# ON THE TWO CARDINAL PROBLEM IN INFINITARY LOGICS AND RELATED QUESTIONS

ANDRÉS VILLAVECES N., LUIS M. VILLEGAS S.

Abstract. In this paper we solve the two-cardinal problem with ommiting types in certain infinitary logics. We use this result and end-extensions to generalize several results from $L_{\omega_1\omega}$ to $L_{\lambda^+\omega}$.

## 1. Introduction

En [AgHeVi16] se propone una nueva propiedad de consistencia para los lenguajes infinitarios $L_{\lambda^+\omega}$; ahí mismo se desarrollan los teoremas de existencia de modelos, de omisión de tipos y la obtención de un end-extension, mediante la propiedad de consistencia. En este trabajo continuamos presentando aplicaciones de la propiedad de consistencia apoyándonos en esos resultados.

Dado un lenguaje de primer orden $\mathscr{L}$ que tiene al menos un símbolo de predicado unario $U$ y $\mathbb{A}$ un fragmento de cardinalidad $\lambda$ regular de $L_{\lambda^+\omega}(\mathscr{L})$, decimos que la $\mathbb{A}$-estructura $\mathfrak{A}$ tiene tipo $(\mu, \nu)$, donde $\mu, \nu$ son cardinales infinitos, si el universo de $\mathfrak{A}$ tiene cardinalidad $\mu$ y la interpretación de $U$ en $\mathfrak{A}$ tiene cardinalidad $\nu$. El problema de los dos cardinales es el siguiente: Sea $\boldsymbol{T}$ una $\mathbb{A}$-teoría. Escribimos

$$(\mu, \nu) \twoheadrightarrow_{\mathbb{A}} (\kappa, \lambda),$$

para significar que siempre que $\boldsymbol{T}$ tenga un modelo $\mathfrak{A}$ de tipo $(\mu, \nu)$, existe un modelo $\mathfrak{B}$ de $\boldsymbol{T}$ de tipo $(\kappa, \lambda)$ $\mathbb{A}$-elementalmente equivalente a $\mathfrak{A}$. Si tomamos el caso particular

$$(\mu^{(n)}, \mu) \twoheadrightarrow_{\mathbb{A}} (\kappa^{(n)}, \kappa),$$

donde el superíndice $(n)$ significa el $n$-ésimo cardinal sucesor, se conoce como el Gap $n$ problem. En el caso $\mathbb{A} = L_{\omega\omega}$, escribimos simplemente

$$(\mu, \nu) \twoheadrightarrow (\kappa, \lambda).$$

En [AgHe16] se resuelve el problema Gap 1:

$$(\mu^+, \mu) \twoheadrightarrow_{\mathbb{A}} (\kappa^+, \kappa),$$

para $\kappa < \mu$, $\kappa$ regular o singular y $\mathbb{A}$ un fragmento arbitrario de $L_{\kappa^+\omega}$ de cardinalidad $\kappa$.

Considere el siguiente problema para $\mathbb{A} = L_{\omega\omega}$: Suppose we have our $\mathscr{L}$-structure $\mathfrak{A}$ of size $\kappa^{++}$, and a set of $\mathscr{L}$-formulas $\Sigma(v)$ such that $|\{a \in A : \mathfrak{A} \models \Sigma[a]\}| = \kappa$. We are looking for an $\mathscr{L}$-structure $\mathfrak{B}$ of cardinality $\lambda^{++}$ elementarily equivalent to $\mathfrak{A}$ such that $|\{b \in B : \mathfrak{A} \models \Sigma[b]\}| = \lambda$. Sea $\Sigma(v) = \{\varphi_i(v) : i < \omega\}$ y sin pérdida de la generalidad podemos suponer que para cualesquier $i, j < \omega$ existe un $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi_i(a) \wedge \neg\varphi_j(a)$. Dada la estructura $\mathfrak{A}$ podemos suponer que la interpretación del 1-predicado $U$ en $\mathfrak{A}$ es

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 03C55, 03C75, 03E35, 03E45, 03E75 ; secondary 03C30, 03C80,

*Key words and phrases.* Morass, cardinal transfer theorem, omitting type theorem, consistency property, end extension.

This paper was initiated while the second Author was visiting The Albert Ludwig University, Freiburg, Germany. He would like to thank its mathematical logic department for the hospitality during my stay. He is grateful to Heike Mildenberger and Jörg Flum for making possible this visit. This work was partially supported by a CONACYT grant 140 186412 (Estancias sabáticas).

$\{a \in A : \mathfrak{A} \models \Sigma[a]\}$. Sea $\Psi(v) = \{\psi_i(v) : i < \omega\}$ donde $\psi_i \equiv \varphi_i(x) \wedge \neg U(x)$. Es claro que $\Psi(v)$ es un tipo que se omite en $A$, por lo que el problema original se traduce en encontrar una estructura $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ de tipo $(\lambda^{++}, \lambda)$ que omita a $\Psi(v)$, esto es, resolver el problema Gap 2 con omisión de tipos.

En el libro [CK93, p. 532 Problem 7.2.23] se plantea el siguiente problema: supongamos que tenemos una $\mathscr{L}$-teoría $\boldsymbol{T}$ para $\mathscr{L}$ numerable que tiene un modelo $\mathfrak{A}$ de tipo $(\mu, \nu)$ y considere un $\mathscr{L}$-tipo $\Sigma(v)$ que se omite en $\mathfrak{A}$. Si $\beth_{\omega_1} \leq \nu, \mu$, entonces $\boldsymbol{T}$ tiene un modelo de tipo $(\kappa, \lambda)$ que omite a $\Sigma$, para cualesquiera cardinales $\kappa, \lambda$. Este es el único resultado sobre omisión de tipos con dos cardinales, pero requiere la presencia de modelos "grandes" que omitan al tipo y no se trata el caso de lógicas infinitarias.

Para tener éxito al tratar el probelma antes mencionado recurrimos a una $(\lambda^+, 1)$-morass y a la solución del problema de los dos cardinales dada en [Vi16]. Esta solución consiste en teoría de modelos y el uso de la morass para la construcción de $\mathfrak{B}$. Desafortunadamente, la teoría de modelos presentada en [Vi16] depende fuertemente de trabajar con estructuras "saturadas respecto al predicado $U$", esto es, estructuras que realicen cualquier tipo que sea finito satisfacible por elementos del predicado. Dado que el problema mencionado requiere un tipo de esta naturaleza y es el que pretendemos omitir, es imposible trabajar con tal saturación. En cambio, desarrollamos las llamadas elementary end extensions en un lenguaje infinitario (de hecho, en un fragmento $\mathbb{A}$ de $L_{\lambda^+\omega}(\mathscr{L})$), e iteramos tal construcción auxiliándonos de una morass para obtener el modelo requerido que omite el tipo when $\kappa > \lambda$. Como caso particular, obtenemos el resultado para $\mathbb{A} = L_{\omega\omega}$.

## 2. Notation and preliminaries

Mediante $\square$ señalamos el fin de una demostración, con $\boxed{\checkmark}$ (i) denotamos el término de la demostración de la afirmación (i). We shall assume familiarity with all notions of the Gödel constructive universe $L$, like the condensation's lemma and the order $<_L$. We refer the reader to [Dev84] and [Jen72] for all such issues. Most of the terminology is fairly standard, and which is not will be readily understandable. We use Gothic letters $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ to denote structures and the corresponding roman letters $A, B, C, \ldots$ to represent their universes. We fix a language $\mathscr{L}$ with at least an unary predicate symbol $U$. For our language $\mathscr{L}$, we say that an $\mathscr{L}$-structure $\mathfrak{D}$ is of type $(\lambda, \mu)$ if $\mathfrak{D} = (D, U^{\mathfrak{D}})$, $|D| = \lambda$ and $|U^{\mathfrak{D}}| = \mu$. If $\mathscr{L}$ is a language and $X$ is a set, we denote by $\mathscr{L}(X)$ the language $\mathscr{L}$ with additional constant symbols $x$ for each $x \in X$. When $\mathfrak{A}$ is a $\mathscr{L}$-structure and $X \subseteq A$, $\mathfrak{A}_X$ or $(\mathfrak{A}, x)_{x \in X}$ denotes the $\mathscr{L}(X)$-structure in which the interpretation of $x$ in $A$ is $x$ for every new constant symbol $x$ from $X$. With $\varinjlim((\mathfrak{B}_i : i \in I), (\sigma_{ij} : i < j, i, j \in I))$ we denote the direct limit of the given directed system. If $f : X \longrightarrow Y$ and $A \subseteq Y$, $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$ and $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$ for every $B \subseteq Y$. With $\boxed{\checkmark}$ (n) we denote the end of the proof of the Claim n. As usual $L = \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha$. If $\mu$ is a cardinal, $H_\mu$ is the set of all elements of hereditarily cardinality $< \mu$. For a set $x$, $Pw(x)$ denotes the power set of $x$ and $TC(x)$ its transitive closure. The theories $ZF^-$, $ZFC^-$ represent $ZF$, respectively $ZFC$, without the power set axiom. $\Gamma(a, b)$ is the Gödel pairing function.

**Definition 2.1.** If $\Psi(v)$ is a set of formulas, $\mathfrak{A} \models Cv\Psi(v)$ means that for every finite subset $\{\psi_1(v), \ldots, \psi_n(v)\} \subseteq \Psi(v)$ it holds $\mathfrak{A} \models Cv(\psi_1(v) \wedge \cdots \wedge \psi_n(v))$, where $C \in \{\exists, \forall, \boldsymbol{Q_c}, \boldsymbol{Q_{|k|}}\}$ (see below for the definition of the unconventional quantifiers). Furthermore, $\mathfrak{A} \models \Psi(a)$, represents the fact that the element $a \in A$ satisfies in $\mathfrak{A}$ every formula $\psi(v) \in \Psi$.

A set of first order $\mathscr{L}(X)$-formulas $\Sigma(v)$ is a type of $\mathfrak{A}_X$ $(X \subseteq A)$ when $\Sigma(v)$ is finitely satisfiable in $\mathfrak{A}_X$.

Subcase 2. $\sup_{\overline{\tau}<\overline{\nu}} \pi_{\overline{\nu}\nu}(\overline{\tau}) = \nu$. $\nu$ is $\twoheadrightarrow$-limit, hence we consider the direct system

$$((\mathfrak{B}_\mu : \mu \twoheadrightarrow \nu), (\overrightarrow{\sigma}_{\overline{\mu}\mu} : \overline{\mu} \twoheadrightarrow \mu \twoheadrightarrow \nu))$$

and its direct limit

$$(\mathfrak{B}, (\overrightarrow{\sigma}_\mu : \mu \twoheadrightarrow \nu)).$$

Then $\mathfrak{B}$ is elementary $\mathbb{A}$-equivalent to $\mathfrak{C}$, hence omits $\Theta$. $\alpha_\nu = \sup\{\alpha_\mu : \mu \twoheadrightarrow \nu\}$.

We want to define an elementary $\mathbb{A}$-embedding $\sigma : \boldsymbol{Z}(\mathfrak{B}_\nu) \hookrightarrow_{\mathbb{A}} \mathfrak{B}$. This time we have a $\twoheadrightarrow$-limit.

We can define $\sigma : \boldsymbol{Z}(\mathfrak{B}_\nu) \hookrightarrow_{\mathbb{A}} \mathfrak{B}$ as in [Vi16]: let $x \in \boldsymbol{Z}(\mathfrak{B}_\nu)$. By **??** there is $\mu \twoheadrightarrow \nu$ with $x \in \sigma_{\mu\alpha(\mu)}[\boldsymbol{Z}(\mathfrak{B}_\mu)]$, hence we set $\sigma(x) = \overrightarrow{\sigma}_\mu(y)$, where $x = \sigma_{\mu\alpha(\mu)}(y)$, $y \in \boldsymbol{Z}(\mathfrak{B}_\mu)$. ❐

## 6. Applications

**Definition 6.1.** Let $\mathbb{A}$ be a fragment of $L_{\lambda^+\omega}$ of size $\lambda$ and let $\mathfrak{A}$ be an $\mathscr{L}$-structure of cardinality $\lambda$. We say that $\mathfrak{A}$ is $\mathbb{A}$-small if $\mathfrak{A}$ realizes only $\lambda$ $\mathbb{A}$-types; $\mathbb{A}$ is said small, whe it is $L_{\lambda^+\omega}$-small.

**Lemma 6.2.** *$\mathfrak{A}$ is small if and only if there exists an $\mathscr{L}$-structure $\mathfrak{B}$ of cardinality $\lambda$ such that $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}$.*

Ejercicio 2.34 de Marker.

**Theorem 6.3** ($V = L$). *Let $\mathbb{A}$ be a fragmento of $L_{\lambda^+\omega}$ of size $\lambda$. If $\varphi$ has a model of cardinality $\lambda^{++}$, then $\varphi$ has a model of the same cardinality which realizes only $\lambda$ $\mathbb{A}$-types.*

**Theorem 6.4** ($V = L$). *Let $\mathbb{A}$ be a fragment of $L_{\lambda^+\omega}$ of size $\lambda$. Let suppose that for every $\mathscr{L}$-structure $\mathfrak{A}$ of cardinality $\lambda$ which is model of $\varphi$ there exists only $\lambda$ $\mathbb{A}$-types in $\mathfrak{A}$. Then for each $\mathscr{L}$-structure $\mathfrak{B}$ model of $\varphi$ there exist only $|\mathfrak{B}|$ $\mathbb{A}$-types in $\mathfrak{B}$.*

**Theorem 6.5.** *Let $\mathbb{A}$ be a fragment of $L_{\lambda^+\omega}$ of size $\lambda$ and assume the $\mathbb{A}$-sentence $\varphi$ has a model of cardinality $\lambda^+$. Then the set of all $\mathbb{A}$-types realized in models of $\varphi$ of cardinality $\lambda^+$ has cardinality $\lambda$. In fact, if $\varphi$ has a $\lambda^+$-like model, then the set of all $\mathbb{A}$-types realized in such model has cardinality $\lambda$.*

**Theorem 6.6.** *Let $\mathbb{A}$ b a fragment of $L_{\lambda^+\omega}$ of size $\lambda$. Assume $\varphi$ has a model of cardinality $\lambda^{++}$. Then the set of all $\mathbb{A}$-types realized in any model of cardinality $\lambda^{++}$ has cardinality $\lambda$.*

**Corollary 6.7.** *Let $\mathfrak{A}$ be an $\mathscr{L}$-structure of cardinality $\lambda$ with an end-$\mathbb{A}$-elementary extension of cardinality $\lambda^+$. Then the set of all $\mathbb{A}$-types realized in any end-$\mathbb{A}$-elementary extension of cardinality $\lambda^+$ has cardinality $\lambda$.*

## References


[AgHeVi16] K. Aguirre L., C. Hernández D., L. Villegas S., *A new consistency property por $L_{\lambda^+\omega}$ and some applications*, submitted.

[AgHe16] K. Aguirre L., C. Hernández D., *No sé como se llama*, submitted.

[Ba75] J. Barwise, *Admissible Sets and Structures: An Approach to Definability Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[CK93] C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory*, 3rd. Ed., North-Holland, 1993.

[Dev84] K. Devlin, Constructibility, *Springer-Verlag*, 1984.

[Di75] M. Dickmann, *Large Infinitary Languages Model Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[JenKar71] R. Jensen, C. Carp, *Primitive recursive set functions*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematic, Am. Math. Soc. **13**(1) 1971, 143-176.

[Jen72] R. B. Jensen, *The Fine Structure of the Constructible Hierarchy*, Ann. Math. Logic **4**(1972), 229-308.

[Ke71] H. J. Keisler, *Model theory for Infinitary Logic*, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[Ku75] D. Kueker Ed., *Infinitary Logic: In Memoriam Carol Karp*, Lecture Notes in Mathematics 492, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[Ma13] D. Marker, *Lectures on Infinitary Model Theory*, Unpublished, 2013.

[Vi16] L. M. Villegas Silva, *The Gap-2 cardinal problem for uncountable languages*, to appear in Mathematical Logic Quarterly

[We10] P. Welch, $\Sigma^*$ *Fine Structure*, In M. Foreman, A. Kanamori, (eds.) *Handbook of Set Theory*, Springer-Verlag, 2010, 657-736.

## 7. Appendix

In this section we collect all result used in the paper wich are already proved in [AgHeVi16]. We also provide the proofs.

**Lemma 7.1.** *[Criterio de Tarski-Vaught] Sean $\mathbb{A}$ un fragmento de $L_{\infty\omega}(\mathscr{L})$ y $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathscr{L}$-estructuras. Entonces $\mathfrak{A} \preccurlyeq_{\mathbb{A}} \mathfrak{B}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y para cada $\mathbb{A}$-fórmula de la forma $\exists x\varphi(\vec{y}, x)$ y cualesquier $b_1, \ldots, b_n \in A$, si $\mathfrak{B} \models \exists x\varphi(\vec{b}, y)$ entonces existe $a \in A$ con $\mathfrak{B} \models \varphi(\vec{b}, a)$.*

❒

**Theorem 7.2.** *[Downward Löwenheim-Skolem] Sean $\mathbb{A}$ un fragmento de $L_{\infty\omega}(\mathscr{L})$, $|\mathscr{L}| \leq |\mathbb{A}|$, $\mathfrak{A}$ una Le-estructura, $X \subseteq A$ y $\mu$ un cardinal infinito tal que $|X| \leq \mu \leq |\mathfrak{A}|$. Entonces existe $\mathfrak{B} \preccurlyeq_{\mathbb{A}} \mathfrak{A}$ tal que $X \subseteq B$ y $|\mathfrak{B}| = \max\{|\mathbb{A}|, \mu\}$.*

❒

Sobre el problema de dos cardinales.

**Lemma 7.3.** *Sean $\mathbb{A}$ un fragmento de $L_{\mu\omega}(\mathscr{L})$, $|\mathscr{L}| \leq |\mathbb{A}|$, y $\boldsymbol{T}$ una $\mathbb{A}$-teoría. Para $\lambda \geq \delta$ cardinales infinitos con $|\mathbb{A}| \leq \delta$ se cumple lo siguiente.*

(1) *Si $\boldsymbol{T}$ admite $(\lambda, \delta)$, entonces $\boldsymbol{T}$ admite $(\gamma, \delta)$ según $\mathbb{A}$ para cada cardinal $\gamma$ tal que $\lambda \geq \gamma \geq \delta$.*
(2) *Si $\boldsymbol{T}$ admite $(\lambda, \delta)$, entonces $\boldsymbol{T}$ admite $(\gamma, \gamma)$ según $\mathbb{A}$, para $|\mathbb{A}| \leq \gamma \leq \delta$.*

❒

**Lemma 7.4.** *Sean $\mathbb{A}$ un fragmento de $L_{\mu\omega}(\mathscr{L})$ y $\boldsymbol{T}$ una $\mathbb{A}$-teoría. Para $\lambda \geq \delta$ cardinales infinitos, si $\mathfrak{A}$ es una $\mathscr{L}$-estructura de tipo $(\lambda, \delta)$ modelo de $\boldsymbol{T}$ y $X \subseteq A$, existe una $\mathscr{L}$-estructura $\mathfrak{B}$ de tipo $(\gamma, \gamma)$ con $X \subseteq B$ y $\mathfrak{A} \preccurlyeq_{\mathbb{A}} \mathfrak{B}$, siempre que* $\max\{|X|, |\mathbb{A}|\} \leq \gamma \leq \delta$.

❒

**Theorem 7.5.** *[Existencia de modelos] Todo elemento de una propiedad de consitencia tiene un modelo.*

*Proof.* Véase [AgHeVi16, Th. 12]. ❒

**Theorem 7.6.** *[Existencia de modelos extendido] Sean $\boldsymbol{T}$ un conjunto de $L_{\mu\omega}$-enunciados, $|\boldsymbol{T}| < \mu$ y suponga que $\Sigma$ es una propiedad de consistencia tal que para cada $\sigma \in \Sigma$ y toda $\psi \in \boldsymbol{T}$, se cumple $\sigma \cup \{\psi\} \in \Sigma$. Entonces $\boldsymbol{T}$ tiene un modelo.*

*Proof.* Véase [AgHeVi16, Th. 13]. ❒

**Theorem 7.7**. *[Omisión de tipos] Sean $\mathbb{A}$ un fragmento de $L_{\mu\omega}$ de cardinalidad $\lambda < \mu$ regular, $\boldsymbol{T}$ una $\mathbb{A}$-teoría satisfacible, $\{\Theta_\alpha(v_1, \ldots, v_{m_\alpha}) : \alpha < \lambda, m_\alpha < \omega\}$ una familia de conjuntos de $\mathbb{A}$-fórmulas. Suponga que para toda $\alpha < \lambda$, dado cualquier conjunto $\Psi(v_1, \ldots, v_{m_\alpha}) \subseteq \mathbb{A}$ de cardinalidad $< \lambda$, si $\boldsymbol{T} + \exists\, \vec{v} \bigwedge \Psi(\vec{v})$ tiene un modelo, entonces existe $\theta \in \Theta_\alpha$ tal que $\boldsymbol{T} + \exists\, \vec{v}(\bigwedge \Psi(\vec{v}) \wedge \theta(\vec{v}))$ tiene un modelo. Si todo esto se cumple, entonces*

$$\boldsymbol{T} + \bigwedge_{\alpha<\lambda} \forall\, \vec{v} \bigvee_{\theta\in\Theta_\alpha} \theta(\vec{v})$$

*tiene un modelo.*

*Proof.* Véase [AgHeVi16, Th. 14]. ❒

**Corollary 7.8**. *Sean $\mathbb{A}$ un fragmento de $L_{\mu\omega}(\mathscr{L})$ de cardinalidad $\lambda < \mu$ regular cerrado respecto a conjunciones de tamaño menor que $\lambda$, $\boldsymbol{T}$ una $\mathbb{A}$-teoría satisfacible, $\{\Theta_\alpha(v_1, \ldots, v_{m_\alpha}) : \alpha < \lambda, m_\alpha < \omega\}$ una familia de conjuntos de $\mathbb{A}$-fórmulas. Suponga que para cada $\alpha < \lambda$ y toda $\mathbb{A}$-fórmula $\psi(v_1, \ldots, v_{m_\alpha})$, si $\boldsymbol{T} + \exists\, \vec{v}\psi(\vec{v})$ tiene un modelo, entonces existe $\theta \in \Theta_\alpha$ tal que $\boldsymbol{T} + \exists\, \vec{v}(\psi(\vec{v}) \wedge \theta(\vec{v}))$ tiene un modelo. Entonces*

$$\boldsymbol{T} + \bigwedge_{\alpha<\lambda} \forall\, \vec{v} \bigvee_{\theta\in\Theta_\alpha} \theta(\vec{v})$$

*es satisfacible.*

*Proof.* Véase [AgHeVi16, Cor. 15]. ❒

(Villaveces) Facultad de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, **e-mail: avillavecesn@gmail.com**

(Villegas) Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, Iztapalapa, 09340 D.F., México, **e-mail**: **lmvs@xanum.uam.mx**