16

<u>Prop.</u> Sean F un campo, V un F-espacio vectorial y $B \subseteq V$.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes

i) B es una base para V

ii) B es un conjunto máximo linealmente independiente en V.

iii) B es un conjunto generador mínimo para V

<u>Dem.</u> i) $\Rightarrow$ ii) Sean B una base y C un subconjunto de V linealmente independiente que contiene a B y supongamos que $B \subsetneq C$. Encontramos $v \in V$ tal que $v \in C - B$, y como B es una base, $v \in \langle B \rangle$, así que existen $v_1, \dots, v_n \in B$ tales que $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, donde $a_i \in F$.

Esto da lugar a $1v_1 - a_1v_1 - \cdots - a_nv_n = 0$ en C, una contradicción. Por tanto, $B \subsetneq C$ no puede ocurrir, así que $B = C$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea B un subconjunto linealmente independiente máximo. Primero probamos que B genera a V. De no ser así encontramos $v \in V$ tal que $v \notin \langle B \rangle$. En consecuencia $B \cup \{v\}$ es linealmente dependiente porque B es máximo, por lo que encontramos $v_1, \ldots, v_n \in B$ y $a, a_1, \ldots, a_n \in F$ tales que $av + a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$ es una relación no trivial. Note que $a \neq 0$, pues en otro caso tendríamos una relación no trivial en B lo que se opone a que B es linealmente independiente. En consecuencia,

$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ para

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$

una contradicción, dando lugar a que

$V = \langle B \rangle$.

Si B no es un conjunto generador mínimo contiene un subconjunto propio C que genera a V. Encontramos $v \in B - C$ y como $v \in V = \langle C \rangle$, podemos encontrar

$v_1, v_2, \ldots, v_n \in C$ tales que

$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ para $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$

Esto da lugar a una relación no trivial

$1v - a_1 v_1 - \cdots - a_n v_n = 0$ en B, lo que se opone a que B es linealmente independiente. Esto confirma que B es un conjunto generador mínimo.

iii) $\Rightarrow$ i) Sea B un conjunto generador mínimo. Para probar que B es una base, resta confirmar que es linealmente indepen. Supongo que no es así, que existe una relación no trivial

$$a_1v_1+\cdots+a_nv_n=0$$

$v_1,\dots,v_n \in B$ y $a_1,\dots,a_n \in F$ que sin perder generalidad alguna, supone no son cero. Esto implica que

$$v_1=a_1^{-1}(-a_2v_2-\cdots-a_nv_n)$$
$$\in \langle \{v_2,\dots,v_n\} \rangle$$
$$\subseteq \langle B-\{v_1\} \rangle$$

de modo que $\langle B-\{v_1\}\rangle=\langle B\rangle=V$ lo que se opone a que B es un conjunto generador mínimo. Por consiguiente, B es linealmente independiente y una base. #

Def: Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. Decimos que V es de dimensión finita si tiene un conjunto finito generador. En otro caso V es de dimensión infinita.

Uno de los resultados más importantes en espacios vectoriales es que todo espacio vectorial tiene una base. Este resultado separa los espacios vectoriales de los módulos.

Prop. Cualquier espacio vectorial de dimensión finita contiene una base finita. De hecho, cualquier conjunto finito generador da lugar a una base.

Dem. Para el espacio vectorial dado encontramos un conjunto finito generador. Cuando este conjunto generador no es mínimo encontremos un subconjunto propio generador. Continuamos de esta manera hasta que consigamos un subconjunto generador mínimo, porque iniciamos con un conjunto finito. Por la proposición arriba, es conjunto mínimo es una base. ###

Si tenemos un espacio vectorial de dimensión infinita, cualquier conjunto generador es infinito y no hay garantía de que podamos reducir un conjunto generador infinito mínimo.
Para lograr probar que tales espacios tienen una base, debemos llevar a cabo ciertos preparativos.

Def. Decimos que un cpo $(S, \leq)$ está totalmente ordenado o que es una cadena si, para cualesquier $a, b \in S$ ocurre que $a \leq b$ o $b \leq a$.
Esto es cualesquier dos elementos son comparables.

Eje $(\mathbb{Z}_+, \leq)$ y $(\mathbb{Z}, \leq)$ son totalmente ordenados.

El siguiente lema, el lema de Zorn, es un enunciado que es equivalente al axioma, a un axioma de la teoría de conjuntos conocido como el axioma de elección.
En este sentido, no requerimos demostrarlo, lo que en realidad se debe hacer es mostrar que es

al axioma de elección.

Esta demostración se encuentra en un buen libro de teoría de conjuntos.