjunto A; $A \in \mathcal{F}$, quizá haya más elementos en $\mathcal{F}$ o no, pero sabemos con certeza que existe al menos un $A \in \mathcal{F}$.

Definimos

$$\bigcap \mathcal{F}$$

como la colección de conjuntos que pertenecen a cada elemento de $\mathcal{F}$. Así

$$\bigcap \mathcal{F} = \{ z \in A : \forall B \in \mathcal{F} (z \in B) \}.$$

Se sigue que $\bigcap \mathcal{F} \subseteq B$ para cualquier elemento $B \in \mathcal{F}$.

Note que si en $\mathcal{F}$ viven dos conjuntos ajenos B, C, estos, $B \cap C$, necesariamente ocurre que

$$\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$$

¿Qué pasa si $\mathcal{F} = \emptyset$?

El problema en este caso es grave, pues $\bigcap \mathcal{F}$ no resulta ser un conjunto, sino algo muy grande, de hecho, si $\mathcal{F} = \emptyset$

$$\bigcap \mathcal{F} = V$$

Así, en este caso la intersección es <u>todo el universo</u>

Por eso es muy importante que al tratar de calcular la intersección de una familia de conjuntos $\mathcal{F}$, el alumno se cerciore antes de que la colección $\mathcal{F}$ no es vacía.

Para probar $\bigcap \mathcal{F} = V$ razonamos como sigue. Por principio de cuentas sea cual sea el valor de $\bigcap \mathcal{F}$ éste es vacío o no es vacío en el caso en que no sea vacío, los elementos de $\bigcap \mathcal{F}$ son conjuntos. En cualquier caso

$$\bigcap \mathcal{F} \subseteq V$$

Ahora, como se sabe, para probar la igualdad nos falta probar que $V \subseteq \bigcap \mathcal{F}$.

Así que tomamos un elemento arbitrario del lado izquierdo y confirmamos que pertenece al lado derecho

Tomamos $z \in V$, esto es, z es un conjunto y confirmemos que $z \in \bigcap \mathcal{F}$. Para confirmar esto debemos cerciorarnos de que z pertenece a cada elemento de $\mathcal{F}$. Otra forma de decir esto es que si $z \notin \bigcap \mathcal{F}$ debe existir un elemento $A \in \mathcal{F}$ tal que $z \notin A$, pero esto no es posible, porque $\mathcal{F}$ carece de elementos.

#