Para distinguir entre tamaños de conjuntos infinitos vienen en nuestra ayuda los números cardinales.

Los cardinales son ciertos números ordinales.

Para motivar su aparición consideremos la siguiente situación.

Sea A un conjunto. Ya vimos que $|A|$ denota su cardinalidad, de lo que sólo sabemos que

$$|A| = |B|$$

cuando existe una biyección entre A y B, $|A| \leq |B|$ si existe una inyección de A en B y $|A| < |B|$ cuando $|A| \leq |B|$ y $|A| \neq |B|$, es decir existe una inyección de A en B pero no existe una función sobre de A en B.

Esta es la forma de comparar tamaños de conjuntos infinitos.

Pero sólo conocemos un tamaño infinito, hasta ahora: el de los naturales

Supongamos que A es un conjunto infinito, $Pot(A)$ su conjunto potencia.

Teo [Cantor]

$$|A| < |Pot(A)|$$

Dem Debemos probar $|A| \leq |Pot(A)|$ y luego $|A| \neq |Pot(A)|$

Primero defino

$$f: A \longrightarrow Pot(A),$$ de la siguiente manera: si $a \in A$, $f(a) = \{a\}$.

Así, $\{a\} \in Pot(A)$, pues, $\{a\} \subseteq A$.

Es fácil verificar que f es inyectiva de suerte que $|A| \leq |Pot(A)|$

Ahora debemos cerciorarnos de que no existe una función sobre de A en $Pot(A)$, y aquí aparece uno de los argumentos más extraordinarios de las matemáticas: el argumento diagonal de Cantor

Supongamos que Sí existe 13

$h : A \to Pot(A)$ Sobre.

Así, h recibe un elemento de A y regresa un subconjunto de A esto es, recibe, digamos $b \in A$, y regresa $h(b) \subseteq A$.

Ya que $b \in A$ y $h(b)$ es un subconjunto de A, tiene sentido preguntarnos si b misma pertenece a este subconjunto $h(b)$.

Entonces, definimos la colección

$$B = \{a \in A : a \notin h(a)\}$$

Por definición $B \subseteq A$, por lo que $B \in Pot(A)$. Como $B \in Pot(A)$ y h es sobre, debe existir un elemento $z \in A$ tal que $h(z) = B$.

Entonces, tenemos dos alternativas $z \in B$ o $z \notin B$.

Si $z \in B$, por definición $z \notin h(z) = B$

Si $z \notin B$, por definición de B
$z \in h(z) = B$
Ambas alternativas son contradictorias, de modo que nuestra suposición de que existe h es contradictoria y concluimos que
$$|A| < |Pot(A)|$$
Tomamos a $\mathbb{N}$ como A y tenemos
$$|\mathbb{N}| < |Pot(\mathbb{N})|$$
de modo que hemos probado que existe un conjunto infinito $Pot(\mathbb{N})$ que tiene tamaño más grande que los naturales.
Recuerda que a los conjuntos infinitos que tienen el mismo tamaño que los naturales se les llama numerables de modo que $Pot(\mathbb{N})$ no es numerable, es un conjunto innumerable.
Ahora, todo conjunto es isomorfo a un ordinal, así que $Pot(\mathbb{N})$ es isomorfo

a un ordinal k.
Como vimos $\omega, \omega+\omega, \ldots$
son ordinales numerables, k no es numerable, así que hemos encontrado un ordinal innumerable.

$$\omega < \omega+\omega < \ldots < k$$

Pero $Pot(\mathbb{N})$ es un conjunto, así que

$$|Pot(\mathbb{N})| < |Pot(Pot(\mathbb{N}))|$$

y así sucesivamente, de modo que aparecen ordinales cada vez de tamaño más y más grandes.
Recuerde que un ordinal es un conjunto bien ordenado, pero de hecho, cualquier colección de ordinales también está bien ordenada.
Así, de entre los ordinales α con

$$|\alpha| > |\omega|$$

Considere el menor de ellos, llamémoslo β. Por tanto, β es un ordinal innumerable pero es el menor de ellos, entonces, si

$\gamma < \beta$ necesariamente γ es numerable.

A ω lo llamamos también $\aleph_0$ "álef" cero el primer cardinal infinito y al β que recién obtuvimos lo llamamos

$$\aleph_1 \quad \text{"alef" } 1$$

Antes vimos que podemos obtener ordinales cada vez de tamaño mayor, así que podemos definir la sucesión de los álef

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

Estos se llaman cardinales, son ordinales que no son equipotentes a un ordinal menor. Estos son los que nos ayudan a comparar tamaños de conjuntos infinitos.

A cualquier conjunto A le podemos asociar su cardinalidad

$$|A| = \aleph_\alpha$$

los álef son una colección

tan grande que no forma un conjunto pues los "enumeramos" con ordinales.

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \dots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \dots < \aleph_\lambda < \dots$$

En consecuencia el conjunto infinito A es más grande en tamaño que el conjunto B cuando $|A| = \aleph_\alpha$, $|B| = \aleph_\beta$ y $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$

Sabemos que podemos sumar, multiplicar y potenciar números naturales. Obtuvimos los ordinales transfinitos generalizando la idea de construcción de los naturales. Igualmente, podemos sumar, multiplicar y potenciar ordinales

$$\alpha + \beta$$
$$\alpha \cdot \beta$$
$$\alpha^\beta$$

y obtenemos ordinales.

Los cardinales, como ordinales, admiten estas

Pero también admiten operaciones exclusivas para cardinales

$\kappa + \mu$

$\kappa \cdot \mu$

κ^{μ}

y obtenemos cardinales. Estas operaciones aritméticas entre cardinales <u>son distintas</u> a aquellas definidas entre ordinales. La suma ordinal de cardinales es distinta a la suma cardinal; lo mismo aplica para multiplicación y potenciación. Vale la pena abordar un poco en la definición de las operaciones aritméticas entre cardinales.

Si A y B son conjuntos infinitos

Defina $|A| = \kappa$, $|B| = \mu$

$\kappa + \mu = |A \cup B|$ → (suponiendo que A y B son ajenos entre sí)

$\kappa \cdot \mu = |A \times B|$

$\kappa^{\mu} = |A^{B}|$

Recordar que $A^B = \{ f \mid f : B \to A \}$

La definición de estas operaciones, no depende de la elección de los conjuntos A, B.

Note que

$$\kappa + \mu = \mu + \kappa$$

$$\kappa \cdot \mu = \mu \cdot \kappa .$$

Estas operaciones reciben cardinales y regresan cardinales.

La suma y el producto resultan excepcionalmente simples:

Teo [Hessenberg].

Si κ, μ son cardinales infinitos

$$\kappa + \mu = \kappa \cdot \mu = \max\{\kappa, \mu\}$$ #

Antes, habíamos denotado a los cardinales como álef $\aleph_\alpha$, pero se acostumbra usar letras griegas $\kappa, \lambda, \mu, \theta, \eta, \ldots$

Todo cardinal es un álef y todo álef es un cardinal.

En cambio la potencia κ^{μ} es extraordinariamente complicada, pero se puede decir, esto es, dados κ, μ cardinales, κ^{μ} es un cardinal. pero pocas veces sabemos qué cardinal es.

Así

$$\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1$$
$$\aleph_0 \cdot \aleph_2 = \aleph_2$$
$$\aleph_n \cdot \aleph_n = \aleph_n$$

Si $n \in \mathbb{N}$ $\quad n + \aleph_0 = n + m + \aleph_0 = \aleph_0$

$$\omega \cdot \omega = \omega$$

$$\underbrace{\kappa \cdot \kappa}_{\kappa^2} = \underbrace{\kappa \cdot \kappa \cdot \kappa}_{\kappa^3} = \underbrace{\kappa \cdot \kappa \cdot \kappa \cdot \kappa}_{\kappa^4} = \kappa$$

En consecuencia, $\kappa^n = \kappa$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se sabe que

$$2^{\kappa} = \kappa^{\kappa}$$
$$2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0}$$

Una herramienta muy importante en álgebra es el cálculo de cuántos subconjuntos finitos podemos obtener de un conjunto dado A, lo cual se denota

11

$$[A]^{<\omega}$$

así que nos interesa determinar el tamaño de este conjunto

Si $z \in [A]^{<\omega}$, lo podemos visualizar como $z = \{a_1, .., a_\ell\}$ para algún $\ell \in \mathbb{N}$ y elementos $a_1, .., a_\ell \in A$

Digamos que $|A| = \kappa$ es un conjunto infinito. Note que cada elemento $b \in A$ da lugar a $\{b\} \in [A]^{<\omega}$ de modo que

$$|A| \leq |[A]^{<\omega}|$$

pues tenemos la inyección

$$f : A \longrightarrow [A]^{<\omega}$$

dada por $f(a) = \{a\}$

Por otro lado, si $z \in [A]^{<\omega}$, digamos

$$z = \{a_1, \dots, a_\ell\}$$

podemos establecer la función

$$g_\ell : [A] \longrightarrow A^\ell$$

$$g_\ell(z) = (a_1, .., a_\ell)$$

donde $[A]^{\ell}$ denota a los subconjuntos de A de tamaño exactamente ℓ

Con este tipo de funciones podemos establecer una inyección entre $[A]^{<\omega}$ y $\bigcup_{\ell<\omega} A^{\ell}$

que resulta ser inyectiva: Si $w \in [A]^{<\omega}$ digamos $w = \{a_1, \ldots, a_n\}$, aplicamos $g_n(w)$ y nos da un elemento en

$$A^n \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^m$$

De este modo obtenemos

$$|[A]^{<\omega}| \leq \left|\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^m\right|$$

Recorde que el producto de cardinales infinitos es sencillo: el resultado es el mayor. Así

$$A \times A = A^2 \qquad |A^2| = |A \times A| = \kappa \cdot \kappa = \kappa$$

Por inducción en n

$$|A^n| = \kappa \quad \text{para cada } n \in \omega$$

En consecuencia
$$\left|\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A^m\right| \leq \aleph_0 \cdot k = k$$

y teníamos $k = |A| \leq |[A]^{<\omega}|$
damos paso a
$$k = |[A]^{<\omega}|$$
Esto es, si el conjunto A tiene tamaño infinito k, podemos obtener k subconjuntos finitos de A.

Finalmente podemos retomar el resultado, cuya demostración nos llevó tantos preparativos.

<u>Teo</u> Sea V un espacio vectorial sobre el campo F. Supongamos que V tiene dimensión infinita. Entonces, cualesquiera dos bases de V tienen el mismo tamaño.
<u>Demo</u> Sea B una base de V. Cualquier elemento $w \in V$ tiene una representación única en términos de elementos de B

digamos

$$w = r_1 b_1 + \dots + r_n b_n$$

única significa que cualquier otra representación

$$w = s_1 c_1 + \dots + s_\ell c_\ell$$

implica que $\ell = n$, $s_i = r_i$ y $b_i = c_i$

Esto da lugar a que la asociación $w \longmapsto \{b_1, \dots, b_n\}$ sea inyectiva, de V en el conjunto de subconjuntos finitos de B, es decir

(1) $$f : V \longrightarrow [B]^{<\omega} \times [R]^{<\omega}$$

es inyectiva, donde $f(w) = \{b_1, \dots, b_n\}$

Ponemos

$$|V| = \mu, \quad |B| = \kappa \quad |R| = \lambda$$

De modo que

$$|[B]^{<\omega}| = \kappa \quad y \quad |[R]^{<\omega}| = \lambda$$

Según vimos antes.

La función inyectiva en (1) implica que

$$|V| \leq |[B]^{<\omega} \times [R]^{<\omega}|$$

$$= |\kappa \cdot \lambda| = \kappa\lambda$$

Caso 1 $|R| < |V|$

Note que $B \subseteq V$, de modo que
$k = |B| \leq |V| = \mu$, $k \leq \mu$.
Tenemos

$$\mu = |V| \leq k \cdot \lambda$$

Ahora, como $\lambda < \mu$ si ocurriese $k < \mu$
se cumpliría

$$\mu \leq k \cdot \lambda < \mu \quad \text{una contradicción}$$

pues $k \cdot \lambda = \max\{k, \lambda\}$ y $k, \lambda < \mu$.
Así, suponer que $|B| = k$ es menor que el tamaño de V, da lugar a una contradicción. En consecuencia k debe ser igual al tamaño de V. Como la base que elegimos fue arbitraria, cualquier base debe tener el tamaño de V, es decir, todas tienen el mismo tamaño en este caso 1.

Caso 2 $|R| \geq |V|$

Retomemos la cota obtenida

$$\mu = |V| \leq k \cdot \lambda$$

Ya que $\lambda \geq \mu$, λ debe ser $\geq \kappa$.

Se sigue que

$$\mu \leq \kappa \cdot \lambda = \lambda$$

Así que, en esta ocasión no podemos usar el truco del caso 1 en el que la base tiene el tamaño de V, pues esta vez podría ocurrir que $|B| < |V|$.

Supongamos que tenemos dos bases para V, B, B' de tamaño distinto, digamos

$$\eta = |B| < |B'| = \rho$$

Dado que ambas sean bases, cualquier elemento $w \in B'$ se puede representar en forma única como elementos de B

$$w = r_1 b_1 + \dots + r_s b_s \qquad r_i \in R \quad b_1, \dots, b_s \in B$$

Otra vez, tenemos una asociación inyectiva $w \longmapsto \{b_1, \dots, b_s\}$

De modo que el tamaño de B' está

relacionado con el de B de la siguiente manera

$$f: B' \longrightarrow [B]^{<\omega} \quad \text{inyectiva}$$

$$f(w) = \{b_1, \dots, b_s\}$$

donde $w = r_1 b_1 + \dots + r_s b_s$

Por tanto,

$$\rho = |B'| \leq |[B]|^{<\omega} = \eta$$

pero $\eta < \rho$, una contradicción, a menos que $\eta = \rho$.

De este modo, B y B' tienen el mismo tamaño. $\#$

En realidad, no requerimos distinguir en dos casos en la prueba recién dada. Queda al lector simplificar la prueba en este sentido.

EJERCICIOS

1. Sea V un F-espacio vectorial con una base finita o numerable. Muestre que si F es infinito, $|V| = |F|$

2. Sea F un cuerpo y V un F-espacio vectorial. Compruebe que

$$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$$