# APLICACIONES AL ÁLGEBRA DE LÓGICAS ABSTRACTAS Y TEORÍA DE CONJUNTOS.

JOSÉ ADRIÁN GALLARDO QUIROZ
EDGAR VALENZUELA NUNCIO
LUIS MIGUEL VILLEGAS SILVA

RESUMEN. El propósito de este trabajo es introducir las lógicas abstractas al trabajo cotidiano de los matemáticos, ejemplificando su uso en el álgebra. Después de describir sucintamente la lógica de primer orden ($L_{\omega\omega}$), describimos sus dificultades en cuanto a expresividad de diversas nociones en matemáticas. Esto motiva la introducción de nuevas lógicas llamadas abstractas porque extraen las figuras principales de $L_{\omega\omega}$ y logran extensiones de la misma. Por supuesto, existen diversas formas de extender la lógica de primer orden: permitiendo conjunciones/disyunciones infinitas, cuantificación sobre una cantidad infinita de variables, cambiando la noción clásica de cuantificador, y apelando a nociones propias de la lógica de segundo orden. Estas variantes se revisan y se contrastan con sus repercusiones en el álgebra. Finalmente, recurrimos a la teoría decampos para revisar lógicas con cuantificadores generalizados.

## 1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo está dirigido o bien hacia profesionales de la lógica matemática con inclinaciones algebraicas, o algebristas interesados en el tema. La finalidad no es convencer al algebrista de involucrarse en nociones complejas de teoría de conjuntos y lógica matemática, tampoco inclinar al lógico o conjuntista a desarrollarse como algebrista. Todo lo contrario, la intención es introducir el tema de tal forma que ambos lados se puedan beneficiar de los resultados sin necesidad de abrumarse al aprender toda una maquinaria nueva y compleja. Un posible escenario es una invitación a formar un espacio de cooperación.

El trabajo comienza con las bases de la lógica de primer orden. Mostramos algunas de sus propiedades como el teorema de compacidad y los teorema de Löwenheim-Skolem. Discutimos que estos teoremas, destacados en muchos aspectos, en cierto sentido reducen la expresividad de la lógica de primer orden. Continuamos con una breve introducción a la teoría de conjuntos, haciendo énfasis en la incompletud de ésta. Dicha incompletud da lugar a que algunos problemas postulados en otras áreas de las matemáticas no dependan exclusivamente de técnicas inherentes al área. Es decir, hay problemas en álgebra que no dependen sólo de ella para resolverse, sino que su solución resulta independiente de **ZFE**, requieren de axiomas adicionales para establecer una solución. Podemos dar una respuesta negativa y una positiva, pero al final los dos serán compatibles con la teoría de conjuntos. Después, introducimos la lógicas abstractas, cuyo primer ejemplo recae en las lógicas infinitarias. Introducimos algunas nociones que también son independientes de la teoría de conjuntos, pero tienen implicaciones en la teoría de modelos de la lógica infinitaria. Destacados también en este sentido son los grandes cardinales que serán relevantes en algunas situaciones algebraicas. Con estas nociones a la mano, procedemos a ejemplificiar el uso de las lógicas infinitarias en el álgebra y su dependencia hacia la teoría de conjuntos, en particular, tratamos con grupos libres. En seguida introducimos la noción de clases *implícitas* para lógicas abstractas que generan nuevas lógicas, propiamente una especie de cerradura de una lógica dada, simbolizada como $\Delta(L)$. Exponemos la expresividad de grupos libres en lógica

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 03C20,03C50,03C75,03E55; secundary 03C80, 03C48.

.

infinitaria y discutimos la complejidad del problema, para pasar a lógica estacionaria en donde establecemos criterios de equivalencia modelo-teórica, módulo la lógica estacionaria, entre grupos libres. Cerramos esa sección considerando la expresividad en torno al funtor Ext en la lógica estacionaria, donde dicha expresividad depende de una hipótesis conjuntista. Finalmente, exponemos la teoría de cuantificadores generalizados por medio de ejemplos muy concretos, especialmente los cuantificadores de Magidor-Malitz, el cuantificador de Härtig y variaciones. Ilustramos la importancia del uso de cuantificadores generalizados al álgebra, especialmente a la teoría de campos ordenados y real cerrados.

## 2. Lógica de primer orden

La lógica de primer orden tiene como uno de sus objetivos expresar y formalizar, de forma natural, las nociones matemáticas con las que trabajamos cotidianamente; también definir qué significa que una estructura satisfaga una noción matemática. Para poder lograr esto se hace uso de diversos lenguajes formales, lenguajes que son capaces de expresar las nociones matemáticas usuales, pero también son flexibles para que distintas estructuras puedan interpretarlos.

**Definición 2.1.** Un lenguaje formal consiste en la siguiente lista de símbolos.

- Variables: $x_1, x_2, x_3 \dots$ (una cantidad numerable)
- Conectivos lógicos: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$.
- Símbolos de cuantificadores: $\forall$, $\exists$.
- Símbolos de constante: $a$, $b$, $c$.
- Símbolos de función: $f$, $g$, $h$.
- Símbolos de predicado: $P$. $Q$, $R$.

Las variables, conectivos lógicos y los cuantificadores son símbolos que aparecen en cada lenguaje por lo que se les llama símbolos lógicos. En cambio, los símbolos de constante, función y predicado son los símbolos no lógicos. Estos no necesariamente aparecen en cada lenguaje y su inclusión dependerá de alguna aplicación particular en la que estemos interesados.

*Ejemplo* 1.

1. El lenguaje de la teoría de grupos $\mathscr{L}_G$ consta de los siguientes símbolos.
   - Un símbolo de constante 0.
   - Dos símbolos de función $+$ y $-$.
2. Dado $R$ un anillo, el lenguaje de la teoría de $R$-módulos $\mathscr{L}_{R-\mathrm{Mod}}$ se compone de los siguientes símbolos.
   - Un símbolo de constante 0.
   - Un símbolo de función $+$.
   - Por cada $r$ elemento de $R$, un símbolo de función $f_r$.

**Definición 2.2.** Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje formal.

1. Toda variable y todo símbolo de constante es un término.
2. Si $f$ es un símbolo de $n$-función y $t_1, \dots, t_n$ son términos, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ también es un término.

*Ejemplo* 2. En el lenguaje de teoría de $R$-módulos, los términos del lenguaje son combinaciones lineales. Los siguientes son ejemplos concretos.

1. $x + 0$,
2. $rx_1 + rx_2 + 0$,
3. $x_1 + x_2 + x_3$,
4. $r_0x + r_1x + r_2x$.

**Definición 2.3.** Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje formal. Una fórmula átomica es aquella que tiene la forma $t_1 = t_2$, donde $t_1$ y $t_2$ son términos, o $R(t_1, \dots, t_n)$, donde $R$ es un símbolo de $n$-relación y $t_1, \dots, t_n$ son términos.

**Definición 2.4.** Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje formal. Una $\mathscr{L}$-fórmula es una cadena de símbolos que se construye con fórmulas atómicas mediante la aplicación las siguientes reglas:

1. Si $\varphi$ es una fórmula, entonces $\neg\varphi$ es una fórmula.
2. Si $\varphi$ y $\psi$ son fórmulas, entonces $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$ son fórmulas.
3. Si $\varphi$ es una fórmula y $x$ es una variable, $\exists x\varphi$ y $\forall x\varphi$ son fórmulas.

Las fórmulas sin variables libres se les llama enunciados.

*Ejemplo* 3. Con el lenguaje $\mathscr{L}_G$ podemos expresar los axiomas de grupo.

- $\forall x\forall y\forall z((x+y)+z = x+(y+z))$
- $\forall x((x+0 = x) \wedge (0+x = x))$
- $\forall x(x+(-x) = 0) \wedge ((-x)+x = 0)$

*Ejemplo* 4. Dados $R$ un anillo y $r,s \in R$, con el lenguaje $\mathscr{L}_{R-\mathrm{Mod}}$ podemos expresar los axiomas de $R$-módulo, entre ellos, los siguientes.

- $\forall x((r\cdot s)x = r(sx))$
- $\forall x((r+_R s)x = rx+sx)$
- $\forall x\forall y(r(x+y) = rx+ry)$

**Definición 2.5.** Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje formal. Una $\mathscr{L}$- estructura $\mathfrak{A}$ consiste en un conjunto no vacío $A$ junto con una interpretación de cada símbolo no lógico de $\mathscr{L}$. Una interpretación de $\mathscr{L}$ asigna:

1. Un elemento de $A$ a cada constante en $\mathscr{L}$.
2. Una función de $A^n$ a $A$ para cada símbolo de función en $\mathscr{L}$ de valencia $n$.
3. Un subconjunto de $A^n$ para cada símbolo de relación en $\mathscr{L}$ de valencia $n$.

**Definición 2.6.** Sean $\mathscr{L}$ un lenguaje formal y $\mathfrak{A}$ una $\mathscr{L}$-estructura.

- Decimos que $\mathfrak{A}$ es modelo de un $\mathscr{L}$-enunciado $\varphi$ si $\varphi$ es verdadero en $\mathfrak{A}$ y lo denotaremos mediante $\mathfrak{A} \models \varphi$.
- Decimos que $\mathfrak{A}$ es modelo de un conjunto de $\mathscr{L}$-enunciados $\Sigma$ si todo $\mathscr{L}$-enunciado $\varphi$ de $\Sigma$ es verdadero en $\mathfrak{A}$. Esto lo denotaremos mediante $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

Si $\Sigma$ es un conjunto de $\mathscr{L}$-enunciados, decimos que $\Sigma$ es consistente o satisfacible cuando existe una $\mathscr{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ con $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

*Ejemplo* 5. Las $\mathscr{L}_G$-estructuras $\mathfrak{A} = \langle A, 0, +, -\rangle$ que son modelos de los axiomas de grupo son precisamente los grupos. De manera similar, las $\mathscr{L}_{R-\mathrm{Mod}}$-estructuras $\mathfrak{M} = \langle M, 0, +, -, \{r : r \in R\}\rangle$ que son modelos de los axiomas de grupos (junto con la conmutatividad de $+$) son los $R$-módulos.

Dos teoremas medulares para la teoría de modelos de la lógica de primer orden son el *teorema de compacidad* y el *teorema de Löwenheim-Skolem*.

**Teorema 2.7** (Compacidad)**.** *Sean $\mathscr{L}$ y $\Sigma$ un conjunto de $\mathscr{L}$-enunciados. Entonces, $\Sigma$ es satisfacible si y solamente si todo subconjunto finito de $\Sigma$ es satisfacible.*

*Ejemplo* 6. Fijamos $\Sigma$ la colección de axiomas de teoría de grupos junto con los axiomas

$$\varphi_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \left( \bigwedge_{i\neq j} x_i \neq x_j \right).$$

Esta teoría es *finito satisfacible*. Es decir, cualquier subconjunto finito de $\Sigma$ tiene un modelo. Al tomar cualquier subconjunto finito $s \subseteq \Sigma$ encontramos un grupo. Digamos que $n_s$ es el mayor natural $k$ tal que $\varphi_k \in s$. Sea $G$ un grupo de cardinalidad al menos $n_s$, entonces $G \models s$. Por tanto $\Sigma$ tiene un modelo y dicho modelo debe ser un grupo infinito. En este ejemplo se muestra una forma semántica de obtener un grupo infinito. Aunque $\mathbb{Z}$ tenga tal naturaleza, el ejemplo tiene la finalidad de mostrar el uso del teorema de compacidad.

**Teorema 2.8** (Löwenheim-Skolem descendente)**.** *Sean $\mathscr{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{B}$ una $\mathscr{L}$-estructura. Para cada $X \subseteq B$ existe una $\mathscr{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ tal que $X \subseteq A$, $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ y $|\mathfrak{A}| \leq |X| + |\mathscr{L}|$.*

Aquí, $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, «$\mathfrak{A}$ *es subestructura elemental de* $\mathfrak{B}$», quiere decir que se satisface lo siguiente.

1. $\mathfrak{A}$ es una subestructura de $\mathfrak{B}$ (un submódulo de $\mathfrak{B}$, por ejemplo) y
2. $\mathfrak{B} \models \varphi(\vec{a})$ ocurre exactamente cuando $\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a})$, donde $\vec{a}$ son elementos de $A$ y $\varphi$ es cualquier fórmula de primer orden.

Particularmente, siempre que contemos con un lenguaje a lo más numerable, obtenemos una subestructura elemental con cardinalidad numerable. Como se ilustra a continuación.

**Teorema 2.9.** *Sean $\mathscr{L}$ un lenguaje numerable, $\Sigma$ un conjunto de $\mathscr{L}$-enunciados y $\mathfrak{B}$ una $\mathscr{L}$-estructura. Si $\mathfrak{B} \models \Sigma$ y $|\mathfrak{B}| \geq \aleph_0$, entonces existe una $\mathscr{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$ y $|\mathfrak{A}| = \aleph_0$.*

El teorema de Löwenheim-Skolem tiene dos versiones. Ya presentamos la versión descendente, pero podemos obtener una versión ascendente.

**Teorema 2.10** (Löwenheim-Skolem ascendente)**.** *Si $\Sigma$ es un conjunto de enunciados de primer orden con un modelo infinito, entonces $\Sigma$ tiene modelos de cardinalidad arbitrariamente grande.*

La fortaleza de los teoremas de Löwenheim-Skolem abren paso, inadvertidamente, a una debilidad expresiva: la lógica de primer orden es incapaz de distinguir entre infinitos. Específicamente, en la lógica de primer no podemos encontrar un enunciado que exprese cardinalidades concretas. Sin duda, si $\mathfrak{A} \models \varphi$ es un modelo infinito, entonces existe un modelo $\mathfrak{B} \models \varphi$ de cardinalidad más grande, en ocasiones uno de cardinalidad más pequeña. Así que, ningún enunciado $\varphi$ permite decidir si un modelo u otro es más grande. Otras situaciones que no se pueden expresar en primer orden son las siguientes.

*Ejemplo* 7. Usaremos el lenguaje de la teoría de grupos $\mathscr{L}_G$, y $\mathscr{L}_F = \{R\}$ el de la teoría de gráficas, donde $R$ es un símbolo de 2-relación.

- No es posible encontrar un $\mathscr{L}_G$-enunciado $\varphi$ tal que $\mathfrak{G} \models \varphi$ si y solamente si $\mathfrak{G}$ es un grupo finito.
- No es posible encontrar un $\mathscr{L}_G$-enunciado $\varphi$ tal que $\mathfrak{G} \models \varphi$ si y solamente si todo elemento de $\mathfrak{G}$ tiene orden finito. Es decir, no podemos expresar que un grupo sea de torsión. Esto se puede demostrar utilizando el teorema de compacidad.
- No existen enunciados o conjuntos de enunciados en el lenguaje $\mathscr{L}_F$ que permitan decir que una gráfica tiene una cantidad par o impar de vértices.
- En el lenguaje $\mathscr{L}_F$ no se puede dar un conjunto de enunciados que describan la noción de trayectoria finita en una gráfica.

Hemos visto que la lógica de primer orden tiene herramientas poderosas para obtener modelos de enunciados, a saber, la compacidad y los teoremas de Löwenheim-Skolem. También hemos establecido cómo estos teoremas dificultan la expresividad de la lógica de primer orden. Para enriquecer la discusión, abordaremos otra teoría de primer orden, la teoría de conjuntos **ZFE**.

## 3. Teoría de conjuntos

Todos los objetos matemáticos con los que trabajamos cotidianamente se pueden construir utilizando la noción de conjunto y es por ello que parece necesario precisar qué entendemos por un conjunto. Al abandonar la teoría intuitiva de conjuntos e introducir una axiomatización de la misma, lograremos establecer qué colecciones son conjuntos y formalizar nociones ya conocidas como unión, intersección, complemento, pareja ordenada, producto cartesiano, etc.

El lenguaje de la teoría de conjuntos también es un lenguaje formal como los que hemos tratado antes.

*Ejemplo* 8. El lenguaje de la teoría de conjuntos $\mathscr{L}_{TC}$ tiene únicamente dos símbolos de predicado: la igualdad $=$ y la pertenencia $\in$.

Las fórmulas más sencillas de $\mathscr{L}_{TC}$ son la fórmulas atómicas:

$$x_1 = x_2 \text{ y } x_1 \in x_2.$$

Como ya sabemos, a partir de las fórmulas atómicas podemos construir fórmulas más complejas utilizando conectivos lógicos y cuantificadores, por ejemplo:

$$\varphi \equiv \exists x \forall y \neg(y \in x) \text{ y } \psi(y,z) \equiv \forall x(x \in y \to x \in z).$$

Los axiomas de la teoría de conjuntos, también llamados los axiomas de Zermelo-Fraenkel junto con el axioma de elección (abreviando los axiomas de **ZFE**), son los siguientes.

- Axioma de existencia. Existe un conjunto (puede ser el conjunto vacío).
- Axioma de extensionalidad. Los conjuntos se distinguen por sus elementos.
- Axioma de comprensión. Determina subconjuntos definibles así como interseccion de conjuntos.
- Axioma del par. Permite definir conjuntos con a partir de dos conjuntos.
- Axioma de unión. Asegura la unión de conjuntos.
- Axioma de potencia. Precisa la colección de subconjuntos de un conjunto.
- Axioma de infinito. Existe un conjunto que es infinito.
- Axioma de reemplazo. Asegura que $f[x]$ sea un conjunto, siempre que $x$ lo sea y $f$ sea una función.
- Axioma de regularidad. Todo conjunto tiene elemento $\in$-mínimo.
- Axioma de elección. Permite bien ordenar un conjunto.

Cada uno de ellos puede ser expresado con un $\mathscr{L}_{TC}$-enunciado.

Contar con una teoría axiomática de conjuntos nos permite fundamentar las matemáticas; desde nociones básicas como relación, función, los sistemas numéricos, que incluyen a los número complejos $\mathbb{C}$, hasta herramientas de cursos avanzados como álgebra abstracta, análisis funcional, teoría de la medida, teoría de gráficas, o topología, en los cuales es imprescindible trabajar con nociones como la cardinalidad y usar equivalencias del axioma de elección.

Una situación ubicua en la teoría de conjuntos yace en la noción de independencia. Es decir, la existencia de enunciados conjuntistas $\varphi$ que tanto ellos como sus negaciones son compatibles con **ZFE**. Una de las cuestiones sin decidir en **ZFE** es el problema del continuo. Cantor demostró que el conjunto $\mathbb{R}$ tiene más elementos que $\mathbb{Q}$, de hecho, demostró que todo conjunto $A$ tiene menos elementos que $\mathscr{P}(A)$, el conjunto potencia de $A$. De esto se deduce que hay conjuntos arbitrariamente grandes. El problema del continuo se puede formular de la siguiente manera: ¿Existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ que tengan tamaño estrictamente menor que el conjunto de los reales, pero mayor que el de los naturales?. Usando cardinales podemos plantear el problema del continuo como sigue: ¿Cual es el ordinal $\alpha$ que satisface $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$?

Cantor conjeturó que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. A esta afirmación se le conoce como *la hipótesis del continuo* (**HC**). Hoy en día sabemos que no podemos decidir si la **HC** es cierta o falsa, en tanto trabajemos en el marco de los axiomas de **ZFE**, es decir, los axiomas de **ZFE** no son suficientes para decidir la cuestión. De hecho, podemos construir modelos, donde falle la **HC**, o en los cuales sí se sastisfaga. Por ejemplo, el universo construible de Gödel $L$ verifica la **HGC**, es decir $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Aunque este es un axioma puramente conjuntista, una hipótesis de esta naturaleza puede tener consecuencias en todas las áreas de las matemáticas como es el caso del álgebra o la topología. A continuación describiremos una situación peculiar en matemáticas, específicamente en álgebra. Por mucho tiempo permaneció sin decidirse un problema cuya formulación es puramente algebraica; nada permitía inferir que su resolución apelará a axiomas adicionales a **ZFE**, como al final resultó ser una necesidad ineludible.

Nos referimos al *problema de Whitehead*. Decimos que un grupo abeliano $A$ es un grupo de Whitehead si para todo epimorfismo $\pi : B \to A$ cuyo núcleo es isomorfo a $\mathbb{Z}$, existe un homomorfismo $\rho : A \to B$ tal que $\pi \circ \rho = Id_A$. En otras palabras, $A$ es un grupo de Whitehead si toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow B \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0$$

se escinde. Otra forma de expresar la noción de grupo de Whitehead es que el grupo $G$ es de Whitehead cuando $Ext(A, \mathbb{Z}) = 0$ . Cualquier grupo libre $F$ es un grupo de Whitehead así que el problema de Whitehead plantea la pregunta: ¿Será cierto que todo grupo de Whitehead es libre? Para grupos numerables, la respeusta es sí, pero para grupos innumerables la respuesta depende de axiomas adicionales a **ZFE**.

Todos los enunciados independientes de los axiomas de **ZFE** que se conocían hasta ese momento habían sido planteados en términos conjuntistas, por lo que fue una sorpresa que el problema de Whitehead (descrito en términos exclusivamente algebraicos) resultara ser independiente de los axiomas de **ZFE**. Shelah demostró que suponiendo los axiomas de **ZFE** + Axioma de Constructibilidad, todo grupo de Whitehead de cardinalidad $\aleph_1$ es libre. Por otra parte, demostró que suponiendo los axiomas de **ZFE** + Axioma de Martin, existe un grupo de Whitehead de cardinalidad $\aleph_1$ que no es libre [11].

Esto muestra la importancia de la teoría de conjuntos al abordar temas en los cuales no se creía que tuviera injerencia. Eventualmente sintetizaremos las primeras dos secciones, pero antes extenderemos la discusión de la primera sección. El problema de Whitehead, que se generaliza a $R$-módulos, ilustra una situación interesante en grado sumo. Por un lado, su solución requiere de axiomas adicionales a **ZFE**. Por otro lado, trabajarla en términos de teoría de modelos requiere, primero, que logremos expresar diversas nociones involucradas; es claro que esto no es posible en primer orden, por su independencia de **ZFE**, así que requerimos salir de primer orden si es que queremos tener cierto éxito.

## 4. Lógicas abstractas

Como ya vimos anteriormente, la lógica de primer orden no es capaz de expresar algunas situaciones matemáticas. En particular, hemos visto que nociones como "libre de torsión" no son tratables por medio de la lógica de primer orden, y otra que no hemos mencionado pero que es especialmente crítica es la de conjunto bien ordenado. Por lo cual es deseable tener otros ambientes lógicos que permitan mayor expresividad y así poder tratar algunas nociones medulares al álgebra. Con este fin, introducimos las lógicas abstractas.

Una lógica abstracta debe tener mayor expresividad para poder representar nociones matemáticas, sin perder la que ya teníamos en primer orden. En una lógica abstracta, también tiene sentido preguntarnos por resultados como el teorema de compacidad y el teorema de Löwenheim-Skolem. Más aún, podemos hablar de conceptos como cadenas de modelos, ultraproductos y caracterización de estructuras. En realidad, una lógica abstracta puede ser «casi cualquier cosa», pero para conseguir lo previamente dicho, sólo consideramos aquellas lógicas $\mathbb{L}$ que «extienden» a la lógica de primer orden (lógicas regulares), en este sentido escribimos $L_{\omega\omega} \leq \mathbb{L}$.

**Definición 4.1.** Una lógica abstracta es una pareja $\mathbb{L} = (L, \models_L)$, de tal suerte que $L$ es una función cuyos argumentos son conjuntos de símbolos, referidos como lenguajes $\mathscr{L}$, y cuya imagen $L(\mathscr{L})$ son clases (posiblemente propias) de enunciados. Además, $\models_L$ es una relación entre $\mathscr{L}$-estructuras y los elementos de $L(\mathscr{L})$ que satisface lo siguiente.

1. $\models_L$ se preserva respecto a isomorfismos (de $\mathscr{L}$-estructuras).
2. Para cada $\varphi \in L(\mathscr{L})$ existe $\mathscr{L}_\varphi \subseteq \mathscr{L}$ tal que $\varphi \in L(\mathscr{L}_\varphi)$.
3. La relación $\models_L$ se preserva respecto a traducciones.

Para beneficio del lector, explicamos el tercer axioma. Formalmente, este axioma exige que si usamos símbolos distintos pero correspondientes, en realidad nada cambia (si expresamos una noción en español, su significado real no cambia por que la traduzcamos al francés, o al alemán). En realidad, existen distintas formas de definir una lógica abstracta y una versión más moderna utiliza una variación del último axioma pero se modifica la clase de estructuras de otra forma. Para más detalles consúltese [20].

*Ejemplo* 9. El primer ejemplo de lógica abstracta con el que trataremos es la lógica infinitaria $L_{\omega_1\omega}$. Esta lógica permite formar conjunciones y disyunciones numerables (una cantidad menor a $\omega_1$) de fórmulas y cuantificar sobre una cantidad finita de variables. Como en todas las lógicas infinitarias (que después decribiremos), siempre usamos como base un lenguaje de primer orden $\mathscr{L}$, lenguajes formales como arriba se describieron.

Si trabajamos en el lenguaje de la teoría de grupos $\mathscr{L}_G$ podemos formar el enunciado

$$\varphi \equiv \bigvee_{n\in\omega} \exists x_1,\dots,x_n \forall y(y = x_1 \vee \cdots \vee y = x_n).$$

Los grupos que son modelos de $\varphi$ son precisamente los grupos finitos, es decir, $\varphi$ es un enunciado que caracteriza a todos los grupos de orden finito. Recordemos que la lógica de primer orden no era capaz de expresar tal enunciado.

Es precisamente el ejemplo 9 el que nos conduce a definir las lógicas infinitarias.

**Definición 4.2.** Sean $\kappa$ y $\lambda$ cardinales infinitos. La lógica infinitaria $L_{\kappa\lambda}$ es aquella que permite formar conjunciones y disyunciones de una cantidad menor a $\kappa$ de fórmulas y cuantificar sobre una cantidad menor a $\lambda$ de variables.

En estas lógicas es posible definir grupos de torsión, los conjuntos $H_\lambda$, y una noción imprescindible: conjunto bien ordenado, lo cual es posible en $L_{\omega_1\omega_1}$. Dados dos cardinales tales que $\kappa \geq \lambda$, en $L_{\kappa\lambda}$ podemos expresar que la fórmula $\varphi$ tiene $\mu < \lambda$ testigos por medio del siguiente enunciado,

$$\exists \vec{x}\left(\bigwedge_{\xi\neq\zeta<\mu} x_\xi \neq x_\zeta \wedge \bigwedge_{\xi<\mu} \varphi(x_\xi)\right),$$

donde $\vec{x}$ tiene longitud $\mu$. Por tanto podemos expresar cualquier cardinalidad estrictamente menor que $\lambda$. Pero no es necesario ir hasta una lógica infinitaria para expresar cardinalidades; también se puede lograr por medio de *cuantificadores generalizados*, lo que nos da motivo para introducir nuevas lógicas abstractas. A saber, mediante un *cuantificador de cardinalidad* el cual ilustramos mediante el siguiente ejemplo. Sea $L(Q_1)$ la menor extensión de primer orden que además satisface la siguiente regla de formación de fórmulas: cuando $\varphi(x) \in L(Q_1)$ entonces $Q_1 x\varphi(x)$. Para terminar la definición de $L(Q_1)$ debemos establecer la intepretación de fórmulas. La fórmula $Q_1 x\varphi(x)$ expresa que existen al menos $\omega_1$ testigos para la fórmula $\varphi$. Más adelante, trataremos la *lógica estacionaria*, que es otra lógica regular que extiende $L(Q_1)$.

Note que cuando $\kappa = \omega = \lambda$, la lógica infinitaria $L_{\kappa\lambda}$ es simplemente la lógica de primer orden. He aquí la razón por la cual es usual denotar a la lógica de primer orden como $L_{\omega\omega}$.

Aunque el ejemplo 9 muestra que hemos ganado expresividad al permitir la disyunción de una cantidad numerable de fórmulas, al trabajar con lógicas infinitarias podemos perder valiosos resultados como los teoremas de compacidad y Löwenheim-Skolem, tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

*Ejemplo* 10. Si $\mathscr{L}$ es un lenguaje que contiene a los símbolos de constante $c_0, c_1, \dots, c_\omega$, entonces el conjunto de enunciados

$$\left\{\forall x \bigvee_{n\in\omega} (x = c_n)\right\} \cup \{c_\omega = c_n : n \in \omega\}$$

es finito satisfacible, pero no tiene modelo. Más aún, el enunciado $\forall x \bigvee_{n\in\omega}(x = c_n)$ tiene modelos numerables, pero no tiene modelos de cardinalidad mayor a $\aleph_0$.

Este ejemplo muestra que las lógicas infinitarias no necesariamente satisfacen los teoremas de compacidad y Löwenheim-Skolem. De hecho, Lindström caracterizó a la lógica $L_{\omega\omega}$ como la lógica más expresiva que satisface el teorema de compacidad y el teorema de Löwenheim-Skolem. Esto significa que si $\mathbb{L}$ es una lógica con $L_{\omega\omega} \leq \mathbb{L}$, tal que $\mathbb{L}$ satisface el teorema de compacidad y el teorema Löwenheim-Skolem ascendente, entonces $L_{\omega\omega} = \mathbb{L}$.

La pérdida de compacidad y/o el teorema de Löwenheim-Skolem podría hacernos creer que considerar lógicas abstractas distintas de $L_{\omega\omega}$ no tiene sentido. Ciertamente la pérdida es enorme, pero la ganacia en expresibilidad puede ser también considerable; por tanto, requerimos establecer compromisos entre las pérdidas y las ganancias. Más aún, para ciertas lógicas existen herramientas que atenuan la ausencia de compacidad.

La primera de ellas es la de *propiedad de consistencia*. Con la intención de subsanar la falta del teorema de compacidad para la lógica $L_{\kappa\omega}$, $\kappa > \omega$ (incluso también para ciertas lógicas $L_{\kappa\lambda}$), se introducen las propiedades de consistencia. A grandes rasgos, una propiedad de consistencia $S$ es una familia de conjuntos de enunciados que satisfacen ciertas propiedades de cerradura. Para ver con detalle dichas propiedades referimos al lector a [12]. Estas propiedades de cerradura inducen un método de construción de modelos llamado el *método de Henkin*. La idea básica de este método es dotar a los símbolos puramente sintácticos de estructura semántica a través de una relación de equivalencia. Específicamente, se define una relación de equivalencia entre los términos del lenguaje lo que permite generar una estructura. Este es el contenido del *teorema de existencia de modelos*, que asegura que cualquier elemento de una propiedad de consistencia $S$ tiene modelo, por lo que para verificar que un conjunto de enunciados $\Sigma$ tiene modelo, basta verificar que pertenence a alguna propiedad de consistencia, en lugar de probar que $\Sigma$ es finitamente satisfacible.

El ejemplo 10 muestra que no podemos utilizar el teorema de compacidad en $L_{\omega_1\omega}$ de la misma forma en que lo hacemos en $L_{\omega\omega}$. Para aterrizar las ideas anteriores y mostrar la importancia de las propiedades de consistencia, vamos a concentrarnos en algunos resultados para la lógica infinitaria $L_{\omega_1\omega}$ que se presentan en [13].

Dado un lenguaje $\mathscr{L}$, podemos controlar la cantidad de fórmulas de la lógica $L_{\omega_1\omega}$ mediante un conjunto $\mathscr{A}$.

**Definición 4.3.** Sea $\mathscr{A}$ un conjunto, definimos $L_{\mathscr{A}}$ como el conjunto de fórmulas de la lógica $L_{\omega_1\omega}$ que pertenecen a $\mathscr{A}$, es decir,

$$L_{\mathscr{A}} = L_{\omega_1\omega} \cap \mathscr{A}.$$

**Definición 4.4.** Sea $\mathscr{A}$ un conjunto. Decimos que $L_{\mathscr{A}}$ es un fragmento de $L_{\omega_1\omega}$ si se cumplen las siguientes condiciones.

(a) $L_{\mathscr{A}}$ contiene a todas la fórmulas atómicas.
(b) Si $\varphi, \psi \in L_{\mathscr{A}}$, entonces $\varphi \wedge \psi \in L_{\mathscr{A}}$ y $\neg\varphi \in L_{\mathscr{A}}$.
(c) $\varphi \in L_{\mathscr{A}}$ y $x \in \mathscr{A}$, entonces $\exists x\varphi \in L_{\mathscr{A}}$.
(d) $L_{\mathscr{A}}$ es cerrado bajo subfórmulas.
(e) Si $\Phi \subseteq L_{\mathscr{A}}$ y $\Phi \in \mathscr{A}$, entonces $\bigwedge \Phi \in L_{\mathscr{A}}$.

**Teorema 4.5** (Teorema de compacidad de Barwise)**.** *Sean $\mathscr{A} \subseteq H_{\omega_1}$ un conjunto admisible numerable y $X \subseteq L_{\mathscr{A}}$ un conjunto de enunciados $\Sigma_1$ en $\mathscr{A}$. Si todo $x$ subconjunto de $X$ que pertenezca a $\mathscr{A}$ tiene modelo, entonces $X$ tiene modelo.*

**Teorema 4.6.** *Sean $T$ un conjunto numerable de enunciados de $L_{\omega_1\omega}$ y supongamos que el lenguaje contiene dos símbolos de predicado $U$ (unario) y $<$ (binario). Si para cada $\alpha < \omega_1$, $T$ tiene un modelo $\mathfrak{A} = \langle A, U, <, \dots \rangle$ tal que $<$ ordena linealmente a $U$ y $\langle \alpha, < \rangle \subseteq \langle U, < \rangle$, entonces*

*$T$ tiene un modelo $\mathfrak{B} = \langle B, V, <, \dots \rangle$ tal que $<$ ordena linealmente a $B$ y $\langle V, < \rangle$ contiene una copia de los números racionales.*

Una consecuencia de este teorema es que la noción de buen orden no se puede expresar con un enunciado de $L_{\omega_1\omega}$. Más adelante discutiremos que esto no se puede expresar en ninguna lógica infinitaria con cuantificación finita. Puesto que una consecuencia del teorema de compacidad de primer orden es la *omisión de tipos* y en $L_{\omega_1\omega}$ falla el teorema de compacidad (general), no se puede aspirar a derivar un teorema de omisión de tipos fiel a su versión de primer orden. Sin embargo, utilizando propiedades de consistencia, se logra la siguiente versión del teorema de omisión de tipos.

**Teorema 4.7.** *Sean $L_{\mathscr{A}}$ un fragmento numerable de $L_{\omega_1\omega}$, $T \subseteq L_{\mathscr{A}}$ un conjunto de enunciados y, para cada $n < \omega$, $\Phi(x_1 \dots, x_{p_n})$ un conjunto de fórmulas de $L_{\mathscr{A}}$ con a lo sumo $x_1 \dots, x_{p_n}$ como variables libres. Supongamos que*

*(a) $T$ tiene un modelo y*

*(b) para cada $n < \omega$ y cada fórmula $\psi(x_1, \dots, x_{p_n}) \in L_{\mathscr{A}}$, si $T \cup \{(\exists x_1, \dots, x_{p_n})\psi\}$ tiene modelo, entonces existe $\varphi \in \Phi_n$ de tal forma que $T \cup \{\exists x_1, \dots, x_{p_n}(\psi \wedge \varphi)\}$ también tiene modelo.*

*Entonces*

$$T \cup \left\{ \bigwedge_{n<\omega} \forall \vec{x} \bigvee_{\varphi \in \Phi_n} \varphi(\vec{x}) \right\}$$

*tiene modelo.*

Todo lo anterior ha sido hecho para la lógica $L_{\omega_1\omega}$. El paso natural es extenderlo para las lógicas infinitarias $L_{\kappa\omega}$, con $\kappa > \omega_1$. En [12] se define, para cada cardinal regular $\kappa > \omega$, la noción de $\kappa$-propiedad de consistencia como una familia de conjuntos de enunciados de $L_{\kappa\omega}$ que satisfacen ciertas propiedades de cerradura. Con esta noción de $\kappa$-propiedad de consistencia, se puede extender (en cierto sentido) el teorema 4.6 a $L_{\kappa\omega}$, para $\kappa$ un cardinal regular mayor a $\omega_1$. Por otra parte, en [21] se demuestra un teorema de omisión de tipos para la lógica $L_{\kappa\omega}$.

Las propiedades de consistencia es una forma de generar modelos para la lógica infinitaria, pero no es la única forma de hacer teoría de modelos infinitaria. Otra vía es independiente de los axiomas de **ZFE** y se basa en ciertos *grandes cardinales*. Dado un cardinal $\kappa$, podemos preguntarnos qué tan grande debe ser $\kappa$ para que la lógica $L_{\kappa\omega}$ recupere cierto grado de compacidad. Esta pregunta da lugar a dos nociones de grandes cardinales.

**Definición 4.8.** Sea $\kappa$ un cardinal no numerable.

1. $\kappa$ es *compacto débil* si para cualquier conjunto $\Sigma$ de enunciados de $L_{\kappa\omega}$ con $|\Sigma| \leq \kappa$, $\Sigma$ tiene un modelo siempre que todo subconjunto de $\Sigma$ de cardinalidad menor a $\kappa$ tenga modelo.
2. $\kappa$ es *compacto fuerte* si para cualquier conjunto $\Sigma$ de enunciados de $L_{\kappa\omega}$, $\Sigma$ tiene un modelo siempre que todo subconjunto de $\Sigma$ de cardinalidad menor a $\kappa$ tenga modelo.

Por tanto, es posible recuperar algún grado de compacidad, siempre que estemos dispuestos a suponer axiomas adicionales a nuestro marco teórico que es **ZFE**. Esto subsana, de forma parcial, los teoremas de Lindström en una dirección.

Ahora enfoquémonos en el teorema de Löwenheim-Skolem ascendente. En el ejemplo 10 exhibimos un conjunto de enunciados de la lógica $L_{\omega_1\omega}$ que tiene modelos numerables pero no tiene modelos de tamaño mayor a $\aleph_0$, en otras palabras, el teorema de Löwenheim-Skolem ascendente es falso para $L_{\omega_1\omega}$. Detengámonos por un momento en la lógica infinitaria $L_{\omega_1\omega}$. En [13] se demuestra que para cada $\alpha < \omega_1$, existe un enunciado $\varphi$ de $L_{\omega_1\omega}$ que tiene un modelo de cardinalidad $\beth_\alpha$, pero no tiene modelos de cardinalidad mayor a $\beth_\alpha$. Esto no debe ser sorprendente, pues ya hemos exhibido un ejemplo que muestra que el teorema de Löwenheim-Skolem ascendente es falso. En [13], el autor utiliza una propiedad de consistencia para demostrar que si $\Sigma$ es un conjunto de fórmulas de $L_{\omega_1\omega}$ que tiene un modelo de cardinalidad $\beth_{\omega_1}$, entonces $\Sigma$ tiene modelos de tamaño $\kappa$, para todo cardinal $\kappa > \beth_{\omega_1}$. Entonces $\beth_{\omega_1}$ es el cardinal a partir del cual se puede verificar el teorema de Löwenheim-Skolem ascendente para $L_{\omega_1\omega}$. Esta discusión sugiere la siguiente definición.

**Definición 4.9.** Sean $\kappa$, $\lambda$ cardinales. Decimos que el *número de Hanf* de una lógica abstracta $L$ es el primer cardinal a partir del cual se puede verificar el teorema de Löwenheim-Skolem ascendente para cualquier enunciado en $L$.

Los cardinales compactos fuertes tienen propiedades de números de Hanf para lógicas infinitarias. Pero, otra noción cardinal que se relaciona con la teoría de modelos de la lógica infinitaria es la de *cardinal inefable*.

**Definición 4.10.** Decimos que un cardinal $\kappa$ es inefable si para cualquier sucesión $\{S_\alpha : \alpha < \kappa\}$, con $S_\alpha \subseteq \alpha$ para cada $\alpha < \kappa$, existe $S \subseteq \kappa$ de tal suerte que

$$\{\alpha < \kappa : S_\alpha = S \cap \alpha\} \text{ es un conjunto estacionario de } \kappa.$$

Si $\mu < \kappa$, entonces $\kappa$ es inefable exactamente cuando a una sucesión arbitraria $(\mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \kappa)$ de $\mathscr{L}$-estructuras, con $|\mathscr{L}| < \kappa$ y que es continua en los ordinales límite, le podemos encontrar un conjunto estacionario $S \subseteq \kappa$ de tal manera que si $\alpha, \beta \in S$ y $\alpha < \beta$ entonces $\mathfrak{A}_\alpha \preceq_{L_{\mu\mu}} \mathfrak{A}_\beta$. Particularmente, $\bigcup_{\alpha \in S} \mathfrak{A}_\alpha$ es una extensión de cada $\mathfrak{A}_\alpha$ para $\alpha \in S$. Esto nos dice que $\kappa$ atestigua el teorema de Löwenhiem-Skolem ascendente para $\kappa$, siempre que tengamos dicha sucesión de estructuras. De hecho, si $\kappa$ es inefable y $\mu < \kappa$ entonces el número de hanf de cualquier $L_{\mu\omega}$ es estrictamente menor a $\kappa$.

Más adelante, trataremos con problemáticas sobre la expresividad en lógicas infinitarias $L_{\kappa\omega}$, para $\kappa$ un cardinal infinito, específicamente, trataremos la expresividad de grupos libres respecto a lógicas infinitarias más poderosas. Esto nos conduce a pensar en alguna lógica que extienda a las anteriores, para lo que utilizaremos a $L_{\infty\omega}$ para denotar a la lógica que permite formar conjunciones y disyunciones arbitrariamente grandes (pero bien definidas) de fórmulas y cuantificar sobre una cantidad finita de variables, es decir,

$$L_{\infty\omega} = \bigcup\{L_{\kappa\omega} : \kappa \text{ es un cardinal infinito}\}.$$

De manera similar, denotamos con $L_{\infty\infty}$ a la lógica que permite formar conjunciones y disyunciones arbitrariamente grandes de fórmulas y cuantificar sobre una cantidad arbitrariamente grande de variables, es decir,

$$L_{\infty\infty} = \bigcup\{L_{\kappa\lambda} : \ \kappa \text{ y } \lambda \text{ cardinales infinitos}\}.$$

Estas dos lógicas infinitarias serán fundamentales para el análisis de estructuras algebraicas. Tanto para dar condiciones necesarias y suficientes de $L_{\infty\kappa}$-equivalencia entre grupos, como para caracterizaciones de ciertas nociones algebraicas.

## 5. Grupos Libres y Lógica Infinitaria

A lo largo de esta sección, todo grupo será un grupo abeliano. Retomamos nuestra discusión sobre la expresividad de nociones algebraicas específicas. Ahora nos enfocaremos en los grupos libres.

**Definición 5.1.** Decimos que un grupo $F$ es libre si existe $X \subseteq F$ no vacío que satisface las siguientes condiciones.

1. $F = \langle X \rangle$.

2. Para cualesquiera $x_1,\dots,x_n \in X$ y $n_1,\dots,n_k \in \mathbb{Z}$, si $n_1x_1+\cdots+n_kx_k = 0$, entonces $n_i = 0$ para todo $i \in \{1,\dots,k\}$.

Aquí $\langle X\rangle$ representa al subgrupo de $F$ generado por $X$. Cuando $X$ satisface los incisos 1. y 2. se le llama una base de $F$.

Usando la definición, no siempre es sencillo determinar si un grupo es libre. El siguiente teorema establece condiciones equivalentes para un grupo libre que nos pueden ayudar a comprobar si un grupo es libre.

**Teorema 5.2.** *Las siguientes condiciones son equivalentes para un grupo $F$.*

1. *$F$ es libre.*
2. *$F$ es la suma directa interna de una familia de grupos cíclicos infinitos.*
3. *$F$ es isomorfo a una suma directa de copias de $\mathbb{Z}$.*

Nos preguntamos si existe una lógica adecuada en la cual podamos expresar el concepto de grupo libre, por supuesto, el lenguaje en el que trabajaremos será el lenguaje de la teoría de grupos. Debido a que no es posible encontrar una fórmula de $L_{\omega\omega}$ que defina a la clase de los grupos libres, el siguiente paso es intentar encontrar dicha fórmula en alguna lógica infinitaria. Decimos que un grupo $G$ es $\kappa$-libre ($\kappa$ un cardinal innumerable) cuando todo subgrupo de $G$ de tamaño $< \kappa$ es libre. Aquí, libre se puede sustituir por otras nociones algebraicas como sin torsión, proyectivo, localmente proyectivos, etc.

**Teorema 5.3.** *Si $G$ es un grupo libre con una base numerable, entonces ocurre lo siguiente*

$$H \equiv_{L_{\infty\omega}} G \Longleftrightarrow H \textit{ es } \omega_1\textit{-libre}.$$

Este teorema pareciera indicar que la noción de grupo libre es definible en la lógica infinitaria. Pronto veremos que el escenario es mucho más complejo, pero de entrada podemos dar una respuesta parcial en la dirección negativa.

*Ejemplo* 11. Sean $I$ un conjunto infinito, $G = \bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}$ y $H = \prod_{i\in I}\mathbb{Z}$. Queda claro que $G$ es un grupo libre, mientras que $H$ no lo es (referimos al lector a [1] para una prueba de que $H$ no es libre). Sin embargo,

$$G \equiv_{L_{\infty\omega}} H.$$

Esto muestra que la noción de grupo libre no se puede definir en la lógica $L_{\infty\omega}$. Esto contrasta con el teorema 5.3 que dice que al menos se puede aproximar. La pieza clave es que no todo grupo $\omega_1$-libre es un grupo libre. De hecho, el teorema 5.3, se puede extender de tal forma que $H$ es $\kappa^+$-libre exactamente cuando existe un grupo libre $G$ con una base de tamaño $\kappa$ tal que

$$G \equiv_{L_{\infty\kappa}} H.$$

Así que mientras más grande sea el cardinal $\kappa$, mayor posibilidad existe de definir la noción de grupo libre mediante una fórmula. Esto no significa que los grupos libres puedan ser definibles en $L_{\infty\infty}$. Como adelantamos previamente, la cuestión es más complicada. En la siguiente sección veremos que sí existe un cardinal $\kappa$ de tal suerte que todo grupo $\kappa$-libre es libre. Pero esta condición es independiente de la teoría **ZFE**, puesto que una solución positiva involucra nociones de grandes cardinales como compacto débil, compacto fuerte y fuerte.

**Teorema 5.4** ([10]). *Sea $R$ un DIP con $|R| < \kappa$.*

1. *Si $M$ es un $R$-módulo $\kappa$-libre de cardinalidad $\kappa$ y $\kappa$ es compacto débil, entonces $M$ es libre.*
2. *Si $M$ es un $R$-módulo $\kappa$-libre de cardinalidad $\geq \kappa$ y $\kappa$ es un cardinal compacto fuerte, entonces $M$ es libre.*
3. *Si $M$ es un $R$-módulo $\kappa$-libre de cardinalidad $\geq \kappa$ y $\kappa$ es fuerte, entonces $M$ es libre.*

El resultado anterior se puede extender a otras nociones, si cambiamos la propiedad de ser libre por alguna noción adecuada, y se obtienen los resultados análogos con la misma clase de grandes cardinales; dichas propiedades se discutirán en la siguiente sección. En general, la cuestión sobre la definibilidad de grupos libres es independiente de la teoría de conjuntos; ya mencionamos un resultado negativo y la independencia de los resultados positivos. Para un resultado positivo que no es independiente de **ZFE** es suficiente considerar un cardinal singular: si $M$ es un $R$-módulo ($|R| < \kappa$) $\kappa$-libre con cardinalidad $\kappa$ y $\kappa$ es singular entonces $M$ es libre. Lo análogo ocurre con la respuesta negativa, es independiente de **ZFE**.

**Teorema 5.5** ([10]). *Supongamos $V = L$. Sea $\kappa$ un cardinal que no es compacto débil, entonces existe un grupo $\kappa$-libre que no es libre.*

Es decir, con la hipótesis adicional de $V = L$ tenemos un resultado negativo. Puesto que los cardinales compactos débiles sí pueden existir en $L$, la hipótesis sobre que $\kappa$ no es compacto débil es medular. El nervus probandi de este teorema depende de un resultado en $L$ en el que se caracteriza a los cardinales compactos débiles como aquellos que reflejan conjuntos estacionarios.

**Teorema 5.6.** *Supongamos $V = L$. Los siguientes son equivalentes.*

1. *$\kappa$ es compacto débil.*
2. *Si $S \subseteq \kappa$ es estacionario, entonces existe un cardinal regular $\lambda < \kappa$ tal que $S \cap \lambda \subseteq \lambda$ es un conjunto estacionario en $\lambda$.*

Una implicación se satisface sin restriccones, cuando $\kappa$ es compacto débil, cualquier estacionario $S \subseteq \kappa$ refleja en algún cardinal regular $\lambda < \kappa$. Luego Zeman, [22], demostró que si $V = L[\bar{E}]$ donde $\bar{E}$ es una sucesión de extensores con ciertas propiedades, entonces la otra implicación se satisface. Esto es, cuando $V = L[\vec{E}]$ y $\kappa$ no es compacto débil entonces para cualquier $S \subseteq \kappa$ existe $S' \subseteq S$ estacionario que no refleja .

## 6. $\Delta$-INTERPOLACIÓN

Dada una lógica abstracta $L$ y un vocabulario $\mathscr{L}$, ésta define clases de estructuras de la forma $K = \mathrm{Mod}(\varphi)$ donde $\varphi \in L(\mathscr{L})$, es decir en $K$ viven precisamente las $L$-estructuras que satisfacen $\varphi$; estas clases de estructuras se llaman *elementales*, pero también podemos definir clases de estructuras de forma *implícita*, es decir, utilizando símbolos extra, pero sin hacer referencia directa a ellos. Esta discusión nos lleva a establecer la siguiente noción.

**Definición 6.1.** La clase $K$ de $\mathscr{L}$-estructuras es una *clase proyectiva en $L$* cuando existen $\mathscr{L}^+ \supseteq \mathscr{L}$ y $\varphi \in L(\mathscr{L}^+)$ de tal suerte que

$$K = \underbrace{\{\mathfrak{M} \restriction \mathscr{L} : \mathfrak{M} \models \varphi\}}_{=\mathrm{Mod}(\varphi)\restriction\mathscr{L}}. \tag{6.1}$$

Cuando $K$ es una clase proyectiva en $L$, escribimos $K \in \Sigma(L)$.

*Ejemplo* 12. 1. En $L = L_{\omega\omega}$ y $\mathscr{L}$ arbitrario, siempre podemos definir un orden lineal al acudir, primero, al lenguaje $\mathscr{L} \cup \{<\}$ y, segundo, al enunciado $\psi \in L(\mathscr{L} \cup \{<\})$:

$$\forall x,y,z\big((x<y \wedge y<z \to x<z) \wedge (x=y \vee x<y \vee y<x) \wedge \neg x<x \wedge (x<y \to \neg y<x)\big). \tag{6.2}$$

Esto es, la clase de órdenes lineales es *proyectiva en $L$* o bien $\Sigma(L)$.

2. En el contexto, del lenguaje de teoría de $R$-módulos $\mathscr{L}$, la clase $K$ de $R$-módulos ordenados se pueden definir de forma proyectiva,

$$K = \{M : (M,<) \models \psi^+(<)\}$$

donde $\psi^+(<)$ es como en 6.2 más los enunciados

$$\forall x,y,z(x<y\to x+z<y+z),\ \forall x,y(x<y\to -y<-x).$$

Queda claro que $\Sigma(L)$, pensada como la colección de enunciados proyectivos en $L$, genera una lógica abstracta que extiende a $L$, que resulta cerrada respecto a conjunciones, disyunciones y cuantificacion existencial. Con el fin de corroborar esto notemos que si $\varphi_i \in L(\mathscr{L}_i)$ entonces $\mathscr{L}^+ = \mathscr{L}_0 \cup \mathscr{L}_1$ es tal que $\varphi_0 \vee \varphi_1, \varphi_0 \wedge \varphi_1 \in L(\mathscr{L}^+)$, mientras que para el caso existencial es suficiente notar que éste extiende al lenguaje mediante una constante. No obstante, no es evidente que $\Sigma(L)$ sea cerrada respecto negaciones; uno se podría ver tentado a pensar que si $\psi \in L(\mathscr{L}^+)$ define proyectivamente a $K$, entonces $\neg\psi$ debe definir proyectivamente a la clase complementaria $\mathrm{Est}(\mathscr{L})-K$, donde $\mathrm{Est}(\mathscr{L})$ denota a la colección de todas las $\mathscr{L}$-estructuras. Este no es el caso porque lo que define a una clase proyectiva es el enunciado en 6.1, que consta de dos cuantificaciones existenciales *fuera de la lógica L*. En símbolos, no podemos asegurar que

$$\mathrm{Est}(\mathscr{L})-\mathrm{Mod}(\psi)\restriction\mathscr{L} = \underbrace{(\mathrm{Est}(\mathscr{L}^+)-\mathrm{Mod}(\psi))}_{=\mathrm{Mod}(\neg\psi)}\restriction\mathscr{L}.$$

*Ejemplo* 13. En $L_{\infty\omega}$ no se puede expresar el buen orden. Aún más, no se puede expresar el buen orden del forma implícita. Es decir, la clase de buenos órdenes no es $\Delta(L_{\kappa\omega})$.

Esto da lugar a la siguiente noción. Una clase $K \subseteq \mathrm{Est}(\mathscr{L})$ se dice $\Delta(L)$, siempre que tanto $K$ como $\mathrm{Est}(\mathscr{L})-K$ sean proyectivas en $L$. Esto sí asegura que $\Delta(L)$, pensado como la colección de enunciados que son $\Delta$ en $L$, sea una lógica abstracta cerrada respecto a negaciones.

Esta noción genera una nueva lógica que sí es cerrada bajo negaciones, como lo ilustra el siguiente teorema.

**Teorema 6.2.** *Existe un operador $\Delta$ que transforma lógicas abstractas en lógicas abstractas que satisface las siguientes propiedades.*

1. $L \leq \Delta(L)$.
2. $\Delta(\Delta(L)) = \Delta(L)$.
3. $L_0 \leq L_1$ *implica* $\Delta(L_0) \leq \Delta(L_1)$.

En la sección dedicada a los cuantificadores generalizados discutiremos de forma breve una presentación de los enunciados de $\Delta(L)$; para más detalles sobre el operador $\Delta$, referimos al lector a [15], [19]. Dadas estas propiedades, vemos que $\Delta$ es un operador de cercanía: intuitivamente, dicho operador aproxima la lógica de segundo orden $L^{II}$ asociada a $L$, pero sin salir formalmente de $L$. Es decir, con enunciados de $L$, construidos a partir una colección de nuevos símbolos obtenemos nuevas clases de estructuras, por eso anteriormente les llamábamos definiciones implícitas. Esta nueva colección de símbolos funge como un cuantificador de segundo orden para $L$ y, como discutiremos en la última sección, $\Delta(L)$ se puede representar utilizando cuantificadores generalizados. Existen lógicas, como primer orden, que satisfacen $\Delta(L)=L$, dichas lógicas se dicen que satisfacen $\Delta$-*interpolación*, que es una propiedad que establece un equilibrio entre semántica y sintaxis.

*Ejemplo* 14. Fijamos un anillo $R$. La clase de $R$-módulos libres es $\Sigma(L_{\infty\omega})$. Primero, nuestro lenguaje consta de tres símbolos $\{0,+,-,r(\cdot) : r\in R\}$ donde 0 es la constante que se interpeta como el elemento neutro, $+$ es la operación, $-$ es la operación de inversión y, para $r\in R$, $r(\cdot)$ es la función $x\mapsto rx$. Consideremos un nuevo símbolo $U$ y fijemos $\varphi(U)$ como el enunciado

$$\forall y \bar{\bigvee}_{n<\omega} \exists! x_1,\ldots,x_n \left[\bigwedge_{i\leq n} U(x_i) \wedge \bar{\bigvee}_{t\ \mathscr{L}\text{-término}} t(\vec{x}) = y\right];$$

donde $\bar{\bigvee}$ representa la disyunción exclusiva, es decir que se satisface la disyunción exactamante en un único disyunto. Expliquemos lo que simboliza dicha fórmula:

1. El primer cuantificador universal toma un elemento arbitrario $y$.
2. La disyunción exclusiva escoge un único natural $n$ que determinará la cantidad de elementos a escoger en $U$.
3. El cuantificador $\exists!$ escoge elementos únicos $x_1,...,x_n$.
4. El primer conyunto asegura que los elementos únicos pertenecen a $U$.
5. El segundo disyunto está formado por otra disyunción exclusiva, que se encarga de escoger un único término $t$ en el lenguaje de $R$-módulos.
6. Finalmente, la igualdad $t(\vec{x}) = y$ asegura que $y$ se representa con el término $t$ y los elementos $\vec{x}$.

Ya discutimos que los términos de lenguaje representan combinaciones lineales. Por tanto, el enunciado establece que $U$ es una base para el $R$-módulo porque cada elemento se puede escribir como combinación lineal de los elementos de $U$ y dicha combinación lineal es única, de ahí la necesidad de la disyunción exclusiva. Además, la disyunción exclusiva se puede definir en términos de la conjunción, la disyunción (inclusiva) y la negación. Con esto demostramos que *ser libre* es una expresión $\Sigma(L_{\infty\omega})$ en el lenguaje de teoría de $R$-módulos. Particularmente, la clase de grupos libres es una clase $\Sigma(L_{\infty\omega})$, en el lenguaje de teoría de grupos: $\{0,+,-\}$.

El ejemplo previo solo ilustra una parte del escenario. Puesto que el interés son las clases $\Delta$, necesitamos asegurar que la clase de los grupos que *no son libres* también es $\Delta$. En [16] se deriva la otra parte pero utilizando una condición que a primera vista parece inusual.

**Teorema 6.3.** *Las siguientes son equivalentes.*

1. *La clase de grupos libres es definible en* $L_{\infty\infty}$.
2. *La clase de grupos libres es definible en* $\Delta(L_{\infty\infty})$.
3. *La clase de grupos libres es definible en* $\Delta(L_{\infty\omega})$.
4. *Existe un cardinal* $\kappa$ *tal que* $\kappa$*-libre implica libre.*

Esto muestra la importancia del operador $\Delta$. Notamos que la condición 6.3(4) puede ser independiente de la teoría de conjuntos. Por ejemplo, ya vimos que hay grupos $\omega_1$-libres que no son libres. En la otra dirección, cuando $\kappa$ es un cardinal compacto débil y $M$ es un $R$-módulo de cardinalidad $\kappa > |R|$ que es $\kappa$-libre, entonces es libre. Si $\kappa$ es un cardinal compacto fuerte, o un cardinal fuerte, si $M$ tiene cualquier cardinalidad $> |R|$ y es $\kappa$-libre, tiene que ser libre. Extendiendo la discusión a otra clase de módulos, se sabe que si $\kappa$ es inaccesible débil pero no es ni compacto débil, ni $\omega_1$-medible, entonces existe un $R$-módulo $M$, de cardinalidad $\kappa > |R|$ que es $\kappa$*-sin torsión* pero no es un $R$-módulo sin torsión ([17]).

El teorema también manifiesta lo relevante de encontrar cardinales $\kappa$ para los cuales $\kappa$-«libre» implique «libre», pues nos asegura la definibilidad en ciertas lógicas de las clases involucradas. Mayormente, estos resultados requieren algún axioma de gran cardinal.

Esto nos lleva a considerar otras clases de $R$-módulos que aproximan a los $R$-módulos libres. Especialmente, nos interesa considerar la relación entre el operador $\Delta$, la lógica infinitaria y nociones de la forma $\kappa$-«libre», donde «libre» se refiere a alguna de las siguientes nociones.

1. proyectivo.
2. sin torsión[1].
3. localmente proyectivo.
4. Baer.

Para continuar este problema, se obtiene una caractarización fuerte de módulo libre por medio de una filtración del módulo con submódulos de menor tamaño. Formalmente, tenemos la siguiente definición.

[1]No confundir *sin torsión* con *libre de torsión*. Sin torsión traduce del inglés *torsionless* mientras que libre de torsión corresponde a *torsion free*.

**Definición 6.4.** Decimos que el $R$-módulo $M$ es *fuertemente $\kappa$-libre* si existe una sucesión $\{M_\xi : \xi < \kappa\}$ tal que

1. $|M_\xi| < \kappa$ para toda $\xi < \kappa$,
2. $M_\xi \leq M_{\xi+1} \leq M$ para toda $\xi$,
3. $M_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} M_\xi$ cuando $\lambda < \kappa$ es un ordinal límite y
4. $\{\xi < \kappa : M/M_{\xi+1}$ es $\kappa$-libre$\}$ es estacionario en $\kappa$.

Luego Eklof [7] demostró que, considerando grupos, esta noción puramente algebraica es equivalente a una noción utilizando lógicas infinitarias, donde libre es la noción usual de libre. Queda por averiguar si este resultado se puede extender a otras nociones de «libre».

**Teorema 6.5.** *$G$ es un grupo fuertemente $\kappa$-libre exactamente cuando $G \equiv_{L_{\infty\kappa}} F$, donde $F$ es algún grupo libre.*

Pasamos de una definición puramente algebraica, por medio de filtraciones, a una definición que depende de la lógica infinitaria $L_{\infty\kappa}$. El resultado previo nos permite definir nociones relacionadas.

**Definición 6.6.** Decimos que $M$ es

1. *fuertemente sin $\kappa$-torsión* si es $L_{\infty\kappa}$-equivalente a un $R$-módulo sin torsión.
2. *fuertemente $\kappa$-proyectivo* si es $L_{\infty\kappa}$-equivalente a un $R$-módulo proyectivo.
3. *fuerte y localmente $\kappa$-proyectivo local* si es $L_{\infty\kappa}$-equivalente a un $R$-módulo localmente proyectivo.
4. *fuertemente $\kappa$-Baer* si es $L_{\infty\kappa}$-equivalente un $R$-módulo Baer.

Las nociones de módulos sin $\kappa$-torsión, $\kappa$-proyectivos y locamente $\kappa$-proyectivos han sido estudiadas en [17] y [18] en torno a cardinales compactos débiles, compactos fuertes y cardinales fuertes.

Hemos visto que la lógica infinitaria se vuelve medular para nociones puramente algebraicas. La historia no termina aquí. Además de lógica infinitaria, podemos considerar la *lógica estacionaria*.

## 7. Lógica Estacionaria

La lógica estacionaria extiende a la lógica de primer orden al agregar un nuevo tipo de cuantificación $\mathfrak{aa}s$ donde $s$ es una variable de segundo orden. La interpretación intuitiva de $\mathfrak{aa}$ es *casi todos* pero su interpretación formal es compleja y depende de la noción de filtro. Al estudiar filtros es común leer que estos generan una noción de *grandeza*. Recordamos que un filtro $\mathscr{F}$ en un conjunto $X$ es un colección de subconjuntos de $X$ que es cerrada respecto a supraconjuntos e intersecciones. Es decir, si $A \subseteq X$ es grande y $A \subseteq B \subseteq X$ entonces $B$ es grande y si tenemos dos conjuntos $A, B$ grandes, entonces su intersección $A \cap B$ es grande. En general, un filtro no recoge la noción fiel de subconjunto grande puesto que $\{A \subseteq X : \{x\} \subseteq A\}$ es un filtro y es evidente que en la mayoría de los casos $\{x\}$ no es un conjunto grande. Existen ciertos filtros que sí respetan la idea de que sus elementos sean conjuntos grandes.

**Definición 7.1.** Sean $\kappa$ un cardinal, $X$ un conjunto tal que $|X| \geq \kappa$ y $C \subseteq [X]^{<\kappa} = \{s \subseteq X : |s| < \kappa\}$.

1. Decimos que $C$ es *cerrado* si para todo $\alpha < \kappa$ y toda sucesión creciente $\{s_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq C$, ocurre que $\bigcup_{\beta<\alpha} s_\beta \in C$.
2. Decimos que $C$ es *no acotado* si para cualquier $s \in [X]^{<\kappa}$ existe $t \in C$ con $t \supseteq s$.

Si $C$ es cerrado y no acotado lo llamaremos un *club*.

**Definición 7.2.** Sean $\kappa$ un cardinal, $X$ un conjunto tal que $|X| \geq \kappa$ y $S \subseteq [X]^{<\kappa}$. El conjunto $S$ es estacionario si para cada club $C \subseteq [X]^{<\kappa}$, se cumple que $S \cap C \neq \emptyset$.

*Ejemplo* 15. Sean $\kappa$ un cardinal regular no numerable y $X$ un conjunto tal que $|X| \geq \kappa$.

- Para cada $x \in X$, la familia $C_x = \{s \in [X]^{<\kappa} : x \in s\}$ es un club.
- Si $\mu$ es un cardinal y $\mu > \kappa$, entonces para cada cardinal regular $\nu < \mu$, la familia $\{s \in [\mu]^{<\kappa} : cf(\sup s) = \nu\}$ es un conjunto estacionario.

Sea $\kappa$ un cardinal regular no numerable. Probablemente el lector haya advertido la similitud que existe entre las nociones de club en $\kappa$ y club en $[\kappa]^{<\kappa}$. Recordemos que $C \subseteq \kappa$ es un club en $\kappa$ si para todo $\alpha < \kappa$ existe $\beta \in C$ tal que $\beta > \alpha$ y, para todo ordinal límite $\alpha < \kappa$ y toda sucesión $\{\beta_\gamma : \gamma < \alpha\} \subseteq C$ ocurre que $\sup\{\beta_\gamma : \gamma < \alpha\} \in C$. Se corrobora que si $C \subseteq \kappa$ es un club en $\kappa$, entonces $C \subseteq [\kappa]^{<\kappa}$ es un club. Ahora, si $C \subseteq [\kappa]^{<\kappa}$ es un club, entonces $C \cap \kappa \subseteq \kappa$ es un club en $\kappa$. De esta forma, podemos traducir las nociones club y estacionario de $\kappa$ a $[\kappa]^{<\kappa}$ y viceversa.

Algo que sabemos de la colección los clubes es lo siguiente.

**Lema 7.3.** *Si $\kappa$ es un cardinal regular y $|M| \geq \kappa$ entonces*

$$\mathscr{F}_\kappa M = \{C \subset [M]^{<\kappa} : C \text{ contiene un club}\}$$

*es un filtro $\kappa$-completo y normal y $\{N \subset [M]^{<\kappa} : N$ no es estacionario$\}$ es su ideal dual.*

Precisamente $\mathscr{F}_\kappa M$ es un filtro que sí es fiel a la intuición de grandeza que describíamos. Con estos preliminares a la mano estamos listos para definir la interpretación del cuantificador $\mathfrak{aa}$.

$$\mathfrak{M} \models \mathfrak{aa} s \varphi(s) \iff \underbrace{\{s \in [\kappa]^{<\kappa} : \mathfrak{M} \models \varphi[s]\}}_{=\varphi([\mathfrak{M}]^{<\kappa})} \in \mathscr{F}_\kappa M.$$

En palabras, $\mathfrak{aa} s \varphi(s)$ es satisfecha siempre que la colección de testigos $s$ contenga un club. Es decir, $\varphi(s)$ se satisface *en muchos lados* o *casi siempre.* Este cuantificador viene acompañado de su cuantificador dual $\mathfrak{stat} s \varphi(s) \equiv \neg \mathfrak{aa} s \neg \varphi(s)$. La interpretación de $\mathfrak{stat}$ está dada por la regla

$$\mathfrak{M} \models \mathfrak{stat} s \varphi(s) \iff \varphi([\mathfrak{M}]^{<\kappa}) \text{ es estacionario.}$$

Cuando $\omega_1 = \kappa$ entonces $L(\mathfrak{aa})$ extiende a $L(Q_1)$. En general, cuando $\kappa = \omega_{\alpha+1}$, $L(\mathfrak{aa})$ extiende a $L(Q_{\alpha+1})$. En [2], se demuestra que cuando $\kappa = \omega_1$ entonces la lógica estacionaria $L(\mathfrak{aa})$ es *numerablemente compacta*. Esto es, si $T$ es numerable y cualquier subconjunto finito de $T$ tiene un modelo, $T$ debe poseer un modelo. Recientemente extendimos el resultado de tal forma que si $\kappa^+ > \omega_1$ y $T \geq \kappa$ es finito satisfacible, entonces $T$ es satisfacible.

Ahora, fijemos el vocabulario de teoría de grupos. Sea $\kappa$ un cardinal regular y $G$ un grupo de cardinalidad $\kappa$. Una *$\kappa$-fitlración* $F$ de $G$ es una familia $F = \{G_\xi : \xi < \kappa\}$ de tal suerte que

1. $|G_\xi| < \kappa$ para toda $\xi < \kappa$,
2. $G_\xi \leq G_{\xi+1} \leq G$ para toda $\xi$,
3. $G_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} G_\xi$ cuando $\lambda < \kappa$ es un ordinal límite y
4. $G = \bigcup_{\xi<\kappa} G_\xi$.

Cualquier $\kappa$-filtración $F$ forma un club de $[G]^{<\kappa}$. Así que es un elemento de $\mathscr{F}_\kappa M$ y puesto que cualquier otro elemento de $\mathscr{F}_\kappa M$ intersecta a $F$, podemos fijar la filtración para interpretar el cuantificador $\mathfrak{aa}$ de tal suerte que solo se reconozcan elementos de la filtración. Este truco nos permite generar una teoría de modelos adecuada a nociones algebraicas. Además, por el trabajo de Kaufmann [2], se sabe que la lógica estacionaria y la lógica infinitaria no tienen una relación entre ellas. Es decir, $L(\mathfrak{aa})$ tiene enunciados que no se pueden expresar en $L_{\mu\nu}$ y $L_{\mu\nu}$ define nociones que $L(\mathfrak{aa})$ no puede reproducir. Con estos dos hechos se obtiene una teoría de modelos prolífica para estructuras algebraicas. Por ejemplo, el siguiente teorema describe una condición suficiente y necesaria para que dos grupos fuertemente $\kappa$-libres satisfagan los mismos enunciados de la versión infinitaria de la lógica estacionaria.

**Teorema 7.4** (Eklof-Mekler [9]). *Sean $G,H$ grupos de cardinalidad $\kappa^+$ y fuertemente $\kappa^+$-libres. Consideramos dos filtraciones $F_G, F_H$ de $G,H$ respectivamente. Las siguientes son equivlanetes.*

1. $G \equiv_{L^{\mathfrak{aa}}_{\infty\kappa^+}} H$.
2. *Para cualquier clase $\mathfrak{H}$ de grupos de cardinalidad $< \kappa^+$ que es cerrado respecto a isomorfismos y a la relación de equivalencia*

   *$H_0 \sim H_1$ exactamente cuando existe un grupo libre $F$ con cardinalidad $< \kappa^+$ de tal suerte que $H_0 \oplus F \cong H_1 \oplus F$,*

   *se tiene que*

$$\{\xi < \kappa^+ : G_{\xi+1}/G_\xi \in \mathfrak{H}\} \text{ es estacionario } \iff \{\xi < \kappa^+ : H_{\xi+1}/H_\xi \in \mathfrak{H}\} \text{ es estacionario.}$$

Esta teoría de modelos tiene consecuencias en álgebra homológica.

**Teorema 7.5.** *Supongamos $V = L$. Si $G$ es un grupo $\kappa$-libre de cardinalidad $\kappa$ y $H$ un grupo con cardinalidad $< \kappa$ con $\mathrm{Ext}(G,H) \neq 0$, entonces existen $2^\kappa$ grupos $\{B_i : i < 2^\kappa\}$ distintos y $h_i : H \to B_i$, $k_i : B_i \to G$ tales que*

$$0 \to H \xrightarrow{h_i} B_i \xrightarrow{k_i} G \to 0$$

*es exacta para cada $i < 2^\kappa$.*

Una consecuencia interesante de este teorema es la siguiente.

**Corolario 7.6.** *Supongamos $V = L$. Sea $G$ un grupo fuertemente $\kappa$-libre de cardinalidad $\kappa$. Si $G$ no es libre entonces existen $2^\kappa$ grupos fuertemente $\kappa$-libres $\{B_i : i < 2^\kappa\}$ de cardinalidad $\kappa$ con $B_i \equiv_{L^{\mathfrak{aa}}_{\infty\kappa}} G$.*

*Más, si $G$ es un grupo $\kappa$-libre de cardinalidad $\kappa$ y $H$ un grupo de cardinalidad $< \kappa$, entonces $\mathrm{Ext}(G,H) = 0$ o bien $|\mathrm{Ext}(G,H)| = 2^\kappa$.*

Además, con la misma hipótesis $V = L$ Eklof [8] demuestra que cuando $\kappa$ es regular y $T$ es un grupo de torsión de cardinalidad $\kappa$, entonces existe un enunciado $\psi^T \in L^{\mathfrak{aa}}_{\infty\kappa}$ tal que para cualquier grupo libre de torsión $J$ con tamaño $\kappa$

$$\mathrm{Ext}(J,T) = 0 \iff J \models \psi^T.$$

Esta serie de resultados muestra la importancia de lógicas alternativas a primer orden en el contexto de álgebra. Desde nociones de módulos hasta homología, la lógica estacionaria y la lógica infinitaria generan resultados importantes para el álgebra.

## 8. Cuantificadores Generalizados

Ya hemos tratado la noción de cuantificador generalizado utilizando varios ejemplos. Abordamos la cuantificación infinitaria, la cuantificación de cardinalidad y la cuantificación de la lógica estacionaria $L(\mathfrak{aa})$. Esta última ilustra que los tipos de cuantificaciones que se pueden idear resultan ser complejos; algo que puede parecer más natural para ciertos problemas en matemáticas como la cuantificación de cardinalidad no requiere tanta complejidad. De hecho, la cuantificación generalizada puede ser tan abstracta como a uno se le ocurra. Aunque este sea el caso general, lo evitaremos y nos concentraremos en lógicas abstractas con cuantificadores generalizados que resultan naturales para investigar nociones matemáticas.

Se sabe que la propiedad arquimediana no se puede definir en primer orden, una aplicación adecuada del teorema de compacidad. De hecho, si consideramos la lógica $L(Q_0)$ que extiende al la lógica de primer orden al considerar un cuantificador $Q_0$ cuyo objetivo es verificar la existencia de una cantidad infinita de testigos, tampoco se puede expresar la propiedad arquimediana en esta lógica. En la lógica de segundo orden $L^{II}$ sí se puede lograr y se sabe que $L_{\omega\omega} \leq L(Q_0) \leq L^{II}$. Pero la teoría de modelos de la lógica de segundo orden suele ser rígida, en el sentido que los modelos de los enunciados tienden a ser únicos. Por esta razón, $L^{II}$ es demasiado fuerte para expresar la propiedad arquimediana. Así que es natural preguntarse por alguna lógica intermedia entre $L(Q_0)$ y $L^{II}$ que logre esto. Con esta meta en mente presentamos una clase de cuantificadores generalizados.

**Definición 8.1** (Magidor-Malitz)**.** Sean $1 < n < \omega$ y $\alpha$ un ordinal; $Q^n_\alpha$ es el cuantificador que admite $n$ variables libres y cuya interpretación está dada por la fórmula,

$$\mathfrak{M} \models Q^n_\alpha x_1...x_n\varphi(x_1,...,x_n)$$
$$\text{si y solo si}$$
$$\text{existe } X \subseteq M \text{ con } |X| \geq \omega_\alpha \text{ tal que para cada } a_1,...,a_n \in X \text{ distintos, tenemos}$$
$$\mathfrak{M} \models \varphi[a_1,...,a_n].$$

Esta clase de cuantificadores son llamados de Magidor-Malitz ([14]). También son llamados cuantificadores *Ramsey* porque su función es encontrar conjuntos *homogéneos* para fórmulas $\varphi$. Además, cuando $n = 1$, $Q^n_\alpha$ genera el cuantificador de cardinalidad $Q_\alpha$ que asegura la existencia de al menos $\omega_\alpha$ testigos. Si $m < n$ entonces $L(Q^m_\alpha) \leq L(Q^n_\alpha)$ porque $Q^m_\alpha x_1...x_m\varphi(x_1,...,x_m)$ se puede expresar como $Q^n_\alpha x_1...x_n(\varphi(x_1,...,x_m) \wedge \bigwedge_{m<i\leq n} x_i = x_i)$. Esto muestra que $L(Q_0) \leq L(Q^2_0)$, de hecho $\leq$ es propia porque en $L(Q^2_0)$ ya podemos expresar que un campo real cerrado es arquimediano.

**Lema 8.2** ([4])**.** *Cuando $\alpha = 0$, en el lenguaje $\mathscr{L} = \{+,\cdot,-,0,1,<\}$, podemos expresar que* $\mathfrak{M} \models$ CRC *sea un campo real cerrado arquimediano por medio del siguiente enunciado*

$$\neg\exists x Q^2_0 yz(0 < y \wedge y < x \wedge 0 < z \wedge z < x \wedge (y - z > 1 \vee z - y > 1)).$$

En lo previo, CORC es la teoría de primer orden que expresa que una estructura es un campo ordenado y real cerrado, dirigimos al lector a [3] o [4]. Especialmente, en la última referencia, se demuestra que la teoría de campos arquimedianos real cerrados es completa. Este hecho se conocía para la teoría CORC. Así que, aunque aumentamos la expresividad de la lógica por medio de un cuantificador $Q^2_0 xy$, se sigue preservando gran parte de la teoría de modelos de primer orden. Esto es más general, en [5] se estudia la noción de un campo $\omega_\alpha$-arquimediano real cerrado y se demuestra que esta noción se puede expresar en $L(Q^2_\alpha)$ y que la teoría resultante también es completa. Todavía más, la teoría CORC es modelo completa, una noción relacionada a la completud y que también se satisface en las extensiones $L(Q^2_\alpha)$.

**Definición 8.3.** Dada una lógica abstracta $L$ y una $L$-teoría $T$, decimos que la teoría es *modelo completa* si para cualesquiera $\mathfrak{A},\mathfrak{B} \models T$ con $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ se tiene $\mathfrak{A} \preceq_L \mathfrak{B}$.

Si la teoría tiene eliminación de cuantificadores entonces la teoría es tanto completa como modelo completa. Aquí decimos que $T$ tiene eliminación de cuantificadores, cuando para cualquier fórmula $\varphi \in L$, existe una fórmula libre de cuantificadores $\vartheta$ con

$$T \models \varphi \leftrightarrow \vartheta.$$

Precisamente, los métodos de [4] y [5] muestran que la teoría de campos $\omega_\alpha$-arquimedianos real cerrados tienen eliminación de cuantificadores. Esto corrobora que la teoría es modelo completa, no solamente completa. Con esto vemos que la lógica $L(Q^n_\alpha)$, para $n > 1$, es la lógica intermedia que buscábamos para expresar la propiedad arquimediana, y también es adecuada para el estudio de la teoría de modelos de campos real cerrados puesto que conserva muchas de las virtudes asociadas a la teoría de primer orden de campos real cerrados.

Hasta este punto hemos considerado diferentes tipos de cuantificadores. El cuantificador $\mathfrak{a}\mathfrak{a}$ es un cuantificador de segundo orden, hemos mostrado el uso de cuantificadores de cardinalidad y su variación a $n$ dimensiones, es decir un solo cuantificador cuantifica $n$ variables distintas. Otro tipo de cuantificación cardinal involucra no solo varias variables, también varias fórmulas. El *cuantificador de Härtig H* o de *equicardinalidad* cuantifica sobre dos variables y sobre dos fórmulas. Si $\psi(x), \varphi(y) \in L(H)$ entonces $Hxy(\varphi(x), \psi(y)) \in L(H)$ y su interpretación está dada por la siguiente prescripción

$$\mathfrak{M} \models Hxy(\varphi(x), \psi(y)) \iff |\{a \in M : \mathfrak{M} \models \varphi[a]\}| = |\{a \in M : \mathfrak{M} \models \psi[a]\}|.$$

Siguiendo este modelo de cuantificación, podemos definir una variación obvia de $H$. La lógica $L(J)$ se define de forma análoga a $L(H)$ con la diferencia en la interpretación dada por la siguiente regla

$$\mathfrak{M} \models Jxy(\varphi(x), \psi(y)) \iff |\{a \in M : \mathfrak{M} \models \varphi[a]\}| \leq |\{a \in M : \mathfrak{M} \models \psi[a]\}|.$$

Si consideramos el enunciado

$$Jxy(\varphi(x), \psi(y)) \wedge Jyx(\psi(y), \varphi(x))$$

vemos que el cuantificador de Härtig se puede definir en $L(J)$, esta observación demuestra que $L(H) \leq L(J)$.

**Teorema 8.4** ([6])**.** *La $L(J)$-teoría de campos real cerrados tiene eliminación de cuantificadores. Por tanto es completa y modelo completa.*

Por tanto, la teoría de modelos de las lógicas $L(H), L(J)$ preservan las bondades de la teoría de modelos para campos real cerrados estudiada desde la lógica de primer orden.

Esta serie de ejemplos muestra una cantidad abundante de variantes para formar cuantificadores generalizados. En general, se pueden formar cuantificadores que admiten $n$ fórmulas y $m$ variables, incluso cuando $n, m$ son cardinales infinitos. Este método permite una presentación de la lógica $\Delta(L)$ por medio de cuantificadores generalizados asociados a las clases $\Delta$ en $L$. A cada clase $K$ que es $\Delta$ en $L$ le asociamos un cuantificador $Q^K$ y hacemos $\Delta(L) = L(Q^K : K \in \Delta(L))$. Puesto que la clase es $\Delta$ esto asegura que $\neg Q^K$ también define un cuantificador y $\Delta(L)$ resulta una lógica regular. Evitamos una exposición más detallada de esto porque extendería el artículo y sería agobiante para el lector que no posea las nociones adecuadas de teoría de modelos.

## REFERENCIAS


[1] R. Baer, *Abelian groups without elements of finite order*. Duke Math. J. 9, 1937, págs. 68-122.
[2] J. Barwise, M. Kaufmann y M. Makkai, *Stationary Logic*
[3] C. C. Chang y H. J. Keisler, *Model Theory*.
[4] J. Cowles, *The theory of Archimedean real closed fields*. Fund. Math. 103, 1979, págs. 129-146.
[5] J. Cowles, *Generalized Archimedean fields and logics with Malitz quantifiers.* Fund. Math. 112, 1982, págs. 45-59.
[6] J. Cowles, *The Henkin Quantifier and Real Closed Fields*, Zetischr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. Vol. 25, 1981, págs. 549-555.
[7] P. C. Eklof, *Infinitary equivalence of abelian groups*, Fund. Math. 81, 1974, págs 305-314.
[8] P. C. Eklof, *Applications of Logic to the Problem of Splitting Abelian Groups*, Logic Colloquium 76, North-Holland Publishing Company, 1977, págs. 287-299.
[9] P. C. Eklof y A. H. Mekler, *Infinitary Stationary Logic and Abelian Groups*, Fund. Math. , 1977, págs. 287-299.
[10] P. Eklof, A. Mekler, *Almost free modules*, Revised Ed., North-Holland, Amsterdam, 2002
[11] P. C. Eklof, *Whitehead's problem is undecidable*, Amer Math. Monthly 83, 1976, págs 780-788.
[12] J. Green, *Consistency properties for finite quantifier languages*, In Infinitary Logic: In Memoriam Carol Karp, Ed. G. Kueker, Lecture Notes in Mathematics # 492, Springer-Verlag, Berlin, 73-123, 1975.
[13] H. Keisler, *Model theory for infinitary logic: logic with countable conjunctions and finite quantifiers*, North-Holland, Amsterdam, 1971.
[14] Madigor y Malitz, *Compactness*.
[15] J. A. Makowsky, S. Shelah y J. Stavi, *$\Delta$-Logics and Generalized Quantifiers*, Annals of Mathematical Logic 10, 1976, págs. 155-192.
[16] A. H. Mekler, *Applications of Logic to Group Theory*, tesis doctoral, Universidad de Stanford, 1976.
[17] J. A. Nido Valencia, H. G. Salazar Pedroza y L. M. Villegas Silva, *Compactness Phenomena around the class of Locally Projective Modules.* Houston Journal of Mathematics Vol. 46, No. 4, 2020, págs. 859-881.

[18] J. A. Nido Valencia, H. G. Salazar Pedroza y L. M. Villegas Silva, *"Free" Modules and some Large Cardinals*, propuesto para publicación
[19] J. Väänänen, *Set-Theoretic Definability of Logics* en J. Barwise y S. Feferman (editores), *Model-Theoretic Logics*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, 1985, págs. 597-644.
[20] E. A. Valenzuela Nuncio, *Compactness, Ineffability and Combinatorics around Abstract Logics*, en preparación.
[21] E. A. Valenzuela Nuncio y L. M. Villegas Silva, *Developments from a consistency property for the infinitary logic* $L_{\kappa\omega}$, en preparación.
[22] M. Zeman, *More fine structural global square sequences.* Arch. Math. Logic 48(2009), 825-835.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA IZTAPALAPA, D.F., MÉXICO, **E-MAIL: ADRIAN.GAQ@GMAIL.COM, GAR_ED_93@HOTMAIL.COM, VILLEGAS63@GMAIL.COM**,